



Серия
РЕШЕБНИК

Решение экзаменационных задач по алгебре

«СБОРНИК ЗАДАЧ
для подготовки и проведения
письменного экзамена
по АЛГЕБРЕ. 9 класс»
Под редакцией
С.А. Шестакова

9



А.Ф. Веремьев

Решение экзаменационных задач по алгебре за 9 класс

**к учебному изданию «Сборник задач
для подготовки и проведения письменного
экзамена по алгебре за курс основной школы:
9-й кл. / С.А. Шестаков, И.Р. Высоцкий,
Л.И. Звавич; под ред. С.А. Шестакова.
— 2-е изд., испр. — М.: АСТ: Астрель, 2007»**

***Учебно-методическое
пособие***

Издание четвертое, стереотипное

***Издательство
«ЭКЗАМЕН»***

**МОСКВА
2008**

УДК 373:512
ББК 22.14я721+22.161я721
В31

Изображение учебного издания «Сборник задач для подготовки и проведения письменного экзамена по алгебре за курс основной школы: 9-й кл. / С.А. Шестаков, И.Р. Высоцкий, Л.И. Звавич; под ред. С.А. Шестакова. — 2-е изд., испр. — М.: АСТ: Астрель, 2007» приведено на обложке данного издания исключительно в качестве иллюстративного материала (ст. 19 п. 2 Закона РФ «Об авторском праве и смежных правах» от 9 июня 1993 г.).

Веремьёв, А.Ф.

В31 Решение экзаменационных задач по алгебре за 9 класс к учебному изданию С.А. Шестакова и др. «Сборник задач для подготовки и проведения письменного экзамена по алгебре за курс основной школы: 9 кл.» : учебно-методическое пособие / А.Ф. Веремьёв. — 4-е изд., стереотип. — М.: Издательство «Экзамен», 2008. — 383, [1] с. (Серия «Решебник»)

ISBN 978-5-377-00935-1

Предлагаемое учебное пособие содержит подробное решение всех задач из учебного издания «Сборник задач для подготовки и проведения письменного экзамена по алгебре за курс основной школы: 9-й кл. / С.А. Шестаков, И.Р. Высоцкий, Л.И. Звавич; под ред. С.А. Шестакова. — 2-е изд., испр. — М.: АСТ: Астрель, 2007».

Пособие адресовано родителям для проверки уровня готовности ученика к экзамену.

УДК 373:512

ББК 22.14я721+22.161я721

Формат 84х108/32. Гарнитура «Таймс». Бумага типографская.
Уч.-изд. л. 13,12. Усл. печ. л. 20,16. Тираж 15 000 экз. Заказ № 4039(3)

ISBN 978-5-377-00935-1

© Веремьёв А.Ф., 2008

© Издательство «ЭКЗАМЕН», 2008

Оглавление

Глава 1. Числовые выражения	4
§ 1. Действия над целыми числами	4
§ 2. Действия с дробями	9
§ 3. Действия с корнями	13
Глава 2. Буквенные выражения	21
§ 1. Действия с многочленами	21
§ 2. Действия с алгебраическими дробями	26
§ 3. Действия с иррациональными выражениями	34
Глава 3. Уравнения	42
§ 1. Целые алгебраические уравнения	42
§ 2. Дробно-рациональные уравнения	53
§ 3. Иррациональные неравенства	66
Глава 4. Неравенства	78
§ 1. Целые алгебраические неравенства	78
§ 2. Дробно-рациональные неравенства	86
§ 3. Иррациональные неравенства	96
Глава 5. Системы уравнений	108
§ 1. Системы целых алгебраических уравнений	108
§ 2. Системы рациональных уравнений	125
§ 3. Системы иррациональных уравнений	141
Глава 6. Системы неравенств	156
§ 1. Системы целых алгебраических неравенств	156
§ 2. Системы дробно-рациональных неравенств	170
§ 3. Системы иррациональных неравенств	184
Глава 7. Функции и графики	204
§ 1. Чтение графиков	204
§ 2. Построение графиков	211
§ 3. Исследование функций	227
Глава 8. Текстовые задачи	234
§ 1. Задачи на движение и работу	234
§ 2. Задачи на проценты, части, доли	251
§ 3. Задачи на свойства целых чисел	261
Глава 9. Прогрессии	271
Приложение 1. Задачи по геометрии	280
§ 1. Отрезки, углы, треугольники	280
§ 2. Многоугольники	311
§ 3. Окружности	334
Приложение 2. Задачи по теории вероятностей и статистике	354
Приложение 3. Примерные варианты экзаменационных работ	365
Экзаменационные работы по алгебре для общеобразовательных классов	365
Экзаменационные работы по алгебре для классов с углубленным изучением математики	373

Глава 1. Числовые выражения

§ 1. Действия над целыми числами

Уровень А

1.1.A01

$$\text{а) } 564 \cdot 645 - 563 \cdot 645 + 563355 = 645 \cdot (564 - 563) + 563355 = \\ = 645 + 563355 = 564000;$$

$$\text{б) } 598 \cdot 985 - 597 \cdot 985 + 597015 = 985 \cdot (598 - 597) + 597015 = \\ = 985 + 597015 = 598000.$$

1.1.A02

$$\text{а) } (735 + 728)^2 - 4 \cdot 735 \cdot 728 = 735^2 + 2 \cdot 735 \cdot 728 + 728^2 - 4 \cdot 735 \cdot 728 = \\ = 735^2 - 2 \cdot 735 \cdot 728 + 728^2 = (735 - 728)^2 = 7^2 = 49;$$

$$\text{б) } (744 + 740)^2 - 4 \cdot 744 \cdot 740 = 744^2 + 2 \cdot 744 \cdot 740 + 740^2 - 4 \cdot 744 \cdot 740 = \\ = 744^2 - 2 \cdot 744 \cdot 740 + 740^2 = (744 - 740)^2 = 4^2 = 16.$$

1.1.A03

$$\text{а) } (306 - 694)^2 + 4 \cdot 306 \cdot 694 = 306^2 - 2 \cdot 306 \cdot 694 + 694^2 + 4 \cdot 306 \cdot 694 = \\ = 306^2 + 2 \cdot 306 \cdot 694 + 694^2 = (306 + 694)^2 = 1000^2 = 1000000;$$

$$\text{б) } (414 - 586)^2 + 4 \cdot 414 \cdot 586 = 414^2 - 2 \cdot 414 \cdot 586 + 586^2 + 4 \cdot 414 \cdot 586 = \\ = 414^2 + 2 \cdot 414 \cdot 586 + 586^2 = (414 + 586)^2 = 1000^2 = 1000000.$$

1.1.A04

$$\text{а) } (162^2 - 161^2) : 323 = (162 - 161)(162 + 161) : 323 = 323 : 323 = 1;$$

$$\text{б) } (133^2 - 132^2) : 265 = (133 - 132)(133 + 132) : 265 = 265 : 265 = 1.$$

1.1.A05

$$\text{а) } 584 + 583^2 - 584^2 + 583 = (583 + 584) - (584 - 583)(583 + 584) = 0;$$

$$\text{б) } 675 + 674^2 - 675^2 + 674 = (675 + 674) - (675 - 674)(675 + 674) = 0.$$

1.1.A06

$$\text{а) } 7^{82} \cdot 2^{82} = (7 \cdot 2)^{82} = (14)^{2 \cdot 41} = (14^{41})^2; \quad \text{б) } 3^{52} \cdot 2^{52} = (15)^{52} = (15)^{2 \cdot 26} = (15^{26})^2.$$

1.1.A07

$$\text{а) } 477 \cdot 960 - 822 > 477 \cdot 960 - 945 \text{ т.к. } 945 > 822;$$

$$\text{б) } 950 \cdot 462 - 286 > 950 \cdot 462 - 491 \text{ т.к. } 491 > 286.$$

1.1.A08

$$\text{а) } 36^{39} = (6^2)^{39} = 6^{78} < 6^{79} \Rightarrow 6^{79} > 36^{39}; \quad \text{б) } 4^{49} = (2^2)^{49} = 2^{98} < 2^{99} \Rightarrow 2^{99} > 4^{49}.$$

1.1.A09

$$\text{а) } 34^{15} + 34^{16} = 34^{15} + 34 \cdot 34^{15} = (34 + 1) \cdot 34^{15} = 35 \cdot 34^{15}, \text{ делится на } 35;$$

$$\text{б) } 5^{32} + 5^{34} = 5^{32} + 5^2 \cdot 5^{32} = 5^{32}(1 + 25) = 26 \cdot 5^{32}, \text{ делится на } 26.$$

1.1.A10

$$\text{а) } 4^{24} + 4^{25} + 4^{26} = 4^{24} + 4 \cdot 4^{24} + 4^2 \cdot 4^{24} = 4^{24}(1 + 4 + 16) = 21 \cdot 4^{24}, \text{ делится на } 21;$$

$$\text{б) } 8^{16} + 8^{17} + 8^{18} = 8^{16} + 8 \cdot 8^{16} + 8^2 \cdot 8^{16} = 8^{16}(1 + 8 + 64) = 73 \cdot 8^{16}, \text{ делится на } 73.$$

Уровень В

1.1.B01

$$\text{а) } 5379^2 - 5378 \cdot 5380 = 5379^2 - (5379 - 1)(5379 + 1) = 5379^2 - (5379^2 - 1) = 1;$$

$$\text{б) } 9552 \cdot 9550 - 9551^2 = (9551 + 1)(9551 - 1) - 9551^2 = 9551^2 - 1 - 9551^2 = -1.$$

1.1.B02

- а) $480^3 - 480^2 - 480 \cdot 479 - 479^2 - 479^3 =$
 $= (480 - 479)(480^2 + 480 \cdot 479 + 479^2) - 480^2 - 480 \cdot 479 - 479^2 = 0;$
 б) $494^3 - 494^2 - 494 \cdot 493 - 493^2 - 493^3 =$
 $= (494 - 493)(494^2 + 494 \cdot 493 + 493^2) - 494^2 - 494 \cdot 493 - 493^2 = 0.$

1.1.B03

- а) $(5 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 2)(5 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 7) - 5972 \cdot 5970 = 5972 \cdot 597 - 597 \cdot 5970 =$
 $= 597 \cdot (5972 - 5970) = 597 \cdot 2 = 1194;$
 б) $(7 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 2)(7 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 9) - 795 \cdot 7590 = 7592 \cdot 759 - 759 \cdot 7590 =$
 $= 759 \cdot (7592 - 7590) = 759 \cdot 2 = 1518.$

1.1.B04

- а) $2^{99} = 2^{3 \cdot 33} = 8^{33}; 3^{66} = 3^{2 \cdot 33} = 9^{33} \Rightarrow 2^{99} < 3^{66};$
 б) $2^{96} = 2^{3 \cdot 32} = 8^{32}; 3^{64} = 3^{2 \cdot 32} = 9^{32} \Rightarrow 2^{96} < 3^{64}.$

1.1.B05

- а) $3^{143} \cdot 49^{36} = 3^{143} \cdot 7^{2 \cdot 36} = 3^{143} \cdot 7^{72};$
 $63^{72} = (9 \cdot 7)^{72} = 3^{2 \cdot 72} \cdot 7^{72} = 3^{144} \cdot 7^{72}$
 Тогда $63^{72} > 3^{143} \cdot 49^{36} > 3^{143} \cdot 7^{71};$
 б) $4^{127} \cdot 25^{32} = 4^{127} \cdot 5^{2 \cdot 32} = 4^{127} \cdot 5^{64};$
 $80^{64} = 4^{64} \cdot 5^{64} = 4^{2 \cdot 64} \cdot 5^{64} = 4^{128} \cdot 5^{64}$
 Тогда $80^{64} > 4^{127} \cdot 25^{32} > 4^{127} \cdot 5^{63}.$

1.1.B06

- а) $573 \cdot 575 - 578 \cdot 576 > 574 \cdot 572 - 577 \cdot 579$, т.к. уменьшаемое левой части больше, а вычитаемое меньше.
 б) $597 \cdot 599 - 600 \cdot 602 > 598 \cdot 596 - 601 \cdot 603$, т.к. уменьшаемое левой части больше, а вычитаемое меньше.

1.1.B07

- а) Последняя цифра произведения $262 \cdot 263 \cdot 264 \cdot 266 \cdot 267$ равна последней цифре произведения $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 = 1008$ т.е. 8.
 б) Последняя цифра произведения $204 \cdot 206 \cdot 207 \cdot 208 \cdot 209$ равна последней цифре произведения $4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 12096$ т.е. 6.

1.1.B08

- а) Числа не равны, т.к. последняя цифра произведения $827 \cdot 278 \cdot 782$ – четная.
 б) Числа не равны, т.к. последняя цифра произведения $743 \cdot 437 \cdot 374$ – четная.

1.1.B09

- а) $688 \cdot 690 > 689 \cdot 687$, т.к. $690 > 689 > 0$ и $688 > 687 > 0$.
 б) $685 \cdot 687 > 686 \cdot 684$, т.к. $687 > 686 > 0$ и $685 > 684 > 0$.

1.1.B10

- а) 3326 – четное, не простое
 3325 делится на 5 – не простое
 3321 делится на 3 – не простое
 тогда 3307 – простое;
 б) 2966 – не простое, т.к. четное
 2965 – не простое, т.к. делится на 5
 2961 – не простое, т.к. делится на 3
 т.е. 2969 – простое.

Уровень С**1.1.C01**

- а) $x^2 = 13889 \cdot 13891 + 1 = (13890 + 1)(13890 - 1) + 1 = 13890^2 - 1^2 + 1 = 13890^2$,
 т.к. $x < 0$, то $x = -13890$. Ответ: $x = -13890$.

б) $x^2 = 59919 \cdot 59921 + 1 = (59920 - 1)(59920 + 1) + 1 = 59920^2 - 1^2 + 1 = 59920^2$
т.к. $x > 0$, то $x = 59920$. *Ответ:* $x = 59920$.

1.1.C02

а) $x^3 = 301^3 - 3 \cdot 301^2 + 902 = (301^3 - 1) - 3 \cdot 301^2 + 3 \cdot 301 =$
 $= (301 - 1)(301^2 + 301 + 1) - 3 \cdot 301(301 - 1) = 300(301^2 + 301 + 1) - 3 \cdot 301 \cdot 300 =$
 $= 300(301^2 - 2 \cdot 301 + 1) = 300(301 - 1)^2 = 300^3$, откуда $x = 300$;

Ответ: $x = 300$.

б) $x^3 = 201^3 - 3 \cdot 201^2 + 602 = (201^3 - 1) - 3 \cdot 201^2 + 3 \cdot 201 =$
 $= (201 - 1)(201^2 + 201 + 1) - 3 \cdot 201(201 - 1) = 200(201^2 + 201 + 1) - 3 \cdot 201 \cdot 200 =$
 $= 200(201^2 - 2 \cdot 201 + 1) = 200(201 - 1)^2 = 200^3$, откуда $x = 200$.

Ответ: $x = 200$.

1.1.C03

а) Т.к. последняя цифра числа $(749)^2$ равна 1, то т.к. $749^{49} =$
 $= ((749)^2)^{24} \cdot 749$, получим, что последняя цифра искомого числа равна 9;

Ответ: 9.

б) Последняя цифра числа $(754)^3$ равна 4, тогда поскольку $(754)^{45} =$
 $= (754^3)^{15} = ((754^3)^3)^5$, то последняя цифра этого числа равна последней
цифре числа 4^5 , т.е. 4. *Ответ:* 4.

1.1.C04

а) Т.к. последняя цифра числа $(463)^4$ равна последней цифре числа 3^4 , т.е. 1,
то поскольку $463^{96} = (463^4)^{24}$, то последняя цифра искомого числа равна 1.

Ответ: 1.

б) Т.к. последняя цифра числа $(687)^4$ равна последней цифре числа 7^4 , т.е. 1,
то поскольку $687^{92} = (687^4)^{23}$, то последняя цифра искомого числа равна 1.

Ответ: 1.

1.1.C05

а) $87 \cdot 88 \cdot 89 < 100 \cdot 100 \cdot 89 = 890000 < 891384$;

б) $95 \cdot 96 \cdot 97 < 100 \cdot 100 \cdot 97 = 970000 < 974640$.

1.1.C06

а) Число $752 \cdot 753 \cdot 754$ делится на 4, а 426957014 – нет, т.е. числа не равны.

б) Число $771 \cdot 772 \cdot 773$ делится на 3, а 460098866 – нет, т.е. числа не равны.

1.1.C07

а) $529 \cdot 169 \cdot 961 = 23^2 \cdot 13^2 \cdot 31^2 = (23 \cdot 13)(13 \cdot 31)(31 \cdot 23) = 299 \cdot 403 \cdot 713$ –
равенство верно;

б) $121 \cdot 841 \cdot 361 = 11^2 \cdot 29^2 \cdot 19^2 = (11 \cdot 29)(29 \cdot 19)(19 \cdot 11) = 319 \cdot 551 \cdot 209$.

1.1.C08

а) Пусть a – данное число, тогда по условию $a = 9k + 5 = 9k + 3 + 2 =$
 $= 3(3k + 1) + 2$, т.е. остаток от деления a на 3 равен 2.

Ответ: 2.

б) Пусть a – данное число, тогда по условию $a = 8k + 7 = 8k + 4 + 3 =$
 $= 4(2k + 1) + 3$, т.е. остаток от деления a на 4 равен 3.

Ответ: 3.

1.1.C09

- а) $|354 \cdot 352 - 355 \cdot 353| + |354 \cdot 356 - 355 \cdot 353| = |(353+1)(353-1) - (354+1)(354-1)| + |(355-1)(355+1) - (354-1)(354+1)| = |353^2 - 354^2| + |355^2 - 354^2| = 354^2 - 353^2 + 355^2 - 354^2 = 355^2 - 353^2 = (355-353)(355+353) = 2 \cdot 708 = 1416;$
- б) $|265 \cdot 263 - 266 \cdot 264| + |265 \cdot 267 - 266 \cdot 264| = |(264+1)(264-1) - (265+1)(265-1)| + |(266-1)(266+1) - (265-1)(265+1)| = |264^2 - 265^2| + |266^2 - 265^2| = 265^2 - 264^2 + 266^2 - 265^2 = (266-264)(266+264) = 2 \cdot 530 = 1060.$

1.1.C10

- а) $2a^3 = 321^3 + 321^2 + 321 \cdot 320 + 320^2 + 320^3 = -(321^3 - 320^3) + 321^2 + 321 \cdot 320 + 320^2 + 321^3 \cdot 2 = -(321-320)(321^2 + 321 \cdot 320 + 320^2) + (321^2 + 321 \cdot 320 + 320^2) + 2 \cdot 321^3 = 2 \cdot 321^3$, отсюда $a = 321$;

Ответ: 321.

- б) $2a^3 = 417^3 + 417^2 + 417 \cdot 416 + 416^2 + 416^3 = (416^3 - 417^3) + 417^2 + 417 \cdot 416 + 416^2 + 2 \cdot 417^3 = (416-417)(417^2 + 417 \cdot 416 + 416^2) + 417^2 + 417 \cdot 416 + 416^2 + 2 \cdot 417^3 = 2 \cdot 417^3$, отсюда $a = 417$.

Ответ: 417.

Уровень D

1.1.D01

- а) Последняя цифра числа $(872)^{113}$ равна последней цифре числа 2^{113} , заметим что последняя цифра числа 2^5 равна 2, т.к. $2^{113} = (2^5)^{22} \cdot 2^3$, тогда последняя цифра этого числа равна последней цифре числа $2^{22} \cdot 2^3 = 2^{25} = (2^5)^5$, ну а последняя цифра этого числа равна 2.

Ответ: 2.

- б) Последняя цифра числа $(278)^{311}$ равна последней цифре числа 8^{311} , заметим что последняя цифра числа 8^5 равна 8, т.к. $8^{311} = ((8^5)^{62} \cdot 8^{11})$, то последняя цифра этого числа равна последней цифре числа $8^{12} \cdot 8^{11} = 8^{23} = (8^4)^5 \cdot 8^3$ аналогично, последняя цифра этого числа равна последней цифре числа $8^7 = 8^5 \cdot 8^2 = 64 \cdot 8^5$, ну а последняя цифра этого числа равна 2.

Ответ: 2.

1.1.D02

- а) $3^{72} = 9^{36}, 4^{54} = 2^{108} = 8^{36} \Rightarrow 3^{72} > 4^{54} \Rightarrow 633^{37} > 632^{44};$
- б) $4^{36} = 2^{72} = 8^{24}, 3^{48} = 9^{24} \Rightarrow 3^{48} > 4^{36} \Rightarrow 436^{43} < 437^{37}.$

1.1.D03

- а) Пусть n – искомое число, тогда по условию $n = 8k+7 = 8k+4+3 = 4(2k+1)+3$, т.е. остаток от деления n на 4 равен 3, т.е. такого числа не существует.
- б) Пусть n – искомое число, тогда по условию $n = 9k+7 = 9k+3+4 = 9k+3+3+1 = 3(3k+2)+1$, т.е. остаток от деления n на 3 равен 1, т.е. такого числа не существует.

1.1.D04

- а) Пусть n – искомое число, с одной стороны $n = 23k+2$, а с другой $n = 3l+2$, имеем $23k = 3l$, тогда $k = 3, l = 23$. Отсюда $n = 23 \cdot 3 + 2 = 71$.

Ответ: 71.

б) Пусть n – искомое число, с одной стороны $n = 7k+6$, а с другой $n = 16l+6$, имеем $7k = 16l$, тогда $k = 16$, $l = 7$, отсюда $n = 7 \cdot 16 + 6 = 118$.

Ответ: 118.

1.1.D05

а) Пусть n – искомое число, с одной стороны $n = 19k+16$, а с другой $n = 11l+8$, имеем $19k+16 = 11l+8 \Rightarrow 19k-11l+8 = 0$

$$\Rightarrow 8(k+1)+11(k-l) = 0 \Rightarrow k-l = -8m, k+l = 11m. k = 11m-1, l = 18m.$$

Т.к. требуется наименьшее такое n , то $m = 1$ (при $m = 0$, $k < 0$). $k = 10$.

Тогда $n = 19 \cdot 10 + 16 = 206$.

Ответ: 206.

б) Пусть n – искомое число, по условию

$n = 17k+15$ и $n = 13l+11$, имеем $17k+15 = 13l+11 \Rightarrow 4(k+1)+13(k+l) = 0 \Rightarrow k-l = -4m, k+1 = 13m; k = 13m-1$. Т.к. требуется наименьшее такое n , то $m = 1$ (при $m = 0$, $k < 0$). $k = 12$.

Тогда $n = 17 \cdot 12 + 15 = 219$.

Ответ: 219.

1.1.D06

а) Т.к. последняя цифра $(639)^{22}$ – равна последней цифре $9^{22} = (9^2)^{11}$, т.е. 1, и последняя цифра $(639)^{44} = (639^2)^{22}$ равна тоже 1, то утверждения 1) и 3) истинны, а 2) ложно – $a = 639$.

б) Исходя из рассуждений пункта а) несложно видеть, что $a = 549$, т.е. утверждения 1) и 3) истинны, а 2) ложно.

1.1.D07

а) Так как $61 = 4 \cdot 13 + 9$, то $a = 61$, 2) ложно;

б) так как $56 = 4 \cdot 12 + 8$, то $a = 56$, 2) ложно.

1.1.D08

а) Так как 92 делится на 46, то $a = 92$, a – делится на 23, т.е. 2) ложно;

б) так как 44 делится на 22, то $a = 44$, a – делится на 11, т.е. 2) ложно.

1.1.D09

а) Сложим 2) и 3), получим $15(x+y) = 375 \Rightarrow x+y = 25$, т.е. $y = 25-x$, подставим в 2) получим $9x+100-4x = 135 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow y = 18$.

Ответ: $x = 7, y = 18$.

б) Сложим 2) и 3), получим $15(x+y) = 315 \Rightarrow x+y = 21 \Rightarrow y = 21-x$, подставим в 2), получим $8x+105-5x = 120 \Rightarrow x = 5, y = 16$.

Итак, 1) ложно, 2), 3) истинны и $x = 5, y = 16$.

Ответ: $x = 5, y = 16$.

1.1.D10

а) Вычтем из 3), 4) получим $16a-40b = -367$, чего быть не может, т.е. либо 3), либо 4) ложно, тогда 1), 2) истинны, т.е. $a = 11b$.

Подставим а 4), получим $168b = 672 \Rightarrow b = 4, a = 44$.

Итак, 1), 2), 4) – истинны, 3) ложно, $a = 44, b = 4$.

Ответ: $a = 44, b = 4$.

б) Вычтем из 4) 3), получим $4a+10b = 601$, чего не может быть, т.е. либо 3), либо 4) ложно, а 1), 2) – истинны, тогда $a = 5b$.
 Подставим в 4), получим: $118b = 944 \Rightarrow b = 8, a = 40$.
 Итак, 1), 2), 4) – истинны, 3) ложно, $a = 40, b = 8$.
 Ответ: $a = 40, b = 8$.

§ 2. Действия с дробями

Уровень А

1.2.A01

$$a) \frac{27^{-1} \cdot 9^5}{16^0 \cdot 3^{-3}} = \frac{3^{-3} \cdot 3^{10}}{3^{-3}} = 3^{10}$$

$$б) \frac{9^{-3} \cdot 27^4}{12^0 \cdot 3^{-6}} = \frac{3^{-6} \cdot 3^{12}}{3^{-6}} = 3^{12}$$

1.2.A02

$$a) \frac{(2^6)^2 \cdot 128^{-5}}{2^{-43}} = \frac{2^{12} \cdot 2^{-35}}{2^{-43}} = 2^{20}$$

$$б) \frac{(29)^6 \cdot 64^{-4}}{2^{42}} = \frac{2^{54} \cdot 2^{-24}}{2^{42}} = 2^{12}$$

1.2.A03

$$a) \frac{10^{-7} \cdot 100^9}{10^9 \cdot 100^{-7}} = \frac{10^{-7} \cdot 10^{18}}{10^9 \cdot 10^{-14}} = 10^{16}$$

$$б) \frac{10^{-8} \cdot 100^6}{10^6 \cdot 100^{-8}} = \frac{10^{-8} \cdot 10^{12}}{10^6 \cdot 10^{-16}} = 10^{14}$$

1.2.A04

$$a) \frac{3^2 - 0,363^2}{3,363} = \frac{(3 - 0,363) \cdot 3,363}{3,363} = 2,637$$

$$б) \frac{5^2 - 0,275^2}{5,275} = \frac{(5 - 0,275) \cdot 5,275}{5,275} = 4,725$$

1.2.A05

$$a) \frac{9,4 \cdot 10^{-3}}{10^{-7} \cdot 10^3} = 9,4 \cdot 10 = 94$$

$$б) \frac{3,6 \cdot 10^{-3}}{10^{-8} \cdot 10^1} = 3,6 \cdot 10^4 = 36000$$

1.2.A06

$$a) 56,78 \cdot 10^6 < 56,87 \cdot 10^6 = 5,687 \cdot 10^7$$

$$б) 4,567 \cdot 10^9 = 45,67 \cdot 10^8 < 45,75 \cdot 10^8$$

1.2.A07

$$a) 3,456 \cdot 10^{-5} = 345,6 \cdot 10^{-7}$$

$$б) 259,8 \cdot 10^{-8} = 2,598 \cdot 10^{-6}$$

1.2.A08

$$a) (0,69 - 5,01) : 10,8 = -4,32 : 10,8 = -0,4; (0,008 + 0,242)(-1,6) = 0,25 \cdot (-1,6) = -0,4$$

Ответ: верно.

$$б) (0,79 - 1,81) : 10,2 = -1,02 : 10,2 = -0,1; 0,031 + 0,219)(-0,14) = 0,25 \cdot (-0,4) = -0,1.$$

Ответ: верно.

1.2.A09

$$a) \left(3\frac{5}{9} - \frac{7}{9}\right) \cdot \frac{9}{25} = \frac{25}{9} \cdot \frac{9}{25} = 1; \left(\frac{3}{5} + \frac{29}{10}\right) : 3\frac{1}{2} = \frac{35}{10} : \frac{7}{2} = 1$$

Ответ: верно.

$$6) \left(10\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{3}{29} = \frac{29}{3} \cdot \frac{3}{29} = 1; \left(\frac{4}{5} + \frac{37}{10}\right) : 4\frac{1}{2} = \frac{45}{10} : \frac{9}{2} = 1$$

Ответ: верно.

1.2.A10

$$a) \left|1 - \frac{32}{33}\right| = \frac{1}{33} < \frac{1}{32} = \left|1 - \frac{33}{32}\right|$$

$$6) \left|1 - \frac{37}{38}\right| = \frac{1}{38} < \frac{1}{37} = \left|1 - \frac{38}{37}\right|$$

Ответ: А.

Ответ: А.

Уровень В

1.2.B01

$$a) \frac{2,097 \cdot 79,02}{20,97 \cdot 7,902} = 10^{-1} \cdot 10 = 1.$$

$$6) \frac{3,654 \cdot 45,63}{0,3654 \cdot 4,563} = 10 \cdot 10 = 100.$$

1.2.B02

$$a) (0,24)^5 \cdot \left(\frac{25}{6}\right)^{-6} \cdot \left(\frac{6}{25}\right)^4 = \left(\frac{6}{25}\right)^5 \cdot \left(\frac{6}{25}\right)^6 \cdot \left(\frac{6}{25}\right)^4 = \left(\frac{6}{25}\right)^{15}.$$

$$6) (0,65)^{-7} \cdot \left(\frac{20}{13}\right)^2 \cdot \left(\frac{13}{20}\right)^4 = \left(\frac{13}{20}\right)^{-7} \cdot \left(\frac{13}{20}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{13}{20}\right)^4 = \left(\frac{13}{20}\right)^{-5}.$$

1.2.B03

$$a) 27^6 \cdot 169^9 : (5^3)^2 = (27^2 \cdot 169^3 : (5^3)^2)^3 = (3^6 \cdot 13^6 : 5^6)^3 = \left(\left(\frac{39}{5}\right)^6\right)^3 = \left(\frac{39}{5}\right)^{18}$$

$$6) 16^6 \cdot 121^{12} : (5^{12})^2 = (16^2 \cdot 121^4 : 5^8)^3 = (2^8 \cdot 11^8 : 5^8)^3 = \left(\left(\frac{22}{5}\right)^8\right)^3 = \left(\frac{22}{5}\right)^{24}$$

1.2.B04

$$a) \frac{31^{-27} \cdot 31^{28}}{31} = \frac{31^1}{31} = 31^{-1} \dots = -11.$$

$$6) \frac{38^{29} \cdot 38^{13}}{38} = \frac{38^{33}}{38} = 38^{-19} \quad 33 - \dots = -19.$$

1.2.B05

$$a) 9,1 \cdot (0,1 : (0,0001 : 100)) = 9,1 \cdot (10^{-1} : (10^{-4} : 10^2)) = 9,1 \cdot (10^{-1} \cdot 10^6) = 910000$$

$$6) 2,3 \cdot (0,001 : (0,1 : 10000)) = 2,3(10^{-3} : (10^{-1} : 10^4)) = 2,3 \cdot 10^2 = 230.$$

1.2.B06

$$a) (3 \cdot 10^{-2})^3 = 27 \cdot 10^{-6} = 0, \underbrace{000027}_6. \quad 6) (11 \cdot 10^{-3})^2 = 121 \cdot 10^{-6} = 0, \underbrace{000121}_6.$$

1.2.B07

а), б) Они равны, т.к. совпадают как числители, так и знаменатели.

1.2.B08

$$a) \frac{577}{696} < \frac{578}{696} < \frac{579}{695} \Rightarrow \frac{577}{696} < \frac{578}{695}. \quad 6) \frac{457}{772} > \frac{456}{772} > \frac{456}{773} \Rightarrow \frac{457}{772} > \frac{456}{773}.$$

1.2.B09

- а) $\frac{169}{174} < \frac{170}{173}, \frac{171}{175} < \frac{172}{174} \Rightarrow \frac{169}{174} \cdot \frac{171}{175} < \frac{170}{173} \cdot \frac{172}{174}$
- б) $\frac{271}{276} < \frac{272}{275}, \frac{273}{277} < \frac{274}{276} \Rightarrow \frac{271}{276} \cdot \frac{273}{277} < \frac{272}{275} \cdot \frac{274}{276}$

1.2.B10

- а) Нет, ведь $7 \cdot 4 = 28$ (7 и 4 – последние цифры), а значит, произведение должно оканчиваться на 8, а не 9.
- б) Нет, ведь $8 \cdot 3 = 24$, а значит, произведение должно оканчиваться на 4, а не 5.

Уровень С**1.2.C01**

- а) Не равны, т.к. 156 делится на 3, а знаменатель правой дроби не делится на 3.
- б) Не равны, т.к. 177 делится на 3, а знаменатель правой дроби не делится на 3.

1.2.C02

- а) $\frac{19}{196} \cdot \frac{14}{529} \cdot \frac{23}{361} = \frac{1}{14} \cdot \frac{1}{23} \cdot \frac{1}{19} = \frac{1}{6118}$. Верно.
- б) $\frac{19}{256} \cdot \frac{16}{625} \cdot \frac{25}{361} = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{19} = \frac{1}{7600}$. Верно.

1.2.C03

- а) У суммы последняя цифра после запятой 4 ($8^2 = 64$, $1^2 = 1$, $7^2 = 49$, $41+9 = 14$). Значит, не равны.
- б) У суммы последняя цифра 1. ($4^2 = 16$, $6^2 = 36$, $7^2 = 49$, $6+6+9 = 21$). Значит, не равны.

1.2.C04

- а) $0,3916 \cdot 0,619 < 0,4 \cdot 0,7 = 0,28 < 0,2824004$.
- б) $0,4257 \cdot 0,752 > 0,4 \cdot 0,7 = 0,28 > 0,2701264$.

1.2.C05

- а) $\frac{928}{927} = 1 + \frac{1}{927} > 1 + \frac{1}{928} = \frac{929}{928}$.
- б) $\frac{509}{508} = 1 + \frac{1}{508} > 1 + \frac{1}{509} = \frac{510}{509}$.

1.2.C06

- а) $7^{-952} = 49^{-476} > 50^{-476}$.
- б) $6^{-530} = 36^{-265} > 37^{-265}$.

1.2.C07

- а) $\frac{1}{382} \cdot \frac{1}{383} \cdot \frac{1}{384} < \frac{1}{300} \cdot \frac{1}{300} \cdot \frac{1}{300} = \frac{1}{27000000} < \frac{1}{26481504}$.
- б) $\frac{1}{497} \cdot \frac{1}{498} \cdot \frac{1}{499} < \frac{1}{400} \cdot \frac{1}{400} \cdot \frac{1}{400} = \frac{1}{64000000} < \frac{1}{63205494}$.

1.2.C08

$$a) AC = \frac{1}{65} - \frac{1}{66} = \frac{1}{65 \cdot 66}; BC = \frac{1}{66} - \frac{1}{67} = \frac{1}{66 \cdot 67}. \quad AC > BC.$$

Ответ: А.

$$b) AC = \frac{1}{52} - \frac{1}{53} = \frac{1}{52 \cdot 53}, BC = \frac{1}{53} - \frac{1}{54} = \frac{1}{53 \cdot 54}. \quad AC > BC.$$

Ответ: А.

1.2.C09

$$a) \left| \frac{861}{862} - \frac{862}{863} \right| = \frac{862}{863} - \frac{861}{862}, \text{ т.к. } \frac{862}{863} > \frac{861}{862},$$

$$\text{т.к. } \frac{862}{863} = 1 - \frac{1}{863}, \frac{861}{862} = 1 - \frac{1}{862}.$$

$$b) \left| \frac{852}{853} - \frac{853}{854} \right| = \frac{853}{854} - \frac{852}{853}, \text{ т.к. } \frac{853}{854} = 1 - \frac{1}{854} > 1 - \frac{1}{853} = \frac{852}{853}.$$

1.2.C10

$$a) \frac{152}{259} < \frac{153}{260} < \frac{154}{261}.$$

$$b) \frac{158}{267} < \frac{159}{268} < \frac{160}{269}.$$

Уровень D**1.2.D01**

$$a) 0,298^3 + 3 \cdot 0,298 \cdot 0,702 + 0,702^3 = 0,298^3 + 3 \cdot 0,298 \cdot 0,702 \cdot (0,298 + 0,702) + 0,702^3 = 0,298^3 + 3 \cdot 0,298^2 \cdot 0,702 + 3 \cdot 0,298 \cdot 0,702^2 + 0,702^3 = (0,298 + 0,702)^3 = 1^3 = 1.$$

$$b) 0,357^3 + 3 \cdot 0,357 \cdot 0,643 + 0,643^3 = 0,357^3 + 3 \cdot 0,357 \cdot 0,643 \cdot (0,357 + 0,643) + 0,643^3 = 0,357^3 + 3 \cdot 0,357^2 \cdot 0,643 + 3 \cdot 0,357 \cdot 0,643^2 + 0,643^3 = (0,357 + 0,643)^3 = 1^3 = 1.$$

1.2.D02

$$a) 0,613^3 - 0,613^2 + 0,613 \cdot 0,387 - 0,387^2 + 0,387^3 = -0,613^2 \cdot 0,387 + 0,613 \cdot 0,387 - 0,387^2 \cdot 0,613 = 0,613 \cdot 0,387 \cdot (-0,613 + 1 - 0,387) = 0$$

$$b) 0,453^3 - 0,453^2 + 0,453 \cdot 0,547 - 0,547^2 + 0,547^3 = -0,453^2 \cdot 0,547 + 0,453 \cdot 0,547 - 0,547^2 \cdot 0,453 = 0,453 \cdot 0,547 \cdot (-0,453 + 1 - 0,547) = 0$$

1.2.D03

$$a) 0,123^3 + 0,124^3 + 0,125^3 > 0,1^3 + 0,1^3 + 0,1^3 = 0,003 > 0,002856.$$

$$b) 0,131^3 + 0,132^3 + 0,133^3 > 0,1^3 + 0,1^3 + 0,1^3 = 0,003 > 0,002976.$$

1.2.D04

$$a) 0,195^3 + 0,196^3 + 0,197^3 > 0,1^3 + 0,1^3 + 0,1^3 = 0,003 > 0,0025684.$$

$$b) 0,189^3 + 0,188^3 + 0,187^3 > 0,1^3 + 0,1^3 + 0,1^3 = 0,003 > 0,0025234.$$

1.2.D05

$$a) \frac{0,943}{0,349 + \frac{1}{0,943 + \frac{1}{0,349}}} > \frac{0,943}{0,349 + \frac{1}{0,349 + \frac{1}{0,943}}} > \frac{0,349}{0,943 + \frac{1}{0,349 + \frac{1}{0,943}}}$$

$$б) \frac{0,651}{0,156 + \frac{1}{0,651 + \frac{1}{0,156}}} > \frac{0,651}{0,156 + \frac{1}{0,156 + \frac{1}{0,651}}} > \frac{0,156}{0,651 + \frac{1}{0,156 + \frac{1}{0,651}}}$$

1.2.D06

$$а) \left(\frac{0,138}{604,2} \right)^7 = \left(\frac{0,0138}{60,42} \right)^7 > \left(\frac{0,0138}{60,42} \right)^8 = \left(\frac{60,42}{0,0138} \right)^{-8}$$

$$б) \left(\frac{753,2}{0,579} \right)^{-9} = \left(\frac{75,32}{0,0579} \right)^{-9} = \left(\frac{0,0579}{75,32} \right)^9 > \left(\frac{0,0579}{75,32} \right)^{10}$$

1.2.D07

$$а) (0,349 \cdot 0,049 \cdot 0,009)^4 = (0,0349 \cdot 10 \cdot 0,0049 \cdot 10 \cdot 0,9 \cdot 10^{-2})^4 = (0,0349 \cdot 0,0049 \cdot 0,9)^4 > (0,0349 \cdot 0,0049 \cdot 0,9)^5$$

$$б) (0,169 \cdot 0,069 \cdot 0,009)^6 = (0,0169 \cdot 10 \cdot 0,0069 \cdot 10 \cdot 0,9 \cdot 10^{-2})^6 = (0,0169 \cdot 0,0069 \cdot 0,9)^6 > (0,0169 \cdot 0,0069 \cdot 0,9)^7$$

1.2.D08

$$а) \frac{1}{372} + \frac{2}{373} + \frac{3}{374} + \frac{4}{375} < \frac{1}{370} + \frac{2}{370} + \frac{3}{370} + \frac{4}{370} = \frac{10}{370} = \frac{1}{37}$$

$$б) \frac{1}{482} + \frac{2}{483} + \frac{3}{484} + \frac{4}{485} < \frac{1}{480} + \frac{2}{480} + \frac{3}{480} + \frac{4}{480} = \frac{10}{480} = \frac{1}{48}$$

1.2.D09

$$а) 3,9175 \cdot 91,753 \cdot 175,39 \cdot 7539,1 = 3917,5 \cdot 10^{-3} \cdot 917,53 \cdot 10^{-1} \cdot 17,539 \cdot 10^{-1} \cdot 7,5391 \cdot 10^3 = 3917,5 \cdot 917,53 \cdot 17,539 \cdot 7,5391. \text{ Верно.}$$

$$б) 6284,3 \cdot 284,36 \cdot 84,362 \cdot 4,3628 = 6,2843 \cdot 10^3 \cdot 28,436 \cdot 10^{-1} \cdot 843,62 \cdot 10^{-1} \cdot 4362,8 \cdot 10^{-3} = 6,2843 \cdot 28,436 \cdot 843,62 \cdot 4362,8. \text{ Верно.}$$

1.2.D10

а) Утверждения 1) и 2) противоречат друг другу: $a^{28} = (a^{14})^2$, а $6^2 = 36$, если верно 1), то последняя ненулевая цифра числа a^{28} будет 6.

Из 3) видим, что число 0,746 и только оно удовлетворяет условию 1).

Ответ: $a = 0,746$.

б) $a^{24} = (a^{12})^2$. Если верны 1) и 2), тогда 5^2 оканчивается на 4, что не верно. Выходит, что 3) – верное утверждение.

Из 3) находим, что только число 0,645 удовлетворяют одному из первых 2-х условий, а именно 1-ому.

Ответ: $a = 0,645$.

§ 3. Действия с корнями

Уровень А

1.3.A01

$$а) 12 = \sqrt{144} < \sqrt{168} < \sqrt{169} = 13; \quad б) 13 = \sqrt{169} < \sqrt{170} < \sqrt{196} = 14.$$

1.3.A02

$$\text{a) } \sqrt{65^2 - 56^2} = \sqrt{(65-56)(65+56)} = \sqrt{9 \cdot 121} = 3 \cdot 11 = 33;$$

$$\text{б) } \sqrt{58^2 - 42^2} = \sqrt{(58-42)(58+42)} = \sqrt{16 \cdot 100} = 4 \cdot 10 = 40.$$

1.3.A03

$$\text{a) } \frac{(13\sqrt{5})^2}{65} = \frac{13^2 \cdot 5}{13 \cdot 5} = 13;$$

$$\text{б) } \frac{(11\sqrt{3})^2}{33} = \frac{11^2 \cdot 3}{3 \cdot 11} = 11.$$

1.3.A04

$$\text{a) } (\sqrt{7} - 6)(6 + \sqrt{7}) = (\sqrt{7})^2 - 6^2 = 7 - 36 = -29;$$

$$\text{б) } (\sqrt{5} - 4)(4 + \sqrt{5}) = (\sqrt{5})^2 - 4^2 = 5 - 16 = -11.$$

1.3.A05

$$\text{a) } -6\sqrt{\frac{15}{17}} = -\sqrt{36} \cdot \sqrt{\frac{15}{17}} = -\sqrt{\frac{36 \cdot 15}{17}} = -\sqrt{\frac{540}{17}};$$

$$\text{б) } -7\sqrt{\frac{12}{23}} = -\sqrt{49} \cdot \sqrt{\frac{12}{23}} = -\sqrt{\frac{49 \cdot 12}{23}} = -\sqrt{\frac{588}{23}}.$$

1.3.A06

$$\text{a) } 3\sqrt{\frac{15}{13}} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{\frac{15}{13}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 15}{13}} = \sqrt{\frac{135}{13}};$$

$$\text{б) } 7\sqrt{\frac{13}{19}} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{\frac{13}{19}} = \sqrt{\frac{49 \cdot 13}{19}} = \sqrt{\frac{637}{19}}.$$

1.3.A07

$$\text{a) } \frac{\sqrt{567}}{72\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{81 \cdot 7}}{72\sqrt{7}} = \frac{9\sqrt{7}}{72\sqrt{7}} = \frac{1}{8};$$

$$\text{б) } \frac{\sqrt{448}}{40\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{64 \cdot 7}}{40\sqrt{7}} = \frac{8\sqrt{7}}{40\sqrt{7}} = \frac{1}{5}.$$

1.3.A08

$$\text{a) } \frac{1}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11}}{11};$$

$$\text{б) } \frac{1}{\sqrt{19}} = \frac{\sqrt{19}}{\sqrt{19} \cdot \sqrt{19}} = \frac{\sqrt{19}}{19}.$$

1.3.A09

$$\text{a) } \sqrt{\frac{23}{13}} \cdot \sqrt{\frac{7}{11}} = \sqrt{\frac{23 \cdot 7}{13 \cdot 11}} = \sqrt{\frac{7}{13}} \cdot \sqrt{\frac{23}{11}} - \text{дроби равны};$$

$$\text{б) } \sqrt{\frac{17}{31}} \cdot \sqrt{\frac{41}{11}} = \sqrt{\frac{17 \cdot 41}{31 \cdot 11}} = \sqrt{\frac{41}{31}} \cdot \sqrt{\frac{17}{11}} - \text{дроби равны}.$$

1.3.A10

$$\text{a) } \sqrt{308} - \sqrt{92} < \sqrt{972} - \sqrt{46}, \text{ т.к. } \sqrt{308} < \sqrt{972} \text{ и } \sqrt{92} > \sqrt{46};$$

$$б) \sqrt{668} - \sqrt{97} < \sqrt{878} - \sqrt{44}, \text{ т.к. } \sqrt{668} < \sqrt{878} \text{ и } \sqrt{97} > \sqrt{44}.$$

Уровень В

1.3.B01

$$а) \sqrt{96} + \sqrt{24} - \sqrt{216} = \sqrt{16 \cdot 6} + \sqrt{4 \cdot 6} - \sqrt{36 \cdot 6} = 4\sqrt{6} + 2\sqrt{6} - 6\sqrt{6} = 0;$$

$$б) \sqrt{63} + \sqrt{28} - \sqrt{175} = \sqrt{9 \cdot 7} + \sqrt{4 \cdot 7} - \sqrt{25 \cdot 7} = 3\sqrt{7} + 2\sqrt{7} - 5\sqrt{7} = 0.$$

1.3.B02

$$а) 6\sqrt{2} - (\sqrt{8} - (\sqrt{50} - \sqrt{162})) = 6\sqrt{2} - \sqrt{4 \cdot 2} + \sqrt{25 \cdot 2} - \sqrt{81 \cdot 2} = \\ = 6\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 9\sqrt{2} = 0;$$

$$б) 3\sqrt{2} - (\sqrt{50} - (\sqrt{32} - \sqrt{8})) = 3\sqrt{2} - \sqrt{25 \cdot 2} + \sqrt{16 \cdot 2} - \sqrt{4 \cdot 2} = \\ = 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 0.$$

1.3.B03

$$а) \sqrt{\sqrt{70} - \sqrt{6}} \cdot \sqrt{\sqrt{70} + \sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{70} - \sqrt{6})(\sqrt{70} + \sqrt{6})} = \sqrt{70 - 6} = 8;$$

$$б) \sqrt{\sqrt{26} - \sqrt{10}} \cdot \sqrt{\sqrt{26} + \sqrt{10}} = \sqrt{(\sqrt{26} - \sqrt{10})(\sqrt{26} + \sqrt{10})} = \sqrt{26 - 10} = 4.$$

1.3.B04

$$а) \frac{\sqrt{99} + \sqrt{363} - 3\sqrt{11}}{33\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{9 \cdot 11} + \sqrt{33 \cdot 11} - 3\sqrt{11}}{33\sqrt{3}} = \\ = \frac{3\sqrt{11} + \sqrt{33 \cdot 11} - 3\sqrt{11}}{\sqrt{33^2 \cdot 3}} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{33 \cdot 3}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3};$$

$$б) \frac{21\sqrt{7}}{\sqrt{147} + \sqrt{63} - 7\sqrt{3}} = \frac{21\sqrt{7}}{\sqrt{49 \cdot 3} + \sqrt{63} - 7\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{21^2 \cdot 7}}{7\sqrt{3} + \sqrt{21 \cdot 3} - 7\sqrt{3}} = \\ = \sqrt{\frac{21 \cdot 7}{3}} = \sqrt{\frac{7 \cdot 7}{1}} = 7.$$

1.3.B05

$$а) 7 \cdot 18^{\frac{1}{2}} + 4 \cdot 32^{\frac{1}{2}} - 8 \cdot 50^{\frac{1}{2}} = 7\sqrt{18} + 4\sqrt{32} - 8\sqrt{50} = \\ = 7\sqrt{9 \cdot 2} + 4\sqrt{16 \cdot 2} - 8\sqrt{25 \cdot 2} = 21\sqrt{2} + 16\sqrt{2} - 40\sqrt{2} = -3\sqrt{2};$$

$$б) 8 \cdot 147^{\frac{1}{2}} + 7 \cdot 75^{\frac{1}{2}} - 6 \cdot 12^{\frac{1}{2}} = 8\sqrt{49 \cdot 3} + 7\sqrt{25 \cdot 3} - 6\sqrt{4 \cdot 3} = \\ = 56\sqrt{3} + 35\sqrt{3} - 12\sqrt{3} = 79\sqrt{3}.$$

1.3.B06

$$а) \sqrt{4 \frac{5}{11}} - \sqrt{7 \frac{4}{11}} + \sqrt{1 \frac{5}{11}} - \sqrt{3 \frac{3}{11}} = \sqrt{\frac{49}{11}} - \sqrt{\frac{81}{11}} + \sqrt{\frac{16}{11}} - \sqrt{\frac{36}{11}} =$$

$$= \frac{7}{\sqrt{11}} - \frac{9}{\sqrt{11}} + \frac{4}{\sqrt{11}} - \frac{6}{\sqrt{11}} = -\frac{4}{\sqrt{11}};$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad & \sqrt{1\frac{17}{19}} - \sqrt{2\frac{11}{19}} + \sqrt{1\frac{6}{19}} - \sqrt{3\frac{7}{19}} = \sqrt{\frac{36}{19}} - \sqrt{\frac{49}{19}} + \sqrt{\frac{25}{19}} - \sqrt{\frac{64}{19}} = \\ & = \frac{6}{\sqrt{19}} - \frac{7}{\sqrt{19}} + \frac{5}{\sqrt{19}} - \frac{8}{\sqrt{19}} = -\frac{4}{\sqrt{19}}. \end{aligned}$$

1.3.B07

$$\text{а)} \quad \frac{\sqrt{2,8 \cdot \sqrt{4,2}}}{\sqrt{0,24}} = \frac{\sqrt{7 \cdot 0,4 \cdot 7 \cdot 0,6}}{\sqrt{0,4 \cdot 0,6}} = 7; \quad \text{б)} \quad \frac{\sqrt{1,8 \cdot \sqrt{6,3}}}{\sqrt{0,14}} = \frac{\sqrt{9 \cdot 0,2 \cdot 9 \cdot 0,7}}{\sqrt{0,2 \cdot 0,7}} = 9.$$

1.3.B08

$$\text{а)} \quad \frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{15}-3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{5}(\sqrt{3}-3)} = \frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \text{б)} \quad \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{14}-2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{7}(\sqrt{2}-2)} = \frac{1}{\sqrt{7}}.$$

1.3.B09

$$\text{а)} \quad \frac{1}{119} + \frac{1}{125} + \frac{1}{137} < \frac{1}{\sqrt{119}} + \frac{1}{\sqrt{125}} + \frac{1}{\sqrt{137}} \quad \text{т.к.} \quad \frac{1}{119} < \frac{1}{\sqrt{119}}, \quad \frac{1}{125} < \frac{1}{\sqrt{125}}, \quad \frac{1}{137} < \frac{1}{\sqrt{137}};$$

$$\text{б)} \quad \frac{1}{125} + \frac{1}{133} + \frac{1}{145} < \frac{1}{\sqrt{125}} + \frac{1}{\sqrt{133}} + \frac{1}{\sqrt{145}} \quad \text{по той же причине, что и в пункте а).}$$

1.3.B10

$$\text{а)} \quad \frac{37}{9+\sqrt{7}} = \frac{37(9-\sqrt{7})}{(9+\sqrt{7})(9-\sqrt{7})} = \frac{37(9-\sqrt{7})}{81-7} = \frac{37(9-\sqrt{7})}{74} = \frac{9-\sqrt{7}}{2};$$

$$\text{б)} \quad \frac{29}{8-\sqrt{6}} = \frac{29(8+\sqrt{6})}{(8-\sqrt{6})(8+\sqrt{6})} = \frac{29(8+\sqrt{6})}{64-6} = \frac{29(8+\sqrt{6})}{58} = \frac{8+\sqrt{6}}{2}.$$

Уровень С

1.3.C01

$$\text{а)} \quad \sqrt{67-16\sqrt{3}} = \sqrt{64-2 \cdot 8\sqrt{3}+3} = \sqrt{(8-\sqrt{3})^2} = 8-\sqrt{3};$$

$$\text{б)} \quad \sqrt{69-16\sqrt{5}} = \sqrt{64-2 \cdot 8 \cdot \sqrt{5}+5} = \sqrt{(8-\sqrt{5})^2} = 8-\sqrt{5}.$$

1.3.C02

$$\text{а)} \quad \frac{17+2\sqrt{30}}{\sqrt{15}+\sqrt{2}} = \frac{15+2 \cdot \sqrt{15} \cdot \sqrt{2}+2}{\sqrt{15}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{15}+\sqrt{2})^2}{\sqrt{15}+\sqrt{2}} = \sqrt{15}+\sqrt{2};$$

$$6) \frac{16+2\sqrt{39}}{\sqrt{13}+\sqrt{3}} = \frac{13+2\sqrt{13} \cdot \sqrt{3}+3}{\sqrt{13}+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{13}+\sqrt{3})^2}{\sqrt{13}+\sqrt{3}} = \sqrt{13}+\sqrt{3}.$$

1.3.C03

$$a) \frac{16-2\sqrt{39}}{\sqrt{13}-\sqrt{3}} = \frac{16-2\sqrt{13} \cdot \sqrt{3}+3}{\sqrt{13}-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{13}-\sqrt{3})^2}{\sqrt{13}-\sqrt{3}} = \sqrt{13}-\sqrt{3};$$

$$6) \frac{26-2\sqrt{69}}{\sqrt{23}-\sqrt{3}} = \frac{23-2\sqrt{23} \cdot \sqrt{3}+3}{\sqrt{23}-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{23}-\sqrt{3})^2}{\sqrt{23}-\sqrt{3}} = \sqrt{23}-\sqrt{3}.$$

1.3.C04

$$a) \frac{23\sqrt{23}+2\sqrt{2}}{\sqrt{23}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{23})^3 + (\sqrt{2})^3}{\sqrt{23}+\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{(\sqrt{23}+\sqrt{2})(23-\sqrt{23} \cdot \sqrt{2}+2)}{\sqrt{23}+\sqrt{2}} = 25-\sqrt{46};$$

$$6) \frac{5\sqrt{5}+3\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5})^3 + (\sqrt{3})^3}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(5-\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}+3)}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = 8-\sqrt{15}.$$

1.3.C05

$$a) \sqrt{\sqrt{55} \cdot \sqrt{275} \cdot \sqrt{605}} = \sqrt{\sqrt{(5 \cdot 11)(25 \cdot 11)(11 \cdot 11 \cdot 5)}} =$$

$$= \sqrt{25 \cdot 11 \cdot 11} = 5 \cdot 11 = 55;$$

$$6) \sqrt{\sqrt{39} \cdot \sqrt{117} \cdot \sqrt{507}} = \sqrt{\sqrt{(3 \cdot 13)(3 \cdot 3 \cdot 13)(13 \cdot 13 \cdot 3)}} =$$

$$= \sqrt{3 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 13} = 3 \cdot 13 = 39.$$

1.3.C06

$$a) (\sqrt{5}+\sqrt{7})^2 = 5+2\sqrt{7} \cdot \sqrt{5}+7 < 5+2\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}+7 = 26 = (\sqrt{26})^2$$

$$\text{т.е. } 5^{\frac{1}{2}} + 7^{\frac{1}{2}} < 26^{\frac{1}{2}};$$

$$6) (\sqrt{6}+\sqrt{11})^2 = 6+2\sqrt{6} \cdot \sqrt{11}+11 = 17+2\sqrt{66},$$

$$(\sqrt{37})^2 = 17+20 = 17+2 \cdot \sqrt{100}, \text{ т.е. } 6^{\frac{1}{2}} + 11^{\frac{1}{2}} < 37^{\frac{1}{2}}.$$

1.3.C07

$$a) \sqrt{83+18\sqrt{2}} - \sqrt{2} = \sqrt{81+2 \cdot 9\sqrt{2}+2} - \sqrt{2} = \sqrt{(9+\sqrt{2})^2} - \sqrt{2} = 9;$$

$$6) \sqrt{54-14\sqrt{5}} + \sqrt{5} = \sqrt{49-2 \cdot 7 \cdot \sqrt{5}+5} + \sqrt{5} = \sqrt{(7-\sqrt{5})^2} + \sqrt{5} = 7.$$

1.3.C08

$$\begin{aligned} \text{а) } \sqrt{1,6} - \sqrt{8,1} + \sqrt{6,4} &= \sqrt{\frac{16}{10}} - \sqrt{\frac{81}{10}} + \sqrt{\frac{64}{10}} = \frac{4}{\sqrt{10}} - \frac{9}{\sqrt{10}} + \frac{8}{\sqrt{10}} = \\ &= \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10} - \text{выражения равны.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \sqrt{8,1} - \sqrt{6,4} + \sqrt{1,6} &= \sqrt{\frac{81}{10}} - \sqrt{\frac{64}{10}} + \sqrt{\frac{16}{10}} = \frac{9}{\sqrt{10}} - \frac{8}{\sqrt{10}} + \frac{4}{\sqrt{10}} = \\ &= \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{2} - \text{выражения равны.} \end{aligned}$$

1.3.C09

а) $\sqrt{152 \cdot 155} - 132 > \sqrt{154 \cdot 151} - 134$, т.к. $\sqrt{152 \cdot 155} > \sqrt{154 \cdot 151}$ и $132 < 134$;

б) $\sqrt{216 \cdot 222} - 187 > \sqrt{221 \cdot 215} - 189$, по той же причине, что и в пункте а).

1.3.C10

а) Число 575757 делится на 19 ($30303 \cdot 19 = 575757$), а числа 9651, 6519, 5196 – нет, т.е. числа справа и слева не равны.

б) Число 518022 делится на 3, а числа 7651, 6517, 5176 – нет, т.е. числа справа и слева не равны.

Уровень D**1.3.D01**

$$\begin{aligned} \text{а) } \sqrt{19} \cdot \sqrt{19 + \sqrt{342}} \cdot \sqrt{19 + \sqrt{342 + \sqrt{342}}} \cdot \sqrt{19 - \sqrt{342 + \sqrt{342}}} &= \\ &= \sqrt{19} \cdot \sqrt{19 + \sqrt{342}} \cdot \sqrt{19^2 - (342 + \sqrt{342})} = \\ &= \sqrt{19} \cdot \sqrt{19 + \sqrt{342}} \cdot \sqrt{19 - \sqrt{342}} = \sqrt{19} \cdot \sqrt{19^2 - 342} = \sqrt{19} \cdot \sqrt{19} = 19; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \sqrt{23} \cdot \sqrt{23 + \sqrt{506}} \cdot \sqrt{23 + \sqrt{506 + \sqrt{506}}} \cdot \sqrt{23 - \sqrt{506 + \sqrt{506}}} &= \\ &= \sqrt{23} \cdot \sqrt{23 + \sqrt{506}} \cdot \sqrt{23^2 - (506 + \sqrt{506})} = \\ &= \sqrt{23} \cdot \sqrt{23 + \sqrt{506}} \cdot \sqrt{23 - \sqrt{506}} = \sqrt{23} \cdot \sqrt{23^2 - 506} = \sqrt{23} \cdot \sqrt{23} = 23. \end{aligned}$$

1.3.D02

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{38\sqrt{38} + 37\sqrt{37}}{\sqrt{38} + \sqrt{37}} - \sqrt{1406} + \frac{2\sqrt{37}}{\sqrt{38} + \sqrt{37}} + \sqrt{1\frac{13}{36}} &= \\ &= \frac{(\sqrt{38} + \sqrt{37})(38 - \sqrt{38} \cdot \sqrt{37} + 37)}{\sqrt{38} + \sqrt{37}} - \sqrt{38 \cdot 37} + 2\sqrt{37}(\sqrt{38} - \sqrt{37}) + \sqrt{\frac{49}{36}} = \\ &= 75 - \sqrt{38} \cdot \sqrt{37} - \sqrt{38} \cdot \sqrt{37} + 2\sqrt{37} \cdot \sqrt{38} - 2 \cdot 37 + \frac{7}{6} = \frac{13}{6}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad & \frac{34\sqrt{34} + 33\sqrt{33}}{\sqrt{34} + \sqrt{33}} - \sqrt{1122} + \frac{2\sqrt{33}}{\sqrt{34} + \sqrt{33}} + \sqrt{18\frac{7}{9}} = \\
 & = \frac{(\sqrt{34} + \sqrt{33})(34 - \sqrt{34} \cdot \sqrt{33} + 33)}{\sqrt{34} + \sqrt{33}} - \sqrt{34 \cdot 33} + 2\sqrt{33}(\sqrt{34} - \sqrt{33}) + \sqrt{\frac{169}{9}} = \\
 & = 34 - \sqrt{34} \cdot \sqrt{33} + 33 - \sqrt{34} \cdot \sqrt{33} + 2\sqrt{33} \cdot \sqrt{34} - 2 \cdot 33 + \frac{13}{3} = \frac{16}{3}.
 \end{aligned}$$

1.3.D03

$$\begin{aligned}
 а) \quad & (1,953^3 - 3 \cdot 1,953 \cdot 0,953 - 0,953^3)^{\frac{1}{2}} = \\
 & = ((1,953 - 0,953)(1,953^2 + 1,953 \cdot 0,953 + 0,953^2) - 3 \cdot 1,953 \cdot 0,953)^{\frac{1}{2}} = \\
 & = (1,953^2 - 2 \cdot 1,953 \cdot 0,953 + 0,953^2)^{\frac{1}{2}} = ((1,953 - 0,953)^2)^{\frac{1}{2}} = 1; \\
 6) \quad & (1,842^3 - 3 \cdot 1,842 \cdot 0,842 - 0,842^3)^{\frac{1}{2}} = \\
 & = ((1,842 - 0,842)(1,842^2 + 1,842 \cdot 0,842 + 0,842^2) - 3 \cdot 1,842 \cdot 0,842)^{\frac{1}{2}} = \\
 & = (1,842^2 - 2 \cdot 1,842 \cdot 0,842 + 0,842^2)^{\frac{1}{2}} = ((1,842 - 0,842)^2)^{\frac{1}{2}} = 1.
 \end{aligned}$$

1.3.D04

$$\begin{aligned}
 а) \quad & m + (3 + \sqrt{2})n = 3\sqrt{2}, \quad m + 3n + n\sqrt{2} = 3\sqrt{2}, \quad m + 3n = \sqrt{2}(3 - n) \\
 \Rightarrow & m + 3n = 0, \quad 3 - n = 0 \Rightarrow n = 3, \quad m = -9, \text{ одна пара } (-9; 3); \\
 \text{Ответ: } & (-9; 3). \\
 6) \quad & (2 + \sqrt{3})m - n = 2\sqrt{3}, \quad 2m - n + \sqrt{3}m = 2\sqrt{3}, \quad 2m - n = \sqrt{3}(2 - m) \\
 \Rightarrow & 2m - n = 0, \quad 2 - m = 0 \Rightarrow m = 2, \quad n = 4, \text{ одна пара } (2; 4). \\
 \text{Ответ: } & (2; 4).
 \end{aligned}$$

1.3.D05

$$\begin{aligned}
 а) \quad & (a + 3b)\sqrt{3} = (a + b + 2)\sqrt{7} \\
 \begin{cases} a + 3b = 0 \\ a + b + 2 = 0 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3b \\ -3b + b + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 1 \end{cases}, \text{ пара } (-3; 1); \\
 \text{Ответ: } & (-3; 1) \\
 6) \quad & (a + b + 4)\sqrt{5} = (3a - b)\sqrt{2} \\
 \begin{cases} a + b + 4 = 0 \\ 3a - b = 0 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} a + 3a + 4 = 0 \\ 3a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -3 \end{cases}, \text{ пара } (-1; -3). \\
 \text{Ответ: } & (-1; -3).
 \end{aligned}$$

1.3.D06

$$a) (\sqrt{19} + \sqrt{15})^2 = 19 + 2\sqrt{19 \cdot 15} + 15 = 34 + 2\sqrt{285}$$

$$(\sqrt{13} + \sqrt{21})^2 = 13 + 2\sqrt{13 \cdot 21} + 21 = 34 + 2\sqrt{273}$$

$$\text{т.е. } \sqrt{19} + \sqrt{15} > \sqrt{13} + \sqrt{21};$$

$$b) (\sqrt{17} + \sqrt{15})^2 = 17 + 2\sqrt{17 \cdot 15} + 15 = 32 + 2\sqrt{255}$$

$$(\sqrt{13} + \sqrt{19})^2 = 13 + 2\sqrt{13 \cdot 19} + 19 = 32 + 2\sqrt{247}$$

$$\text{т.е. } \sqrt{17} + \sqrt{15} > \sqrt{13} + \sqrt{19}.$$

1.3.D07

$$a) \sqrt{5680^2 - 5642^2} = \sqrt{(5680 - 5642)(5680 + 5642)} = \sqrt{38 \cdot 11322}$$

$$\sqrt{5642^2 - 5604^2} = \sqrt{(5642 - 5604)(5642 + 5604)} = \sqrt{38 \cdot 11246}$$

$$\text{т.е. } \sqrt{5680^2 - 5642^2} > \sqrt{5642^2 - 5604^2};$$

$$b) \sqrt{5676^2 - 5638^2} = \sqrt{(5676 - 5638)(5676 + 5638)} = \sqrt{38 \cdot 11314}$$

$$\sqrt{5638^2 - 5600^2} = \sqrt{(5638 - 5600)(5638 + 5600)} = \sqrt{38 \cdot 11238}$$

$$\text{т.е. } \sqrt{5676^2 - 5638^2} > \sqrt{5638^2 - 5600^2}.$$

1.3.D08

$$a) \sqrt{0,0815 \cdot 0,0015 \cdot 0,5} = \sqrt{0,815 \cdot 0,015 \cdot 0,05}$$

$$\text{тогда } 0,815 \cdot 0,015 \cdot 0,005 < \sqrt{0,815 \cdot 0,015 \cdot 0,005} = \sqrt{0,0815 \cdot 0,0015 \cdot 0,5};$$

$$b) \sqrt{0,0826 \cdot 0,0026 \cdot 0,6} = \sqrt{0,826 \cdot 0,026 \cdot 0,006}$$

$$\text{тогда } 0,826 \cdot 0,026 \cdot 0,006 < \sqrt{0,826 \cdot 0,026 \cdot 0,006} = \sqrt{0,0826 \cdot 0,0026 \cdot 0,6}.$$

1.3.D09

$$a) \sqrt{687 \cdot 689} - \sqrt{692 \cdot 690} > \sqrt{688 \cdot 686} - \sqrt{691 \cdot 693} \quad \text{т.к.}$$

$$\sqrt{687 \cdot 689} > \sqrt{688 \cdot 686} \quad \text{и} \quad \sqrt{692 \cdot 690} < \sqrt{691 \cdot 693};$$

$$b) \sqrt{865 \cdot 867} - \sqrt{864 \cdot 862} > \sqrt{866 \cdot 864} - \sqrt{863 \cdot 865} \quad \text{т.к.}$$

$$\sqrt{865 \cdot 867} > \sqrt{866 \cdot 864} \quad \text{и} \quad \sqrt{864 \cdot 862} < \sqrt{863 \cdot 865}.$$

1.3.D10

$$a) \text{т.к. } 8 < \sqrt{80} < 9, 10 < \sqrt{120} < 11, \text{ и } \sqrt{80} < \sqrt{120} < 12, \text{ то } b = 120;$$

$$b) \text{т.к. } 26 < \sqrt{728} < 27, 28 < \sqrt{840} < 29, \sqrt{278} < \sqrt{840} < 30, \text{ то } b = 840.$$

Глава 2. Буквенные выражения

§ 1. Действия с многочленами

Уровень А

2.1.A01

а) $x^{56}y^{54}-x^{55}y^{55}=x^{55}y^{54}(x-y);$

б) $x^{34}y^{32}-x^{33}y^{33}=x^{33}y^{32}(x-y).$

2.1.A02

а) $x^{79}y^{80}+x^{80}y^{79}=x^{79}y^{79}(y+x);$

б) $x^{69}y^{70}+x^{70}y^{69}=x^{69}y^{69}(y+x).$

2.1.A03

а) $10x^4y^7z^{10}-x^7y^{10}z^4=x^4y^7z^4(10z^6-x^3y^3);$

б) $25x^5y^{15}z^{25}-x^{15}y^{25}z^5=x^5y^{15}z^5(25z^{20}-x^{10}y^{10}).$

2.1.A04

а) $16ay+3(x+y)+16ax=16a(x+y)+3(x+y)=(16a+3)(x+y);$

б) $25ay-2(x+y)+25ax=25a(x+y)-2(x+y)=(25a-2)(x+y).$

2.1.A05

а) $7x-32z(x-y)-7y=7(x-y)-32z(x-y)=(7-32z)(x-y);$

б) $11x+12z(x-y)-11y=11(x-y)+12z(x-y)=(11+12z)(x-y).$

2.1.A06

а) $6a+13xb-6b-13xa=6(a-b)-13x(a-b)=(6-13x)(a-b);$

б) $5a+14xb-5b-14xa=5(a-b)-14x(a-b)=(5-14x)(a-b).$

2.1.A07

а) $4xy+3+4x+3y=4x(y+1)+3(y+1)=(y+1)(4x+3);$

б) $2xy+3+6x+y=2x(y+3)+(y+3)=(2x+1)(y+3).$

2.1.A08

а) $x^2+21yz+7xz+3xy=x(x+7z)+3y(x+7z)=(x+3y)(x+7z);$

б) $x^2+42yz+6xz+7xy=x(x+6z)+7y(x+6z)=(x+7y)(x+6z).$

2.1.A09

а) $(7p+2q)^2+(7p-2q)^2=49p^2+28pq+4q^2+49p^2-28pq+4q^2=2(49p^2+4q^2);$

б) $(4p-5q)^2+(4p+5q)^2=16p^2-40pq+25q^2+16p^2+40pq+25q^2=2(16p^2+25q^2).$

2.1.A10

а) $(3d+5c)^2-(3d-5c)^2=9d^2+30cd+25c^2-9d^2+30cd-25c^2=60cd;$

б) $(d+6c)^2-(d-6c)^2=d^2+12cd+36c^2-d^2+12cd-36c^2=24cd.$

Уровень В

2.1.B01

а) $x^2-8x+7=x^2-7x-x+7=x(x-7)-(x-7)=(x-7)(x-1);$

б) $x^2+8x+12=x^2+2x+6x+12=x(x+2)+6(x+2)=(x+6)(x+2).$

2.1.B02

а) $2m^2+5m+3=2m^2+2m+3m+3=2m(m+1)+3(m+1)=(2m+3)(m+1);$

б) $4m^2+9m+5=4m^2+4m+5m+5=4m(m+1)+5(m+1)=(4m+5)(m+1).$

2.1.B03

а) $-5x-6x^2+4=-6x^2-8x+3x+4=-2x(3x+4)+3x+4=(1-2x)(3x+4);$

б) $x-10x^2+2=-10x^2-4x+5x+2=-2x(5x+2)+5x+2=(1-2x)(5x+2).$

2.1.B04

$$a) 12ax+11by+5(x-y)-12ay-11bx = 12a(x-y)-11b(x-y)+5(x-y) = (12a-11b+5)(x-y);$$

$$b) 10ax+13by(x-y)-10ay-13bx = 10a(x-y)-13b(x-y)-7(x-y) = (10a-13b-7)(x-y).$$

2.1.B05

$$a) x^8-5x^7+6x^6 = x^6(x^2-3x-2x+6) = x^6(x(x-3)-2(x-3)) = x^6(x-2)(x-3).$$

$$b) x^6+9x^5+20x^4 = x^4(x^2+4x+5x+20) = x^4(x(x+4)+5(x+4)) = x^4(x+4)(x+5).$$

2.1.B06

$$a) p(a-3) = 8a+11, a-3 = t, a = t+3, \Rightarrow p(t) = 8(t+3)+11 = 8t+35 \Rightarrow p(a) = 8a+35;$$

Ответ: $p(a) = 8a+35$.

$$b) p(b+5) = 7b+12, b-5 = t, b = 5+t, \Rightarrow p(t) = 7(5+t)+12 = 7t+47 \Rightarrow p(b) = 7b+47.$$

Ответ: $p(b) = 7b+47$.

2.1.B07

$$a) \text{ По теореме Виета: } x_1+x_2 = -5, x_1x_2 = 2$$

$$\Rightarrow 2x_1+3x_1x_2+2x_2 = 2(x_1+x_2)+3x_1x_2 = -10+6 = -4;$$

Ответ: -4 .

$$b) \text{ По теореме Виета: } x_1+x_2 = 3, x_1x_2 = -5$$

$$\Rightarrow 3x_1+2x_1x_2+3x_2 = 3(x_1+x_2)+2x_1x_2 = 9-10 = -1.$$

Ответ: -1 .

2.1.B08

$$a) \text{ По теореме Виета: } x_1+x_2 = -5, x_1x_2 = -1$$

$$\Rightarrow x_1(4x_2+3)+x_2(4x_1+3) = 4x_1x_2+3x_1+4x_1x_2+3x_2 = 8x_1x_2+3(x_1+x_2) = -8-15 = -23;$$

Ответ: -23 .

$$b) \text{ По теореме Виета: } x_1+x_2 = 3, x_1x_2 = 1$$

$$\Rightarrow x_1(3x_2+2)+x_2(3x_1+2) = 3x_1x_2+2x_1+3x_1x_2+2x_2 = 6x_1x_2+2(x_1+x_2) = 6+6 = 12.$$

Ответ: 12 .

2.1.B09

$$a) 16a^2-24ab+9b^2-4a+3b = (\text{т.к. } a = \frac{3}{4}b) =$$

$$= 16\left(\frac{3}{4}b\right)^2 - 24 \cdot \frac{3}{4}b \cdot b + 9b^2 - 4 \cdot \frac{3}{4}b + 3b = 9b^2 - 18b^2 + 9b^2 - 3b + 3b = 0;$$

Ответ: 0 .

$$b) 9a^2+30ab+25b^2+3a+5b = (\text{т.к. } a = -\frac{5}{3}b) =$$

$$= 9\left(-\frac{5}{3}b\right)^2 + 30\left(-\frac{5}{3}b\right) \cdot b + 25b^2 + 3\left(-\frac{5}{3}b\right) + 5b = 25b^2 - 50b^2 + 25b^2 - 5b + 5b = 0.$$

Ответ: 0 .

2.1.B10

$$a) A(y) = 3y^2+4y-1, B(y) = 4y-5$$

$$A(y) \cdot B(y) = (3y^2+4y-1)(4y-5) = 12y^3+16y^2-4y-15y^2-20y+5 = 12y^3+y^2-24y+5;$$

$$6) A(y) = 5y^2 - 4y + 3, B(y) = 3y + 4$$

$$A(y) \cdot B(y) = (5y^2 - 4y + 3)(3y + 4) = 15y^3 - 12y^2 + 9y + 20y^2 - 16y + 12 = 15y^3 + 8y^2 - 7y + 12.$$

Уровень С

2.1.C01

$$a) 3x^2 - 11xy - 4y^2 = 3x^2 - 12xy + xy - 4y^2 = 3x(x - 4y) + xy(x - 4y) = (3x + y)(x - 4y);$$

$$6) 6y^2 + 11xy - 2x^2 = 6y^2 + 12xy - xy - 2x^2 = 6y(y + 2x) - x(y + 2x) = (6y - x)(y + 2x).$$

2.1.C02

$$a) a = \frac{4b-1}{5}; 25a^2 - 40ab + 16b^2 + 5a - 4b =$$

$$= 25\left(\frac{4b-1}{5}\right)^2 - 40\left(\frac{4b-1}{5}\right)b + 16b^2 + 5\left(\frac{4b-1}{5}\right) - 4b =$$

$$= 16b^2 - 8b + 1 - 32b^2 + 8b + 16b^2 + 4b - 1 - 4b = 0;$$

Ответ: 0/

$$6) a = -\frac{2b+3}{3}; 9a^2 + 12ab + 4b^2 + 9a + 6b =$$

$$= 9\left(-\frac{2b+3}{3}\right)^2 + 12\left(-\frac{2b+3}{3}\right)b + 4b^2 + 9\left(-\frac{2b+3}{3}\right) + 6b =$$

$$= 4b^2 + 12b + 9 - 8b^2 - 12b + 4b^2 - 6b - 9 + 6b = 0.$$

Ответ: 0.

2.1.C03

$$a) (x+y)^2 - 10x + 4y - 2xy + 29 = x^2 + y^2 + 2xy + 4y - 10x - 2xy + 29 =$$

$$= (x^2 - 10x + 25) + (y^2 + 4y + 4) = (x-5)^2 + (y+2)^2 = 0 \text{ при } x = -5, y = -2;$$

Ответ: $(-5; 2)$.

$$6) (x-y)^2 + 2x + 4y + 2xy + 5 = x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 4y + 2xy + 5 =$$

$$= (x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = (x+1)^2 + (y+2)^2 = 0 \text{ при } x = -1, y = -2.$$

Ответ: $(-1; -2)$.

2.1.C04

$$a) 9x^4 - 48x^3 + 64x^2 = x^2(9x^2 - 48x + 64) = x^2(3x - 8)^2 - \text{выражение не может принимать отрицательные значения, при } x = 2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}, \text{ выражение равно } 0.$$

$$6) 25x^4 - 90x^3 + 81x^2 = x^2(25x^2 - 90x + 81) = x^2(5x - 9)^2 - \text{выражение не может принимать отрицательные значения, при } x = 1\frac{4}{5} = \frac{9}{5}, \text{ выражение равно } 0.$$

2.1.C05

$$a) -17x^2 + 56xy - 49y^2 = -x^2 - (16x^2 - 56xy + 49y^2) = -x^2 - (4x - 7y)^2 - \text{выражение не может принимать положительных значений.}$$

$$6) -25x^2 + 10xy - 9y^2 = -(25x^2 - 10xy + y^2) - 8y^2 = -(5x - y)^2 - 8y^2 - \text{выражение не может принимать положительных значений.}$$

2.1.C06

$$a) (x^2 + 5x - 4)^2 = x^4 + 25x^2 + 16 + 2 \cdot 5x^3 - 2 \cdot 4x^2 - 2 \cdot 5x \cdot 4 = x^4 + 10x^3 + 17x^2 - 40x + 16;$$

$$6) (x^2 - 3x + 2)^2 = x^4 + 9x^2 + 4 + 2 \cdot 2x^2 - 2 \cdot 3x^3 - 2 \cdot 2 \cdot 3x = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4.$$

2.1.C07

а) По теореме Виета: $x_1+x_2=4$, $x_1 \cdot x_2=-2$

$$\Rightarrow x_1^2+3x_1x_2+x_2^2=(x_1+x_2)^2+x_1x_2=16-2=14;$$

Ответ: 14.

б) По теореме Виета: $x_1+x_2=6$, $x_1 \cdot x_2=-3$

$$\Rightarrow x_1^2-4x_1x_2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-6x_1x_2=36+18=54.$$

Ответ: 54.

2.1.C08

а) $4a+6b=72$; $\frac{a}{4}+\frac{b}{4}=\frac{4a+6b}{24}=\frac{72}{24}=3$;

Ответ: 3.

б) $3a-8b=48$; $\frac{a}{8}-\frac{b}{3}=\frac{3a-8b}{24}=\frac{48}{24}=2$.

Ответ: 2.

2.1.C09

а) $36w^4-61w^2+25=(36w^4-60w^2+25)-w^2=(6w^2-5)-w^2=(6w^2+w-5)(6w^2-w-5)=$
 $= (6w^2+6w-5w-5)(6w^2-6w+5w-5)=(6w-5)(w+1)(w-1)(6w+5);$

б) $25w^4-89w^2+64=25w^4-25w^2-64w^2+64=$
 $= 25w^2(w^2-1)-64(w^2-1)=(w^2-1)(25w^2-64)=(w-1)(w+1)(5w-8)(5w+8).$

2.1.C10

а) $5x^2+4xy-5y^2, y=2x-1; 5x^2+4x(2x-1)-5(2x-1)^2=5x^2+8x^2-4x-20x^2+20x-5=$
 $= -7x+16x-5=\left(-7x^2+16x-\frac{64}{7}\right)+\frac{29}{7}=-\frac{1}{7}(7x-8)^2+\frac{29}{7},$

т.е. наибольшее значение выражения $\frac{29}{7}$. Ответ: $\frac{29}{7}$

б) $x^2-4xy+y^2, x=y+3; (y+3)^2-4(y+3)y+y^2=y^2+6y+9-4y^2-12y+y^2=$
 $= -2y^2-6y+9=-\frac{1}{2}(4y^2+12y+9)+13,5=-\frac{1}{2}(2y+3)^2+\frac{27}{2},$

т.е. наибольшее значение выражения $\frac{27}{2}$. Ответ: $\frac{27}{2}$

Уровень D**2.1.D01**

а) Наименьшее значение выражения $(x-2y+1)^2+(x+2y-3)^2+5$ равно 5,

достигается при $\begin{cases} x-2y+1=0 \\ x+2-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases};$

б) Наибольшее значение выражения $7-(2x-y-1)^2-(x+y-2)^2$ равно 7,

достигается при $\begin{cases} 2x-y-1=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}.$

2.1.D02

$$\begin{aligned} \text{а) } u^2 + 3uv + 4u - 6v - 12 &= u^2 + 3uv + 6u - 2u - 6v - 12 = \\ &= u(u + 3v + 6) - 2(u + 3v + 6) = (u - 2)(u + 3v + 6); \\ \text{б) } v^2 - 2uv - 2v - 6u - 15 &= v^2 - 2uv - 5v + 3v - 6u - 15 = \\ &= v(v - 2u - 5) + 3(v - 2u - 5) = (v + 3)(v - 2u - 5). \end{aligned}$$

2.1.D03

$$\begin{aligned} \text{а) } u^2 + 4u + 4uv + 8v + 4v^2 &= (u^2 + 4uv + 4v^2) + 4(u + 2v) = \\ &= (u + 2v)^2 + 4(u + 2v) = (u + 2v)(u + 2v + 4), \text{ т.к. } u = -\frac{1}{3}x - 1, v = \frac{1}{6}x - \frac{5}{2}, \text{ то} \\ (u + 2v)(u + 2v + 4) &= \left(-\frac{1}{3}x - 1 + \frac{1}{3}x - 5\right) \left(-\frac{1}{3}x - 1 + \frac{1}{3}x - 5 + 4\right) = 12; \\ \text{б) } 9u^2 - 9u + 24uv - 12v + 16v^2 &= (9u^2 + 24uv + 16v^2) - 3(3u + 4v) = \\ &= (3u + 4v)^2 - 3(3u + 4v) = (3u + 4v)(3u + 4v - 3), \text{ т.к. } u = -\frac{2}{3}x + \frac{3}{7}, v = \frac{1}{2}x - \frac{4}{7}, \text{ то} \\ \left(-2x + \frac{9}{7} + 2x - \frac{16}{7}\right) \left(-2x + \frac{9}{7} + 2x - \frac{16}{7} - 3\right) &= 4. \end{aligned}$$

2.1.D04

а) Сумма коэффициентов $p(x)q(x)$ равна $p(1) \cdot q(1) = (3+2-4)(2+3-4-17) = -16$;
Ответ: -16.

б) Сумма коэффициентов произведения $p(x)q(x)$ равна
 $p(1) \cdot q(1) = (3-2+3)(1+3-4-16) = 4(-16) = -64$.
Ответ: -64.

2.1.D05

а) $25a + 9b + 4c = 16$; $\frac{25^2}{4^2}a + \frac{15^2}{4^2}b + \frac{5^2}{2^2}c = \frac{25}{16}(25a + 9b + 4c) = 25$;
Ответ: 25.

б) $16a + 9b + 4c = 4$; $10^2a + \frac{15^2}{2^2}b + 5^2c = \frac{25}{4}(16a^2 + 9b + 4c) = 25$.
Ответ: 25.

2.1.D06

а) $x^2 + 4xy + 11y^2 + 8x + 44y + 37 = 0$; $x^2 + 2x(2y + 4) + (11y^2 + 44y + 37) = 0$
 Уравнение имеет решение относительно x , если $D \geq 0$, т.е.
 $(2y + 4)^2 - 11y^2 - 44y - 37 \geq 0$; $4y^2 + 16y + 16 - 11y^2 - 44y - 37 \geq 0$;
 $7(y^2 - 4y + 3) \leq 0$, $7(y - 1)(y - 3) \leq 0 \Rightarrow y_{\max} = 3$;
Ответ: 3.

б) $x^2 + 4xy + 7y^2 - 8x - 28y + 25 = 0$; $x^2 + 2x(2y - 4) + (7y^2 - 28y + 25) = 0$
 Уравнение имеет решение относительно x , если $D \geq 0$, т.е.
 $(2y - 4)^2 - 7y^2 + 28y - 25 \geq 0$; $4y^2 - 16y + 16 - 7y^2 + 28y - 25 \geq 0$;
 $3(y^2 - 4y + 3) \leq 0$, $(y - 1)(y - 3) \leq 0 \Rightarrow y_{\max} = 3$.
Ответ: 3

2.1.D07

а) Заметим, что $4(2x-2y+3z)-(x+3y+3z) = 7x-11y+9z$

т.е. $7x-11y+9z = 4 \cdot 6 - (-1) = 25$.

Ответ: 25.

б) Заметим, что $7x+10y-z = 3(3x+2y-z)-2(x-2y-z) = 3(-6)-5 \cdot 2 = -28$.

Ответ: -28.

2.1.D08

а) $-6x+9y+2z = -3(x-3y)-(3x-2z) = -3+6 = 3$.

Ответ: 3.

б) $-4x+y-2z = -(2x-y)-2(x+z) = -6+6 = 0$.

Ответ: 0.

2.1.D09

а) 1) верно, если $P(x)$ либо нулевой степени, либо не ниже 3-ей, значит $P(x) = 3x^2+4x-5$.

Ответ: $P(x) = 3x^2+4x-5$.

б) 1) верно, если $P(x)$ либо нулевой степени, либо не ниже 3-ей, значит $P(x) = 2x^2+x-1$.

Ответ: $P(x) = 2x^2+x-1$.

2.1.D10

а) если $P(x) = 3x$, то верны 1), 2), 3), значит $P(x) = x^2+15x+32$;

б) если $P(x) = -5x$, то верны 1), 2), 3), значит $P(x) = x^2-8x+2$.

§ 2. Действия с алгебраическими дробями**2.2.A01**

$$\text{а) } \frac{4x^2 - x}{6x} = \frac{4x - 1}{6}.$$

$$\text{б) } \frac{x^2 + 2x}{7x} = \frac{x + 2}{7}.$$

2.2.A02

$$\text{а) } \frac{14x - 14y}{8x - 8y} = \frac{14(x - y)}{8(x - y)} = \frac{7}{4}.$$

$$\text{б) } \frac{8x - 8y}{6x - 6y} = \frac{8(x - y)}{6(x - y)} = \frac{4}{3}.$$

2.2.A03

$$\text{а) } \frac{15x^4 y^6 z^9}{5x^3 y^2 z^4} = 3xy^4 z^5;$$

$$\text{б) } \frac{54x^7 y^3 z^5}{6x^2 yz^4} = 9x^5 y^2 z.$$

2.2.A04

$$\text{а) } \frac{49x^2 - 36y^2}{6y + 7x} = \frac{(7x - 6y)(7x + 6y)}{6y + 7x} = 7x - 6y.$$

$$\text{б) } \frac{64x^2 - 25y^2}{5y + 8x} = \frac{(8x - 5y)(8x + 5y)}{8x + 5y} = 8x - 5y.$$

2.2.A05

$$\text{а) } \frac{25a^2 - 16b^2}{(4b - 5a)^2} = \frac{(5a - 4b)(5a + 4b)}{(5a - 4b)^2} = \frac{5a + 4b}{5a - 4b}.$$

$$6) \frac{9a^2 - 49b^2}{(7b + 3a)^2} = \frac{(3a - 7b)(6a + 7b)}{(3a + 7b)^2} = \frac{3a - 7b}{3a + 7b}.$$

2.2.A06

$$a) \frac{24x^{10} - 24y^{24}}{10y^{24} - 10x^{10}} = \frac{24(x^{10} - y^{24})}{-10(x^{10} - y^{24})} = -\frac{12}{5}.$$

$$6) \frac{18x^{12} - 18y^{18}}{12y^{18} - 12x^{12}} = \frac{18(x^{12} - y^{18})}{-12(x^{12} - y^{18})} = -\frac{3}{2}.$$

2.2.A07

$$a) \frac{9y - 9z}{15xz - 15xy} = \frac{9(y - z)}{-15x(y - z)} = -\frac{3}{5x}. \quad 6) \frac{6y - 6z}{16xz - 16xy} = \frac{6(y - z)}{-16x(y - z)} = -\frac{3}{8x}.$$

2.2.A08

$$a) \frac{x^5}{5y^5z^4} \cdot \frac{25y^{10}z^7}{7x^{11}} = \frac{5y^5z^3}{7x^6}. \quad 6) \frac{x^7}{7y^5z^3} \cdot \frac{21y^7z^7}{5x^{11}} = \frac{3y^2z^4}{5x^4}.$$

2.2.A09

$$a) S = \frac{5a - 3b}{7h} \Rightarrow 7hS = 5a - 3b \Rightarrow 3b = 5a - 7hs \Rightarrow \frac{5a - 7hs}{3}.$$

$$6) S = \frac{4a + 3b}{3h} \Rightarrow 3hS = 4a + 3b \Rightarrow b = \frac{3hS - 4a}{3}.$$

2.2.A10

$$a) \frac{9x}{8y} + \frac{16y - 9x}{8y} = \frac{9x + 16y - 9x}{8y} = \frac{16y}{8y} = 2.$$

$$6) \frac{2x}{3y} + \frac{9y - 2x}{3y} = \frac{2x + 9y - 2x}{3y} = \frac{9y}{3y} = 3.$$

Уровень В

2.2.B01

$$a) \frac{x^{23}y^{23} + x^9y^{55}}{x^{15}y + xy^{33}} = \frac{x^9y^{23}(x^{14} + y^{32})}{xy(x^{14} + y^{32})} = x^8y^{22}.$$

$$6) \frac{x^{20}y^{20} + x^8y^{48}}{x^{13}y + xy^{29}} = \frac{x^8y^{20}(x^{12} + y^{28})}{xy(x^{12} + y^{28})} = x^7y^{19}.$$

2.2.B02

$$a) \frac{20x^{21}y^{12} - 13x^{20}y^{13}}{20x^{17} - 13yx^{16}} = \frac{x^{20}y^{12}(20x - 13y)}{x^{16}(20x - 13y)} = x^4y^{12}.$$

$$6) \frac{23x^{24}y^5 - 5x^{23}y^6}{23x^{15} - 5yx^{14}} = \frac{x^{23}y^5(23x - 5y)}{x^{14}(23x - 5y)} = x^9y^5.$$

2.2.B03

$$\text{a) } \frac{x^3 - 125y^3}{x - 5y} = \frac{(x - 5y)(x^2 + 5xy + 25y^2)}{x - 5y} = x^2 + 5xy + 25y^2.$$

$$\text{б) } \frac{216x^3 - y^3}{6x - y} = \frac{(6x - y)(36x^2 + 6xy + y^2)}{6x - y} = 36x^2 + 6xy + y^2.$$

2.2.B04

$$\text{a) } \frac{x^3 - 64y^3}{4y - x} = \frac{(x - 4y)(x^2 + 4xy + 16y^2)}{4y - x} = -x^2 - 4xy - 16y^2.$$

$$\text{б) } \frac{27x^3 - y^3}{y - 3x} = \frac{(3x - y)(9x^2 + 3xy + y^2)}{-(3x - y)} = -9x^2 - 3xy - y^2.$$

2.2.B05

$$\text{a) } \frac{27x^3 + 8y^3}{9x^2 - 6xy + 4y^2} = \frac{(3x + 2y)(9x^2 - 6xy + 4y^2)}{9x^2 - 6xy + 4y^2} = 3x + 2y.$$

$$\text{б) } \frac{8x^3 + 125y^3}{4x^2 - 10xy + 25y^2} = \frac{(2x + 5y)(4x^2 - 10xy + 25y^2)}{4x^2 - 10xy + 25y^2} = 2x + 5y.$$

2.2.B06

$$\text{a) } \frac{6y^4x^3}{3z^4} : \frac{36y^5x^4}{21z^5} = \frac{6y^4x^3 \cdot 21z^5}{3z^4 \cdot 36y^5x^4} = \frac{7z}{6yx}.$$

$$\text{б) } \frac{5y^5x}{3z^9} : \frac{25y^6x^2}{12z^8} = \frac{5y^5x \cdot 12z^8}{3z^9 \cdot 25y^6x^2} = \frac{4}{5xyz}.$$

2.2.B07

$$\text{a) } (7x - y) \cdot \frac{7y}{49x^2 - y^2} = \frac{(7x - y) \cdot 7y}{(7x - y)(7x + y)} = \frac{7y}{7x + y}.$$

$$\text{б) } (2x + y) \cdot \frac{5y}{4x^2 - y^2} = \frac{(2x + y) \cdot 5y}{(2x - y)(2x + y)} = \frac{5y}{2x - y}.$$

2.2.B08

$$\text{a) } \frac{3x - 8}{x - y - 2} - \frac{x - 4y}{2 + y - x} = \frac{3x - 18 + x - 4y}{x - y - 2} = \frac{4x - 4y - 8}{x - y - 2} = 4.$$

$$\text{б) } \frac{2x - 21}{x - y - 3} - \frac{5x - 7y}{3 + y - x} = \frac{2x - 21 + 5x - 7y}{x - y - 3} = \frac{7(x - y - 3)}{x - y - 3} = 7$$

2.2.B09

$$\text{a) } \frac{4x}{7y + 2x} - \frac{2x - 7y}{2x + 7y} = \frac{4x - 2x + 7y}{2x + 7y} = 1.$$

$$\text{б) } \frac{3x}{7y + 4x} - \frac{11x + 14y}{4x + 7y} = \frac{3x - 11x - 14y}{4x + 7y} = \frac{-8x - 14y}{4x + 7y} = -2.$$

2.2.B10

$$a) (4x^2 - 25y^2) \left(\frac{1}{2x+5y} + \frac{1}{2x-5y} \right) = (4x^2 - 25y^2) \frac{2x-5y+2x+5y}{(2x+5)(2x-5y)} = 4x$$

$$b) (9x^2 - 16y^2) \left(\frac{1}{3x-4y} - \frac{1}{3x+4y} \right) = (9x^2 - 16y^2) \frac{3x+4y-3x+4y}{9x^2-16y^2} = 8y$$

Уровень С

2.2.C01

$$a) \left(\frac{3x^2y^5}{5z^6} \right)^5 \cdot \left(\frac{25z^5}{9x^2y^6} \right)^3 = \frac{3^5 x^{10} y^{25} \cdot 5^6 \cdot z^{15}}{5^5 \cdot z^{30} \cdot 3^6 x^6 y^{18}} = \frac{5x^4y^7}{3z^{15}}.$$

$$b) \left(\frac{4xy^4}{5z^5} \right)^5 \cdot \left(\frac{25z^4}{16xy^5} \right)^3 = \frac{2^{10} x^5 y^{20} \cdot 5^6 \cdot z^{12}}{5^5 z^{25} \cdot 2^{12} \cdot x^3 y^{15}} = \frac{5x^2y^5}{4z^{13}}.$$

2.2.C02

$$a) (6y-x) : \left(\frac{1}{x-2y} + \frac{1}{x-3y} - \frac{x+y}{x^2-5xy+6y^2} \right) =$$

$$= (6y-x) : \frac{x-3y+x-2y-x-y}{(x-2y)(x-3y)} = (6y-x) : \frac{x-6y}{(x-2y)(x-3y)} =$$

$$= -(x-2y)(x-3y) = -x^2+5xy-6y^2.$$

$$b) (2x-3y) : \left(\frac{1}{2x+y} - \frac{1}{3x-y} + \frac{x-y}{6x^2+xy-y^2} \right) =$$

$$= (2x-3y) : \frac{3x-y-2x-y+x-y}{6x^2+xy-y^2} = (2x-6y) : \frac{2x-3y}{6x^2+xy-y^2} =$$

$$= 6x^2+xy-y^2.$$

2.2.C03

$$a) (25x^2y - 40xy^2 + 16y^3) \cdot \frac{2}{25x^2y - 16y^3} = \frac{2y(5x-4y)^2}{y(5x-4y)(5x+4y)} = \frac{2(5x-4y)}{5x+4y}$$

$$b) (4x^2y - 28xy^2 + 49y^3) \cdot \frac{3}{4x^2y - 49y^3} = \frac{3y(2x-7y)^2}{y(2x-7y)(2x+7y)} = \frac{3y(2x-7y)}{2x+7y}$$

2.2.C04

$$a) \frac{4x^2 - y^2 + 14y - 49}{2x - y + 7} = \frac{4x^2 - (y-7)^2}{2x - y + 7} = \frac{(2x - y + 7)(2x + y - 7)}{2x - y + 7} =$$

$$= 2x + y - 7.$$

$$b) \frac{36x^2 - y^2 - 12y - 36}{6x + y + 6} = \frac{36x^2 - (y+6)^2}{6x + y + 6} = \frac{(6x - y - 6)(6x + y + 6)}{6x + y + 6} =$$

$$= 6x - y - 6.$$

2.2.C05

$$a) \frac{10y^2 + 9y - 9}{6y^2 + 11y + 3} = \frac{10y^2 + 15y - 6y - 9}{6y^2 + 9y + 2y + 3} = \frac{(2y+3)(5y-3)}{(2y+3)(3y+1)} = \frac{5y-3}{3y+1}.$$

$$b) \frac{9y^2 - 6y - 8}{6y^2 - 5y - 4} = \frac{9y^2 - 12y + 6y - 8}{6y^2 - 8y + 3y - 4} = \frac{(3y-4)(3y+2)}{(3y-4)(2y+1)} = \frac{3y+2}{2y+1}.$$

2.2.C06

$$a) \frac{2x^2 + xy - 6y^2}{3y - 2x} = \frac{2x^2 - 3xy + 4xy - 6y^2}{3y - 2x} = \frac{(2x-3y)(x+2y)}{3y-2x} = -x-2y.$$

$$b) \frac{3y^2 + 2xy - 8x^2}{4x - 3y} = \frac{3y^2 + 6xy - 4xy - 8x^2}{4x - 3y} = \frac{(y+2x)(3y-4x)}{4x-3y} = -2x-y.$$

2.2.C07

$$a) \frac{7a+5b}{a} = 8, \frac{5b}{a} = 1, \frac{a}{b} = 5, \frac{5a+7b}{b} = 5\frac{a}{b} + 7 = 25 + 7 = 32.$$

Ответ: 32.

$$b) \frac{5a+3b}{a} = 6, 5 + 3\frac{b}{a} = 6, 3\frac{b}{a} = 1, \frac{a}{b} = 3, \frac{3a+5b}{b} = 3\frac{a}{b} + 5 = 3 \cdot 3 + 5 = 14.$$

Ответ: 14.

2.2.C08

a) Числитель увеличится в 2 раза, а знаменатель в 4 раза, значит дробь уменьшится в 2 раза.

Ответ: 7.

b) Числитель увеличится в 9 раз, а знаменатель в 3 раза, значит дробь увеличится в 3 раза.

Ответ: 15.

2.2.C09

$$a) 2a^2 + 3ab - 20b^2 = 0; 2a^2 + 8ab - 5ab - 20b^2 = (a+4b)(2a-5b) = 0$$

$$a = -4b \text{ или } 2a = 5b, \text{ т.е. } \frac{b}{a} = -\frac{1}{4}, \text{ или } \frac{b}{a} = \frac{2}{5}.$$

$$\text{Ответ: } -\frac{1}{4} \text{ или } \frac{2}{5}.$$

$$b) 4b^2 - 13ab + 3a^2 = 4b^2 - 12ab - ab + 3a^2 = (b-3a)(4b-a) = 0$$

$$b = 3a \text{ или } 4b = a, \text{ т.е. } \frac{a}{b} = \frac{1}{3} \text{ или } \frac{a}{b} = 4.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{3} \text{ или } 4.$$

2.2.C10

$$a) \frac{10x^2 - 13xy + 3y^2}{2x^2 - 3y^2} - 4 = 0; \frac{10x^2 - 13xy + 3y^2 - 8x^2 + 12y^2}{2x^2 - 3y^2} = 0$$

$$\frac{2x^2 - 13xy + 15y^2}{2x^2 - 3y^2} = 0; \frac{2x^2 - 3xy - 10xy + 15y^2}{2x^2 - 3y^2} = \frac{(2x - 3y)(x - 5y)}{2x^2 - 3y^2} = 0$$

$$2x = 3y, x = 5y. \frac{x}{y} = 1,5 \text{ или } \frac{x}{y} = 5.$$

Ответ: 1,5; 5.

$$б) \frac{9x^2 - 8xy - 3y^2}{2x^2 - 3y^2} - 2 = 0; \frac{5x^2 - 8xy + 3y^2}{2x^2 - 3y^2} = 0; \frac{5x^2 - 5xy - 3xy + 3y^2}{2x^2 - 3y^2} = 0;$$

$$\frac{(x - y)(5x - 3y)}{2x^2 - 3y^2} = 0; x = y, 5x = 3y. \frac{x}{y} = 1 \text{ или } \frac{x}{y} = \frac{3}{5}.$$

Ответ: 1; $\frac{3}{5}$.

Уровень D

2.2.D01

$$а) z^3 + \frac{1}{z^3} = \left(z + \frac{1}{z}\right) \left(z^2 - 1 + \frac{1}{z^2}\right) = -3 \cdot \left(z^2 + 2 \cdot z \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - 3\right) =$$

$$= -3 \left(\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 3 \right) = -3(9 - 3) = -18.$$

Ответ: -18.

$$б) z^3 - \frac{64}{z^3} = \left(z - \frac{4}{z}\right) \left(z^2 - 4 + \frac{16}{z^2}\right) = -2 \left(z^2 - 8 + \frac{16}{z^2} + 4\right) =$$

$$= -2 \left(\left(z - \frac{4}{z}\right)^2 + 4 \right) = -2 \cdot (4 + 4) = -16.$$

Ответ: -16

2.2.D02

$$а) \frac{12n + 70}{4n + 11} = 3 + \frac{37}{4n + 11}$$

Надо, чтобы 37 делилось на $4n + 11$ (37 — простое число). $4n + 11 = 1$ — нет целых корней, $4n + 11 = 37$ — тоже, $4n + 11 = -37$, $n = -12$, $4n + 11 = -1$, $n = -3$.

Ответ: -3; -12.

$$б) \frac{15n + 58}{5n + 9} = 3 + \frac{31}{5n + 9} \quad 31:5n + 9 \quad (31 — простое число). 5n + 9 = 1 — нет целых корней $5n + 9 = 31$ — тоже, $5n + 9 = -1$, $n = -2$, $5n + 9 = -31$, $n = -8$.$$

Ответ: -2; -8.

2.2.D03

а) По теореме Виета $a + b = -5$, $ab = -4$.

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 25 + 8 = 33.$$

$$\frac{b}{a^2+2ab} + \frac{a}{b^2+2ab} = \frac{b}{a^2-8} + \frac{a}{b^2-8} = \frac{b^3-8b+a^3-8a}{a^2b^2-8(a^2+b^2)+64} =$$

$$= \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)-8(a+b)}{16-8 \cdot 33+64} = \frac{-5(33+4-8)}{184} = \frac{-5 \cdot 29}{-184} = \frac{145}{184}.$$

Ответ: $\frac{145}{184}$.

б) По теореме Виета $a+b=-3$, $ab=-5$. $a^2b^2=(a+b)^2-2ab=9+10=19$

$$\frac{b}{a^2+4ab} + \frac{a}{b^2+4ab} = \frac{b}{a^2-20} + \frac{a}{b^2-20} = \frac{b^3-20b+a^3-20a}{a^2b^2-20(a^2+b^2)+400} =$$

$$= \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)-20(a+b)}{25-20 \cdot 19+400} = \frac{-3(19+5-20)}{45} = -\frac{12}{45} = -\frac{4}{15}.$$

Ответ: $-\frac{4}{15}$.

2.2.D04

$$\text{а) } \frac{7x-y}{6x+5y} = \frac{6x+5y}{7x-y} \Leftrightarrow \frac{(7x-y)^2 - (6x+5y)^2}{(6x+5y)(7x-y)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-6y)(13x+4y)}{(6x+5y)(7x-y)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=6y \\ 13x=-4y \end{cases}; xy < 0 \Rightarrow \frac{x}{y} = -\frac{4}{13}.$$

Ответ: $-\frac{4}{13}$.

$$\text{б) } \frac{5x-3y}{3x+5y} = \frac{3x+5y}{5x-3y} \Leftrightarrow \frac{(5x-3y)^2 - (3x+5y)^2}{(3x+5y)(5x-3y)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x-8y)(8x+2y)}{(3x+5y)(5x-3y)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=4y \\ 4x=-y \end{cases}; xy < 0 \Rightarrow \frac{x}{y} = -\frac{1}{4}.$$

Ответ: $-\frac{1}{4}$.

2.2.D05

$$\text{а) } \frac{3a^2-18a-10}{4a^2-24a-3} = \frac{3P(a)-4}{4P(a)+5} = \frac{-4}{5} = -0,8. \text{ Ответ: } -0,8.$$

$$\text{б) } \frac{3a^3-12a-8}{4a^3-16a-11} = \frac{3P(a)-2}{4P(a)-3} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}. \text{ Ответ: } \frac{2}{3}.$$

2.2.D06

$$\text{а) } \frac{3a^3+5a^2+1}{2a^2+7a+2} = \frac{P(a)+6a^2+21a+6}{2a^2+7a+2} = \frac{3(2a^2+7a+2)}{2a^2+7a+2} = 3. \text{ Ответ: } 3.$$

$$\text{б) } \frac{2a^3+7a^2+3}{3a^2+5a+4} = \frac{P(a)+12a^2+20a+16}{3a^2+5a+4} = \frac{4(3a^2+5a+4)}{3a^2+5a+4} = 4. \text{ Ответ: } 4.$$

2.2.D07

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{14n+15}{19n+20} - \text{сократима} &\Rightarrow \frac{19n+20}{14n+15} = \frac{14n+15+5n+5}{14n+15} - \text{сократима} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{5n+5}{14n+15} - \text{сократима} \Leftrightarrow \frac{14n+15}{5n+5} = 3 - \frac{n}{5n+5} - \text{сократима.} \end{aligned}$$

НОД ($n, 5n+5$) равен либо 1, либо 5.

Ответ: 5.

$$\begin{aligned} \text{б) } \frac{13n+14}{20n+21} - \text{сократима} &\Leftrightarrow \frac{20n+21}{13n+14} = \frac{13n+14+7n+7}{13n+14} - \text{сократима} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{7n+7}{13n+14} - \text{сократима} \Leftrightarrow \frac{13n+14}{7n+7} = \frac{14n+14-n}{7n+7} - \text{сократима} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{n}{7n+7} - \text{сократима. НОД } (n, 7n+7) \text{ равен либо 1, либо 7.} \end{aligned}$$

Ответ: 7.

2.2.D08

а) Оно достигается при наименьшем значении знаменателя

$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 3x \\ x + 3x - 4 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}; \frac{12}{0+0+4} = 3.$$

Ответ: 3 при $(x, y) = (1; 3)$.

б) Оно достигается при наименьшем значении знаменателя

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 2x \\ -x + 1 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}; \frac{18}{0+0+6} = 3$$

Ответ: 3 при $(x, y) = (1; 2)$.

2.2.D09

$$\text{а) } \frac{6}{0+3} + \frac{4}{0+2} = 2+2=4. \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases} \begin{cases} y = x + 3 \\ 2x - 2 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

Ответ: 4 при $(x, y) = (1; 4)$.

$$\text{б) } \frac{3}{0+3} + \frac{8}{0+4} = 1+2=3. \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + y - 6 = 0 \end{cases} \begin{cases} y = x + 2 \\ 2x - 4 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

Ответ: 3 при $(x, y) = (2; 4)$.

2.2.D10

а) Рассмотрим утверждение 3):

$$\min \left(23 - \frac{16}{(x-12)^2 + 4} \right) = 23 - \frac{16}{0+4} = 19$$

$$\max \left(5 + \frac{16}{(x-12)^2 + 4} \right) = 25 - \frac{16}{0+4} = 9$$

Случай, когда 3) – не верно невозможен, т.к. $17 > 9$. Значит 1) – ложно

б) Рассмотрим 3):

$$\min\left(11 - \frac{9}{(x-2)^2 + 3}\right) = 11 - \frac{9}{3} = 8$$

$$\max\left(-3 + \frac{9}{(x-2)^2 + 3}\right) = -3 + \frac{9}{0+3} = 0$$

Одно из 1) и 2) точно не верно, т.к. $0 < 6$. Это 1).

§ 3. Действия с иррациональными выражениями

Уровень А

2.3.A01

$$a) \frac{a\sqrt{35}}{\sqrt{5a}} = \sqrt{7a};$$

$$б) \frac{a\sqrt{21}}{\sqrt{7a}} = \sqrt{3a}.$$

2.3.A02

$$a) \frac{b\sqrt{38}}{\sqrt{-19b}} = -\sqrt{-2b};$$

$$б) \frac{b\sqrt{33}}{\sqrt{-11b}} = -\sqrt{-3b}.$$

2.3.A03

$$a) \frac{\sqrt{91ab}}{\sqrt{13a}} = \sqrt{7b};$$

$$б) \frac{\sqrt{42ab}}{\sqrt{14a}} = \sqrt{3b}.$$

2.3.A04

$$a) \frac{\sqrt{70ab}}{\sqrt{-7a}} = \sqrt{-10b};$$

$$б) \frac{\sqrt{15ab}}{\sqrt{-5a}} = \sqrt{-3b}.$$

2.3.A05

$$a) \frac{x-49}{\sqrt{x}-7} = \frac{(\sqrt{x}-7)(\sqrt{x}+7)}{\sqrt{x}-7} = \sqrt{x}+7;$$

$$б) \frac{x-25}{\sqrt{x}+5} = \frac{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)}{\sqrt{x}+5} = \sqrt{x}-5.$$

2.3.A06

$$a) \frac{225-x}{\sqrt{x}-15} = -\frac{(\sqrt{x}-15)(\sqrt{x}+15)}{\sqrt{x}-15} = -\sqrt{x}-15;$$

$$б) \frac{x-144}{12-\sqrt{x}} = -\frac{(\sqrt{x}-12)(\sqrt{x}+12)}{\sqrt{x}-12} = -\sqrt{x}-12.$$

2.3.A07

$$a) \frac{\sqrt{(x+1)(y+5)}}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{y+5};$$

$$б) \frac{\sqrt{(x-3)(y-4)}}{\sqrt{x-3}} = \sqrt{y-4}.$$

2.3.A08

$$a) \frac{\sqrt{49a^2 - 36}}{\sqrt{7a - 6}} = \frac{\sqrt{(7a - 6)(7a + 6)}}{\sqrt{7a - 6}} = \sqrt{7a + 6};$$

$$b) \frac{\sqrt{25a^2 - 16}}{\sqrt{5a - 4}} = \frac{\sqrt{(5a - 4)(5a + 4)}}{\sqrt{5a - 4}} = \sqrt{5a + 4}.$$

2.3.A09

$$a) \frac{8\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x}} + \frac{3\sqrt{x}}{x} = \frac{8\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x}} = 8;$$

$$b) \frac{4\sqrt{x} - 7}{\sqrt{x}} + \frac{7\sqrt{x}}{x} = \frac{4\sqrt{x} - 7}{\sqrt{x}} + \frac{7}{\sqrt{x}} = 4.$$

2.3.A10

$$a) (\sqrt{x} + 3\sqrt{y})^2 - 6\sqrt{xy} = x + 6\sqrt{x}\sqrt{y} + 9y - 6\sqrt{xy} = x + 9y;$$

$$b) (2\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + 4\sqrt{xy} = 4x - 4\sqrt{x}\sqrt{y} + y + 4\sqrt{xy} = 4x + y.$$

Уровень В**2.3.B01**

$$a) z = \frac{5\sqrt{u+v}}{2w-1} \Rightarrow u+v = \frac{z^2(2w-1)^2}{25} \Rightarrow u = \frac{z^2(2w-1)^2}{25} - v;$$

$$b) z = \frac{3\sqrt{u-v}}{5w-3} \Rightarrow u-v = \frac{z^2(5w-3)^2}{9} \Rightarrow v = u - \frac{z^2(5w-3)^2}{9}.$$

2.3.B02

$$a) \frac{36a^2 - 25b}{6a + 5\sqrt{b}} = \frac{(6a - 5\sqrt{b})(6a + 5\sqrt{b})}{6a + 5\sqrt{b}} = 6a - 5\sqrt{b};$$

$$b) \frac{49a^2 - 16b}{7a + 4\sqrt{b}} = \frac{(7a - 4\sqrt{b})(7a + 4\sqrt{b})}{7a + 4\sqrt{b}} = 7a - 4\sqrt{b}.$$

2.3.B03

$$a) \frac{\sqrt{(x+3)(y+5)}}{\sqrt{-3-x}} = \sqrt{-y-5};$$

$$b) \frac{\sqrt{(x+5)(y+4)}}{\sqrt{-5-x}} = \sqrt{-y-4}.$$

2.3.B04

$$a) \frac{\sqrt{16a^2 - 81}}{\sqrt{9 - 4a}} = \frac{\sqrt{(4a - 9)(4a + 9)}}{\sqrt{9 - 4a}} = \sqrt{-4a - 9};$$

$$b) \frac{\sqrt{64a^2 - 9}}{\sqrt{3 - 8a}} = \frac{\sqrt{(8a - 3)(8a + 3)}}{\sqrt{3 - 8a}} = \sqrt{-8a - 3}.$$

2.3.B05

$$a) \frac{36+x}{6-\sqrt{-x}} = \frac{(6+\sqrt{-x})(6-\sqrt{-x})}{6-\sqrt{-x}} = 6+\sqrt{-x}, \text{ т.к. } x \leq 0;$$

$$б) \frac{64+x}{8-\sqrt{-x}} = \frac{(8+\sqrt{-x})(8-\sqrt{-x})}{8-\sqrt{-x}} = 8+\sqrt{-x}, \text{ т.к. } x \leq 0.$$

2.3.B06

$$a) \frac{x+121}{\sqrt{-x}+11} = \frac{-(\sqrt{-x}+11)(\sqrt{-x}-11)}{\sqrt{-x}+11} = -\sqrt{-x}+11, \text{ т.к. } x \leq 0.$$

$$б) \frac{x+169}{\sqrt{-x}+13} = \frac{(13-\sqrt{-x})(13+\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}+13} = 13-\sqrt{-x}, \text{ т.к. } x \leq 0.$$

2.3.B07

$$a) x + \sqrt{(x-11)^2} = x + 11 - x = 11, \text{ т.к. } x < 11;$$

$$б) x - \sqrt{(12-x)^2} = x - (x-12) = 12, \text{ т.к. } x > 12.$$

2.3.B08

$$a) \frac{34\sqrt{x} - x\sqrt{34}}{\sqrt{x} - \sqrt{34}} = \frac{-\sqrt{34}x(\sqrt{x} - \sqrt{34})}{\sqrt{x} - \sqrt{34}} = -\sqrt{34}x;$$

$$б) \frac{46\sqrt{x} - x\sqrt{46}}{\sqrt{x} - \sqrt{46}} = \frac{-\sqrt{46}x(\sqrt{x} - \sqrt{46})}{\sqrt{x} - \sqrt{46}} = -\sqrt{46}x.$$

2.3.B09

$$a) \frac{x+6\sqrt{x}-16}{\sqrt{x}+8} + 2 = \frac{x+6\sqrt{x}-16+2\sqrt{x}+16}{\sqrt{x}+8} = \sqrt{x};$$

$$б) \frac{x-6\sqrt{x}-7}{\sqrt{x}+1} + 7 = \frac{x-6\sqrt{x}-7+7\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}.$$

2.3.B10

$$a) \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} - \frac{x-25}{\sqrt{x}-5} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} - \frac{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)}{\sqrt{x}-5} =$$

$$= \sqrt{x}+1 - \sqrt{x}-5 = -4;$$

$$б) \frac{x-16}{\sqrt{x}-4} - \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} = \frac{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)}{\sqrt{x}-4} - \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}-3} =$$

$$= \sqrt{x}+4 - \sqrt{x}-3 = 1.$$

Уровень С

2.3.C01

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & 2\sqrt{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-5} + \frac{1}{\sqrt{x}+5}\right) - \frac{100}{x-25} = \\ & \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+5+\sqrt{x}-5)}{x-25} - \frac{100}{x-25} = \frac{4x-100}{x-25} = 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad & 3\sqrt{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-4} + \frac{1}{\sqrt{x}+4}\right) - \frac{96}{x-16} = \\ & = \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}+4+\sqrt{x}-4)}{x-16} - \frac{96}{x-16} = \frac{6x-96}{x-16} = 6. \end{aligned}$$

2.3.C02

$$\text{a)} \quad (x-16y) : \left(\frac{4\sqrt{xy}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{y}} \right) + 4\sqrt{y} = \frac{(\sqrt{x}-4\sqrt{y})(\sqrt{x}+4\sqrt{y})}{(4\sqrt{y}+\sqrt{x})} + 4\sqrt{y} = \sqrt{x};$$

$$\text{б)} \quad (9x-y) : \left(\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}} + \frac{3\sqrt{xy}}{\sqrt{y}} \right) - 3\sqrt{x} = \frac{(3\sqrt{x}-\sqrt{y})(3\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(3\sqrt{x}+\sqrt{y})} - 3\sqrt{x} = -\sqrt{y}.$$

2.3.C03

$$\text{a)} \quad \frac{3\sqrt{x^2y} - x\sqrt{25y}}{\sqrt{64x^4y^3}} = \frac{3\sqrt{x^2y} + 5\sqrt{x^2y}}{\sqrt{64x^4y^3}} = \frac{1}{\sqrt{x^2y^2}} = -\frac{1}{xy}, x < 0;$$

$$\text{б)} \quad \frac{4\sqrt{x^2y} + x\sqrt{9y}}{\sqrt{x^4y^3}} = \frac{4\sqrt{x^2y} - 3\sqrt{x^2y}}{\sqrt{x^4y^3}} = \frac{1}{\sqrt{x^2y^2}} = -\frac{1}{xy}, x < 0.$$

2.3.C04

$$\text{a)} \quad 3 \leq x \leq 5; \sqrt{(2-x)^2} + \sqrt{(6-x)^2} = x-2+6-x=4;$$

$$\text{б)} \quad 5 \leq x \leq 9; \sqrt{(4-x)^2} - \sqrt{(10-x)^2} = x-4+10-x=6.$$

2.3.C05

$$\text{a)} \quad \frac{36x-1}{36x-12\sqrt{x}+1} - \frac{2}{6\sqrt{x}-1} = \frac{(6\sqrt{x}-1)(6\sqrt{x}+1)}{(6\sqrt{x}-1)^2} - \frac{2}{6\sqrt{x}-1} = \frac{6\sqrt{x}+1-2}{6\sqrt{x}-1} = 1;$$

$$\text{б)} \quad \frac{x-9}{x-6\sqrt{x}+9} - \frac{6}{\sqrt{x}-3} = \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)^2} - \frac{6}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}+3-6}{\sqrt{x}-3} = 1$$

2.3.C06

$$\text{а) } (5a + 2\sqrt{15ab} + 6b)(5a - 2\sqrt{15ab} + 6b) = (5a + 6b)^2 - (2\sqrt{15ab})^2 = \\ = 25a^2 + 36b^2 + 60ab - 60ab = 25a^2 + 36b^2;$$

$$\text{б) } (2a - 2\sqrt{7ab} + 7b)(2a + 2\sqrt{7ab} + 7b) = (2a + 7b)^2 - (2\sqrt{7ab})^2 = \\ = 4a^2 + 28ab + 49b^2 - 28ab = 4a^2 + 49b^2.$$

2.3.C07

$$\text{а) } \sqrt{b-30} = 2 \Rightarrow b = 34 \Rightarrow \sqrt{b+30} = \sqrt{64} = 8;$$

$$\text{б) } \sqrt{b-28} = 5 \Rightarrow b = 53 \Rightarrow \sqrt{b+28} = \sqrt{81} = 9.$$

2.3.C08

$$\text{а) } b + c + \sqrt{c^2 - b^2} = 5 \text{ — периметр.}$$

$$\frac{(\sqrt{b+c} + \sqrt{c-b})^2}{2} + b = \frac{b+c+c-b+2\sqrt{(b+c)(c-b)}}{2} + b = \\ = b+c + \sqrt{(b+c)(c-b)} = b+c + \sqrt{c^2 - b^2} = 5;$$

Ответ: 5.

$$\text{б) } \frac{(\sqrt{c-b} + \sqrt{c+b})^2}{2} + b = \frac{c-b+c+b+2\sqrt{(c-b)(c+b)}}{2} + b = \\ = b+c + \sqrt{c^2 - b^2} = 11 \text{ — т.к. это периметр.}$$

Ответ: 11.

2.3.C09

$$\text{а) } \min(\sqrt{x^2+9} + \sqrt{y^2+81}) = \min(\sqrt{x^2+9}) + \min(\sqrt{y^2+81}) = 3+9 = 12;$$

Ответ: 12.

$$\text{б) } \min(\sqrt{x^2+16} + \sqrt{y^2+25}) = \min(\sqrt{x^2+16}) + \min(\sqrt{y^2+25}) = 4+5 = 9.$$

Ответ: 9.

2.3.C10

$$\text{а) значение } 12 - \sqrt{x^2 + y^2 + 121} \text{ максимально, когда } \sqrt{x^2 + y^2 + 121} \text{ —} \\ \text{минимальное, т.е. } 11 \Rightarrow \max(12 - \sqrt{x^2 + y^2 + 121}) = 12 - 11 = 1;$$

Ответ: 1.

$$\text{б) } \min(\sqrt{x^2 + y^2 + 144} - 13) = \min(\sqrt{x^2 + y^2 + 144}) - 13 = 12 - 13 = -1$$

Ответ: -1.

Уровень D

2.3.D01

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \left(\frac{x\sqrt{x}-8}{x-3\sqrt{x}+2} - \frac{6\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) = \\
 & = \left(\frac{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} - \frac{6\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right) \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} \right) = \frac{x+2\sqrt{x}+4-6\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} = \\
 & = \frac{x-4\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-2} = \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{\sqrt{x}-2} = \sqrt{x}-2; \\
 \text{б)} \quad & \left(\frac{x\sqrt{x}+1}{x-\sqrt{x}-2} + \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \right) : \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) = \\
 & = \left(\frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} + \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-2+3}{3(\sqrt{x}-2)} \right) = \\
 & = \frac{x-\sqrt{x}+1+3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{3(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}+1} = \frac{3(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}+1} = 3(\sqrt{x}+1).
 \end{aligned}$$

2.3.D02

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \left(\frac{4x\sqrt{y}}{4\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{y\sqrt{x}}{4\sqrt{x}-\sqrt{y}} \right) \cdot \frac{16x-y}{\sqrt{xy^3}+16\sqrt{x^3y}} = \\
 & = \sqrt{xy} \left(\frac{4\sqrt{x}(4\sqrt{x}-\sqrt{y})+\sqrt{y}(4\sqrt{x}+\sqrt{y})}{16x-y} \right) \cdot \frac{16x-y}{\sqrt{xy}(y+16x)} = \\
 & = \frac{16x-4\sqrt{xy}+4\sqrt{xy}+y}{16x+y} = 1; \\
 \text{б)} \quad & \left(\frac{3x\sqrt{y}}{3\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{y\sqrt{x}}{3\sqrt{x}+\sqrt{y}} \right) \cdot \frac{9x-y}{\sqrt{xy^3}+9\sqrt{x^3y}} = \\
 & = \sqrt{xy} \left(\frac{3\sqrt{x}(3\sqrt{x}+\sqrt{y})-\sqrt{y}(3\sqrt{x}-\sqrt{y})}{9x-y} \right) \cdot \frac{9x-y}{\sqrt{xy}(y+9x)} = \\
 & = \frac{9x+3\sqrt{xy}-3\sqrt{xy}+y}{y+9x} = 1.
 \end{aligned}$$

2.3.D03

$$\text{a) } x \geq 0, \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+1} = \sqrt{(x+1)-2\sqrt{x+1}+1} - \sqrt{x+1} = \\ = \sqrt{(\sqrt{x+1}-1)^2} - \sqrt{x+1} = \sqrt{x+1} - 1 - \sqrt{x+1} = -1;$$

$$\text{б) } x \geq 5, \sqrt{x-4} - \sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}} = \sqrt{x-4} - \sqrt{(x-4)-2\sqrt{x-4}+1} = \\ = \sqrt{x-4} - \sqrt{(\sqrt{x-4}-1)^2} = \sqrt{x-4} - \sqrt{x-4} + 1 = 1.$$

2.3.D04

$$\text{a) } \sqrt{2a+5b+4c} = 2$$

$$\sqrt{18a+45b+36c} = \sqrt{9(2a+5b+4c)} = 3\sqrt{2a+5b+4c} = 6.$$

Ответ: 6.

$$\text{б) } \sqrt{7a+6b+4c} = 5$$

$$\sqrt{28a+24b+16c} = \sqrt{4(7a+6b+4c)} = 2\sqrt{7a+6b+4c} = 10.$$

Ответ: 10.

2.3.D05

$$\text{a) } \frac{3a+2b}{2a+3b} = \frac{8}{7} \Rightarrow 21a+14b = 16a+24b \Rightarrow 5a = 10b \Rightarrow a = 2b$$

$$\sqrt{\frac{3a-2b}{2a-3b}} = \sqrt{\frac{6b-2b}{4b-3b}} = \sqrt{\frac{4b}{b}} = 2;$$

Ответ: 2.

$$\text{б) } \frac{2a-3b}{a+2b} = \frac{3}{5} \Rightarrow 10a-15b = 3a+6b \Rightarrow 7a = 21b \Rightarrow a = 3b$$

$$\sqrt{\frac{2a+3b}{a-2b}} = \sqrt{\frac{6b+3b}{3b-2b}} = \sqrt{\frac{9b}{b}} = 3.$$

Ответ: 3.

2.3.D06

$$\text{a) Наименьшее значение } 1 + 2\sqrt{x-y+1} + 3\sqrt{x-4y+3} \text{ равно } 1,$$

$$\text{достигается при } \begin{cases} x-y+1=0 \\ x-4y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{2}{3} \\ x=-\frac{1}{3} \end{cases};$$

$$\text{б) Наибольшее значение } 3 - 2\sqrt{x+y-1} - \sqrt{4x+y-3} \text{ равно } 3,$$

$$\text{достигается при } \begin{cases} x+y-1=0 \\ 4x+y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=\frac{1}{3} \end{cases}.$$

2.3.D07

а) Наименьшее значение $\sqrt{x^2 - 6xy + 9y^2 + 4} + |x + 2y - 10| =$
 $= \sqrt{(x - 3y)^2 + 4} + |x + 2y - 10|$ равно 2, достигается при

$$\begin{cases} x = 3y \\ x + 2y - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases};$$

б) Наименьшее значение $\sqrt{4x^2 - 4xy + y^2 + 9} + |2x + y - 8| =$
 $= \sqrt{(2x - y)^2 + 9} + |2x + y - 8|$ равно 3, достигается при

$$\begin{cases} 2x = y \\ 2x + y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}.$$

2.3.D08

а) $(y - 3)\sqrt{\frac{x - 16}{y - 3}} = -\sqrt{(x - 16)(y - 3)} \Rightarrow y - 3 < 0 \Rightarrow x - 16 < 0 \Rightarrow x < 17;$

Ответ: $x < 17$.

б) $(x - 5)\sqrt{\frac{14 - y}{5 - x}} = -\sqrt{(14 - y)(5 - x)} \Rightarrow x - 5 < 0, 5 - x > 0 \Rightarrow 14 - y > 0 \Rightarrow y < 15.$

Ответ: $y < 15$.

2.3.D09

а) Расстояние $AC = a - \sqrt{a^2 - 36} = \frac{36}{a + \sqrt{a^2 - 36}};$

$BC = \sqrt{a^2 + 36} - a = \frac{36}{a + \sqrt{a^2 + 36}} \Rightarrow AC > BC$, т.е. B ближе к C , $a > 6$;

б) $AC = a - \sqrt{a^2 - 25} = \frac{25}{a + \sqrt{a^2 - 25}}$

$BC = \sqrt{a^2 + 25} - a = \frac{25}{a + \sqrt{a^2 + 25}} \Rightarrow AC > BC$, т.е. B ближе к C , $a > 5$;

2.3.D10

а) Несложно видеть, что истинны 1), 2) а 3) ложно, т.е. $x < 4$.

б) Несложно видеть, что истинны 1), 2) а 3) ложно, т.е. $x < 5$.

Глава 3. Уравнения

§ 1. Целые алгебраические уравнения

Уровень А

3.1.A01

а) $\frac{3}{4}x = 3\frac{3}{4}$; $\frac{3}{4}x = \frac{15}{4}$; $x = 5$;

Ответ: 5.

б) $\frac{2}{9}x = 4\frac{2}{9}$; $\frac{2}{9}x = \frac{38}{9}$; $x = 19$.

Ответ: 19.

3.1.A02

а) $9+4x = 10x-9$; $6x = 18$; $x = 3$;

Ответ: 3.

б) $8+5x = 9x-8$; $4x = 16$; $x = 4$.

Ответ: 4.

3.1.A03

а) $2x^2-7x = 0$; $x(2x-7) = 0$, $x = 0$ или $2x-7 = 0$, т.е. $x = 3,5$;

Ответ: 3,5.

б) $5x^2-3x = 0$; $x(5x-3) = 0$, $x = 0$ или $5x-3 = 0$, т.е. $x = \frac{3}{5}$.

Ответ: $\frac{3}{5}$.

3.1.A04

а) $\frac{3x^2+5x+2}{3} = \frac{5x^2+2x+3}{5}$, $15x^2+25x+10 = 15x^2+6x+9$, $19x = -1$,

$x = -\frac{1}{19}$; Ответ: $x = -\frac{1}{19}$.

б) $\frac{4x^2+7x+3}{4} = \frac{7x^2+3x+4}{7}$, $28x^2+49x+21 = 28x^2+12x+16$, $37x = -5$,

$x = -\frac{5}{37}$. Ответ: $x = -\frac{5}{37}$.

3.1.A05

а) $64,25x^2 = \frac{257}{4} = 0$; $\frac{257}{4}x^2 = \frac{257}{4}$; $x^2 = 1$, $x = \pm 1$.

Ответ: -1; 1.

б) $7,54x^2 - \frac{377}{50} = 0$; $\frac{377}{50}x^2 = \frac{377}{50}$; $x^2 = 1$, $x = \pm 1$.

Ответ: -1; 1.

3.1.A06

а) $3x^2 + x\sqrt{17} = 0$, $x(3x + \sqrt{17}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x + \sqrt{17} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{\sqrt{17}}{3} \end{cases}$;

Ответ: 0; $-\frac{\sqrt{17}}{3}$

$$6) 11x^2 + x\sqrt{19} = 0, x(11x + \sqrt{19}) = 0, \begin{cases} x = 0 \\ 11x + \sqrt{19} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{\sqrt{19}}{11} \end{cases}.$$

Ответ: 0; $-\frac{\sqrt{19}}{11}$

3.1.A07

a) $x^2 - 3x - 4 = 0$; $D = 9 + 16 = 25 = 5^2$; $x_1 = \frac{3+5}{2} = 4$, $x_2 = \frac{3-5}{2} = -1$;

Ответ: 4; -1.

б) $x^2 - 5x - 6 = 0$; $D = 25 + 24 = 49 = 7^2$; $x_1 = \frac{5+7}{2} = 6$, $x_2 = \frac{5-7}{2} = -1$.

Ответ: 6; -1.

3.1.A08

a) $x^2 - 10x + 25 = 0$, $(x-5)^2 = 0$, $x = 5$;

Ответ: 5.

б) $x^2 - 14x + 49 = 0$, $(x-7)^2 = 0$, $x = 7$.

Ответ: 7.

3.1.A09

a) $21x^2 - 4x - 1 = 0$; $\frac{D}{4} = 4 + 21 = 25 = 5^2$; $x_1 = \frac{2+5}{21} = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2-5}{21} = -\frac{1}{7}$;

Ответ: $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{7}$.

б) $24x^2 - 2x - 1 = 0$; $\frac{D}{4} = 1 + 24 = 25 = 5^2$; $x_1 = \frac{1+5}{24} = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1-5}{24} = -\frac{1}{6}$.

Ответ: $\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{6}$.

3.1.A10

a) $(x-3)^2 = 16$, $\begin{cases} x-3=4 \\ x-3=-4 \end{cases}$, $\begin{cases} x=7 \\ x=-1 \end{cases}$;

Ответ: 7; -1.

б) $(x-4)^2 = 9$, $\begin{cases} x-4=3 \\ x-4=-3 \end{cases}$, $\begin{cases} x=7 \\ x=1 \end{cases}$.

Ответ: 7; 1.

Уровень В

3.1.B01

a) $27x^2 - 6\sqrt{3}x + 1 = 0$, $(3\sqrt{3}x - 1)^2 = 0$, $3\sqrt{3}x = 1$, $x = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$;

б) $3x^2 + 2\sqrt{51}x + 17 = 0$, $(\sqrt{3}x + \sqrt{17})^2 = 0$, $\sqrt{3}x + \sqrt{17} = 0$, $x = -\sqrt{\frac{17}{3}}$.

3.1.B02

a) $\frac{(x+\sqrt{6})^2}{6} + \frac{1-\sqrt{6}x}{3} = \frac{4}{3}$; $x^2 + 2\sqrt{6}x + 6 + 2 - 2\sqrt{6}x - 8 = 0$, $x^2 = 0$, $x = 0$;

$$6) \frac{(x+\sqrt{3})^2}{4} + \frac{1-\sqrt{3}x}{2} = \frac{5}{4}; x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 + 2 - 2\sqrt{3}x - 5 = 0, x^2 = 0, x = 0.$$

3.1.B03

$$a) \frac{15-9x}{5} - \frac{3-x}{2} = -\frac{4x}{5} + \frac{x-3}{9};$$

$$x\left(-\frac{9}{5} + \frac{1}{2} + \frac{4}{5} - \frac{1}{9}\right) = -\frac{3}{9} - \frac{15}{5} + \frac{3}{2} - \frac{11}{18}x = -\frac{11}{6}, x = 3;$$

Омвем: 3.

$$6) \frac{8-5x}{3} - \frac{2-x}{2} = -\frac{x}{3} - \frac{4(x-2)}{5}$$

$$x\left(-\frac{5}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{4}{5}\right) = -\frac{8}{3} + 1 + \frac{8}{5} - \frac{1}{30}x = -\frac{1}{15}, x = 2.$$

Омвем: 2.

3.1.B04

$$a) x\sqrt{2} + x\sqrt{18} + 4\sqrt{2} = x\sqrt{50} + \sqrt{8}$$

$$x\sqrt{2} + 3x\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 5x\sqrt{2} + 2\sqrt{2}, x\sqrt{2} = 2\sqrt{2}, x = 2;$$

Омвем: 2

$$6) x\sqrt{2} + x\sqrt{72} + 3\sqrt{2} = x\sqrt{128} + \sqrt{98}$$

$$x\sqrt{2} + 6x\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 8x\sqrt{2} + 7\sqrt{2}, x\sqrt{2} = -4\sqrt{2}, x = -4.$$

Омвем: - 4

3.1.B05

$$a) (3x-2)(x-1) = 4(x-1)^2, (x-1)(3x-2-4(x-1)) = 0, (x-1)(2-x) = 0, \begin{cases} x=1; \\ x=2 \end{cases};$$

Омвем: 1; 2.

$$6) (2x-1)(x-2) = 5(x-2)^2, (x-2)(5(x-2)-2x+1) = 0, (x-2)(3x-9) = 0, \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}.$$

Омвем: 2; 3.

3.1.B06

$$a) (4x^2-3x)^3 = (3x)^3, 4x^2-3x = 3x, 2x(2x-3) = 0, \begin{cases} x=0 \\ 2x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{3}{2} \end{cases};$$

Омвем: 0, $\frac{3}{2}$

$$6) (3x^2-2x)^3 = (2x)^3, 3x^2-2x = 2x, x(3x-4) = 0, \begin{cases} x=0 \\ 3x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{4}{3} \end{cases}.$$

Омвем: 0; $\frac{4}{3}$.

3.1.B07

а) $(5x-2)^2 + (5x+2)^2 = 2(5x-3)^2$, $25x^2 - 20x + 4 + 25x^2 + 20x + 4 = 50x^2 - 60x + 18$,
 $60x = 10$, $x = \frac{1}{6}$. Ответ: $\frac{1}{6}$.

б) $(7x-3)^2 + (7x+3)^2 = 2(7x-4)^2$, $49x^2 - 42x + 9 + 49x^2 + 42x + 9 = 98x^2 - 112x + 32$,
 $112x = 14$, $x = \frac{1}{8}$. Ответ: $\frac{1}{8}$.

3.1.B08

а) $(x-0,5)^2 = (x+0,04)^2$, $\begin{cases} x-0,5 = x+0,04 \\ x-0,5 = -x-0,04 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{решений нет} \\ 2x = 0,46 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0,23$;

Ответ: 0,23.

б) $(x+0,06)^2 = (x-0,2)^2$, $\begin{cases} x+0,06 = x-0,2 \\ x+0,06 = -x+0,2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{решений нет} \\ 2x = 0,14 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0,07$.

Ответ: 0,07.

3.1.B09

а) $4x^4 + 3x^2 - 1 = 0$, $t = x^2 \geq 0$; $4t^2 + 3t - 1 = 0$; $D = 9 + 16 = 25 = 5^2$
 $t_1 = \frac{-3+5}{8} = \frac{1}{4}$, $t_2 = \frac{-3-5}{8} = -1$ — не подходит $\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4}$, $x = \pm \frac{1}{2}$;

Ответ: $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.

б) $9x^4 + 8x^2 - 1 = 0$, $t = x^2 \geq 0$; $9t^2 + 8t - 1 = 0$; $D = 64 + 36 = 100 = 10^2$
 $t_1 = \frac{-8+10}{18} = \frac{1}{9}$, $t_2 = \frac{-8-10}{18} = -1$ — не подходит $\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{9}$, $x = \pm \frac{1}{3}$.

Ответ: $-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$.

3.1.B10

а) $|x^2 - 10| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 10 = 6 \\ x^2 - 10 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 16 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 4 \\ x = \pm 2 \end{cases}$. Ответ: -4, -2, 2, 4.

б) $|x^2 - 17| = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 17 = 8 \\ x^2 - 17 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 25 \\ x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 5 \\ x = \pm 3 \end{cases}$. Ответ: -5, -3, 3, 5.

Уровень С**3.1.C01**

а) $|5x-4| = |8-5x| \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-4 = 8-5x \\ 5x-4 = 5x-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x = 12 \\ \text{решений нет} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1,2$;

Ответ: 1,2.

б) $|7x+5| = |3-7x| \Leftrightarrow \begin{cases} 7x+5 = 3-7x \\ 7x+5 = 7x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x = -2 \\ \text{решений нет} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{7}$.

Ответ: $-\frac{1}{7}$.

3.1.C02

$$a) (x^2+10x+16)^2+(x^2+11x+24)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+10x+16=0 \\ x^2+11x+24=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x+8)=0 \\ (x+3)(x+8)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-8 \\ x=-2 \\ x=-3 \\ x=-8 \end{cases} \Leftrightarrow x=-8;$$

Ответ: -8.

$$б) (x^2+6x-72)^2+(x^2+15x+36)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+6x-72=0 \\ x^2+15x+36=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+12)(x-6)=0 \\ (x+12)(x+3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ x=-12 \\ x=-12 \\ x=-3 \end{cases} \Leftrightarrow x=-12.$$

Ответ: -12.

3.1.C03

$$a) (x^2+27x-57)^2=(x^2-3x+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+27x-57=x^2-3x+1 \\ x^2+27x-57=-x^2+3x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30x-58=0 \\ 2x^2+24x-56=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{29}{15} \\ 2(x+14)(x-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{29}{15} \\ x=2 \\ x=-14 \end{cases}.$$

Ответ: -14, 2, $\frac{29}{15}$.

$$б) (x^2-12x+20)^2=(x^2+2x-12)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-12x+20=x^2+2x-12 \\ x^2-12x+20=-x^2-2x+12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x=32 \\ 2x^2-10x+8=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{16}{7} \\ 2(x-1)(x-4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{16}{7} \\ x=1 \\ x=4 \end{cases}.$$

Ответ: 1, 4, $\frac{16}{7}$.

3.1.C04

$$a) (3x+7)^3 = (2x)^6, 3x+7 = 4x^2, 4x^2-3x-7 = 0, D = 9+112 = 121,$$

$$x_1 = \frac{3+11}{8} = \frac{7}{4}, x_2 = \frac{3-11}{8} = -1.$$

$$\text{Omseem: } \frac{7}{4}, -1.$$

$$b) (5x+4)^3 = (3x)^6, 5x+4 = 9x^2, 9x^2-5x-4 = 0, D = 25+144 = 169,$$

$$x_1 = \frac{5+13}{18} = 1, x_2 = \frac{5-13}{18} = -\frac{4}{9}.$$

$$\text{Omseem: } 1, -\frac{4}{9}.$$

3.1.C05

$$a) (x-2)^3 + (x-4)^3 = 2(x-3)^3; ((x-2)+(x-4))((x-2)^2 + (x-4)^2 - (x-2)(x-4)) = 2(x-3)^3;$$

$$2(x-3)((x-2)^2 + (x-4)^2 - (x-3)^2 - (x-2)(x-4)) = 0;$$

$$2(x-3)(x^2-4x+4+x^2-8x+16-x^2+6x-9-x^2+6x-8) = 0; 2(x-3) \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

$$\text{Omseem: } 3.$$

$$b) (x-3)^3 + (x-5)^3 = 2(x-4)^3; ((x-3)+(x-5))((x-3)^2 + (x-5)^2 - (x-3)(x-5)) = 2(x-4)^3;$$

$$2(x-4)((x-3)^2 + (x-5)^2 - (x-3)(x-5) - (x-4)^2) = 0;$$

$$2(x-4)(x^2-6x+9+x^2-10x+25-x^2+8x-15-x^2+8x-16) = 0; 2(x-4) \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

$$\text{Omseem: } 4.$$

3.1.C06

$$a) (x+2)^3 = x^3-3x-1, x^3+6x^2+12x+8 = x^3-3x-1, 6x^2+15x+9 = 0, 2x^2+5x+3 = 0,$$

$$D = 25-24 = 1, x_1 = \frac{-5+1}{4} = -1, x_2 = \frac{-5-1}{4} = -\frac{3}{2};$$

$$\text{Omseem: } -1, -\frac{3}{2}.$$

$$b) (x-2)^3 = x^3+2x-4, x^3-6x^2+12x-8 = x^3+2x-4, 6x^2-10x+4 = 0, 3x^2-5x+2 = 0,$$

$$D = 25-24 = 1, x_1 = \frac{5+1}{6} = 1, x_2 = \frac{5-1}{6} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Omseem: } 1, \frac{2}{3}.$$

3.1.C07

$$a) (3x+y-4)^2 + (x+y-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y-4=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases};$$

$$\text{Omseem: } (1, 1).$$

$$b) (x-2y+1)^2 + (2x+y-3)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+1=0 \\ 2x+y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}.$$

$$\text{Omseem: } (1, 1).$$

3.1.C08

а) $|5x^2-3x-2| = -5x^2+3x+2$. Заметим, что $-(5x^2-3x-2) = -5x^2+3x+2$, т.е. равенство верно, когда $5x^2-3x-2 \leq 0$. Решим уравнение $5x^2-3x-2 = 0$, $D =$

$$9+40 = 49, x_1 = \frac{3+7}{10} = 1, x_2 = \frac{3-7}{10} = -\frac{2}{5}, \text{ тогда решение исходного}$$

$$\text{уравнения: } x \in \left[-\frac{2}{5}, 1\right]. \text{ Ответ: } \left[-\frac{2}{5}, 1\right].$$

б) $|4x^2-x-3| = -4x^2+x+3$, аналогично рассуждениям пункта а) решим уравнение $4x^2-x-3 = 0$, $D = 1+48 = 49$, $x_1 = \frac{1+7}{8} = 1$, $x_2 = \frac{1-7}{8} = -\frac{3}{4}$, тогда

$$\text{решение исходного уравнения будет } x \in \left[-\frac{3}{4}, 1\right]. \text{ Ответ: } \left[-\frac{3}{4}, 1\right].$$

3.1.C09

$$\text{а) } (x-4)(x-3)^3 = (x-3)(x-4)^3; (x-4)(x-3)((x-3)^2-(x-4)^2) = 0;$$

$$(x-4)(x-3)(x^2-6x+9-x^2+8-16) = 0, (x-4)(x-3)(2x-7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{7}{2} \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } 3, 4, \frac{7}{2}.$$

$$\text{б) } (x+4)(x+5)^3 = (x+5)(x+4)^3; (x+4)(x+5)((x+5)^2-(x+4)^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -5 \\ (x+5)^2 = (x+4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -5 \\ x+5 = x+4 \\ x+5 = -x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -\frac{9}{2} \\ x = -5 \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } -5, -4, -\frac{9}{2}.$$

3.1.C10

$$\text{а) } (x^2-x)^2-14(x^2-x)+24 = 0, t = x^2-x, t^2-14t+24 = 0, \frac{D}{4} = 49-24 = 25,$$

$$t_1 = 7+5 = 12, x^2-x-12 = 0, D = 1+48 = 49, x_1 = \frac{1+7}{2} = 4, x_2 = \frac{1-7}{2} = -3,$$

$$t_2 = 7-5 = 2, x^2-x-2 = 0, D = 1+8 = 9, x_3 = \frac{1+3}{2} = 2, x_4 = \frac{1-3}{2} = -1.$$

$$\text{Ответ: } -3, -1, 5, 4.$$

$$6) (x^2+x)^2-8(x^2+x)+12=0, t=x^2+x, t^2-8t+12=0, \frac{D}{4}=16-12=4,$$

$$t_1=4+2=6, x^2+x-6=0, D=1+24=25, x_1=\frac{-1+5}{2}=2, x_2=\frac{-1-5}{2}=-3,$$

$$t_2=4-2=2, t^2+t-2=0, D=1+8=9, x_3=\frac{-1+3}{2}=1, x_4=\frac{-1-3}{2}=-2.$$

Ответ: -3, -2, 1, 2.

Уровень D

3.1.D01

$$a) (2x-3)^7+(2x-1)^{14}=0, (2x-3)^7=-(2x-1)^{14}, 2x-3=-(2x-1)^2$$

$$4x^2-4x+1+2x-3=0, 4x^2-2x-2=0, 2x-x-1=0$$

$$D=1+8=9, x_1=\frac{1+3}{4}=1, x_2=\frac{1-3}{4}=-\frac{1}{2}$$

Ответ: 1; $-\frac{1}{2}$.

$$6) (2x+5)^{18}+(2x+3)^9=0, (2x+5)^{18}=-(2x+3)^9$$

$$(2x+5)^2=-2x-3, 4x^2+20x+25+2x+3=0, 4x^2+22x+28=0$$

$$2x^2+11x+14=0, D=121-112=9, x_1=\frac{-11+3}{4}=-2, x_2=\frac{-11-3}{4}=-\frac{7}{2}$$

Ответ: -2; $-\frac{7}{2}$.

3.1.D02

$$a) 2x^4-x^2(x+2)-(x+2)^2=0; 2x^4-2x^2(x+2)+x^2(x+2)-(x+2)^2=0;$$

$$2x^2(x^2-x-2)+(x+2)(x^2-x-2)=0; (2x^2+x+2)(x^2-x-2)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+x+2=0 \\ x^2-x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D < 0, \text{решений нет} \\ (x-2)(x+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-1 \end{cases}$$

Ответ: 2; -1.

$$6) 3x^4+2x^2(x-2)-(x-2)^2=0; 3x^4+3x^2(x-2)-x^2(x-2)-(x-2)^2=0;$$

$$3x^2(x^2+x-2)-(x-2)(x^2+x-2)=0; (3x^2-x+2)(x^2+x-2)=0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3x^2-x+2=0 \\ x^2+x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Решений нет, т.к. } D < 0 \\ (x+2)(x-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=1 \end{cases}$$

Ответ: -2; 1.

3.1.D03

$$a) |2x-1|+|3x+2|=6$$

Промежутки знакопостоянства: $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right], \left[-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right]$ и $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

$$1) x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right], 1-2x-3x-2=6, 5x=-7, x=-\frac{7}{5};$$

$$2) x \in \left[-\frac{2}{3}; \frac{1}{2}\right], 1-2x+3x+2=6, x=3 - \text{ не подходит}$$

$$3) x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right), 2x-1+3x+2=6, 5x=5, x=1$$

Ответ: $-\frac{7}{5}; 1$.

$$6) |2x+5|-|3x-1|=5$$

Промежутки знакопостоянства: $\left(-\infty; -\frac{5}{2}\right], \left[-\frac{5}{2}, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

$$1) x \in \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right], -2x-5+3x-1=5, x=11 - \text{ не подходит}$$

$$2) x \in \left[-\frac{5}{2}, \frac{1}{3}\right], 2x+5+3x-1=5, 5x=1, x=\frac{1}{5}$$

$$3) x \in \left[\frac{1}{3}, +\infty\right), 2x+5-3x+1=5, x=1.$$

Ответ: $\frac{1}{5}; 1$.

3.1.D04

$$\begin{aligned} a) (x^2-4x-12)^2+(x^2+4x-12)^2 &= 2(x^2-4)(x^2-36) \\ ((x^2-12)-4x)^2+((x^2-12)+4x)^2 &= 2(x^2-4)(x^2-36) \\ (x^2-12)^2-8x(x^2-12)+16x^2+(x^2-12)^2+8x(x^2-12)+16x^2 &= 2(x^2-4)(x^2-36) \\ (x^2-12)^2+16x^2 &= (x^2-4)(x^2-36) \\ x^4-24x^2+144+16x^2 &= x^4-40x^2+144; x^2=0 \Leftrightarrow x=0 \end{aligned}$$

Ответ: 0.

$$\begin{aligned} 6) (x^2-2x-15)^2+(x^2+2x-15)^2 &= 2(x^2-9)(x^2-25) \\ ((x^2-15)-2x)^2+((x^2-15)+2x)^2 &= 2(x^2-9)(x^2-25) \\ (x^2-15)^2-4x(x^2-15)+4x^2+(x^2-15)^2+4x(x^2-15)+4x^2 &= 2(x^2-9)(x^2-25) \\ (x^2-15)^2+4x^2 &= (x^2-9)(x^2-25) \\ x^4-30x^2+225+4x^2 &= x^4-34x^2+225, x^2=0 \Leftrightarrow x=0 \end{aligned}$$

Ответ: 0.

3.1.D05

$$a) |5x^2-7x+3|=2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ \begin{cases} 5x^2-7x+3=2x-1 \\ 5x^2-7x+3=1-2x \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 5x^2 - 9x + 4 = 0, D = 81 - 80, x_1 = \frac{9+1}{10} = 1, x_2 = \frac{9-1}{10} = \frac{4}{5} \\ 5x^2 - 5x + 2 = 0, D = 25 - 40 < 0 - \text{решений нет} \end{cases}$$

Ответ: $1; \frac{4}{5}$.

$$6) |8x^2 - 10x + 3| = 2 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ 8x^2 - 10x + 3 = 2 - x \Leftrightarrow \\ 8x^2 - 10x + 3 = x - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ 8x^2 - 9x + 1 = 0, D = 81 - 32 = 49, x_1 = \frac{9+7}{16} = 1, x_2 = \frac{9-7}{16} = \frac{1}{8} \\ 8x^2 - 11x + 5 = 0, D = 121 - 160 < 0 - \text{решений нет} \end{cases}$$

Ответ: $1; \frac{1}{8}$.

3.1.D06

а) $|x^2 - 4| + |x^2 - 9| = 2x^2 - 13$

Промежутки знакопостоянства: $[-2; 2]; [-3; -2] \cup [2; 3]; (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$

1) $x \in [-2; 2], 4 - x^2 + 9 - x^2 = 2x^2 - 13 \Leftrightarrow x^2 = \frac{13}{2} > 4$ — не подходит.

2) $x \in [-3; -2] \cup [2; 3] \Rightarrow x^2 - 4 + 9 - x^2 = 2x^2 - 13 \Rightarrow 2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

3) $x \in (-\infty; -3] \cup [3; +\infty), x^2 - 4 + x^2 - 9 = 2x^2 - 13, 0 = 0$

Ответ: $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.

б) $|x^2 - 1| + |x^2 - 16| = 2x^2 - 17$

Промежутки знакопостоянства: $[-1; 1]; [-4; -1] \cup [1; 4]; (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$

1) $x \in [-1; 1], 1 - x^2 + 16 - x^2 = 2x^2 - 17, x^2 = \frac{17}{2} > 1$ не подходит.

2) $x \in [-4; -1] \cup [1; 4], x^2 - 1 + 16 - x^2 = 2x^2 - 17, x^2 = 16, x = \pm 4$.

3) $x \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty), x^2 - 1 + x^2 - 16 = 2x^2 - 17, 0 = 0$

Ответ: $(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$.

3.1.D07

а) $|x^2 - 7y + 6| + (x + 2y - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7y + 6 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 7x - 9 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \quad (D = 49 + 72 = 121,$$

$$x_1 = \frac{-7+11}{4} = 1, x_2 = \frac{-7+11}{4} = -\frac{9}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ x=-\frac{9}{2} \\ y=\frac{15}{4} \end{cases}$$

Ответ: (1; 1); $(-\frac{9}{2}; \frac{15}{4})$.

$$6) |x^2-5y+4|+(x-3y+2)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y+2=0 \\ x^2-5y+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y+2=0 \\ 3x^2-5x+2=0 \end{cases}$$

$$(D=25-24=1, x_1=\frac{5+1}{6}=1, x_2=\frac{5-1}{6}=\frac{2}{3}) \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ x=\frac{2}{3} \\ y=\frac{8}{9} \end{cases}$$

Ответ: (1; 1); $(\frac{2}{3}; \frac{8}{9})$.

3.1.D08

$$a) 4x+6xy-9y=11, 2x(2+3y)-3(3y+2)=5, (2x-3)(3y+2)=5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3=1 \\ 3y+2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3=-1 \\ 3y+2=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{нет решений, т.к.} \\ y \text{ не целое} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3=5 \\ 3y+2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{нет решений, т.к.} \\ y \text{ не целое} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3=-5 \\ 3y+2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$$

Ответ: (2; 1), (-1; -1).

$$6) 3x+6xy-10y=12, 3x(1+2y)-5(2y+1)=7, (3x-5)(2y+1)=7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-5=1 \\ 2y+1=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-5=-1 \\ 2y+1=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{нет решений, т.к.} \\ x \text{ не целое} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-5=-7 \\ 2y+1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{нет решений, т.к.} \\ x \text{ не целое} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-5=7 \\ 2y+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases}$$

Ответ: (2; 3), (4; 0).

3.1.D09

а) $(2x-y)^2 + 27(3x-y)^2 = 25$

Т.к. x и y – целые, то при $(3x-y) \neq 0$; $27(3x-y)^2 > 25$, и $(2x-y)^2 \geq 0$,

тогда
$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 2x - y = \pm 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5, y = 15 \\ x = -5, y = -15 \end{cases}$$

Ответ: (5; 15), (-5; -15).

б) $(2x+y)^2 + 18(x+y)^2 = 16$

Т.к. x и y целые, то при $(x+y) \neq 0$, $18(x+y)^2 > 16$ и $(2x-y)^2 \geq 0$,

тогда
$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + y = \pm 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4, y = -4 \\ x = -4, y = 4 \end{cases}$$

Ответ: (4; -4), (-4; 4).

3.1.D10

а) $3(x-1)^2 + 4(y+2)^2 = 7$, т.к. x и y – целые, то $3(x-1)^2$ – принимает значения 0, 3, 12, 27, а $4(y+2)^2$ – 0, 4, 16 (и большие). Тогда сумма может быть равна 7, только если $3(x-1)^2 = 3$ и $4(y+2)^2 = 4$, т.е. $x-1 = \pm 1$ и $y+2 = \pm 1$.

Ответ: (0; -3), (0; -1), (2, -3), (2, -1).

б) $2(x-3)^2 + 3(y-2)^2 = 5$. Т.к. x, y – целые, то $2(x-3)^2$ – принимает значения 0, 2, 8 ..., и $3(y-2)^2$ принимает значения 0, 3, 12, ... тогда сумма равна 5,

только если $2(x-3)^2 = 2$ и $3(y-2)^2 = 3$, т.е.
$$\begin{cases} x-3 = \pm 1 \\ y-2 = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, x = 4 \\ y = 3, y = 1 \end{cases}$$

Ответ: (2; 3), (2; 1), (4, 3), (4, 1).

§ 2. Дробно-рациональные уравнения**Уровень А****3.2.A01**

а) $\frac{1}{7z} - \frac{67}{7} = \frac{3}{z} - 1$; $\frac{21-1}{7z} = \frac{7-67}{7}$; $\frac{20}{7z} = -\frac{60}{7} \Leftrightarrow z = -\frac{1}{3}$

Ответ: $-\frac{1}{3}$.

б) $\frac{5}{9z} - \frac{53}{9} = \frac{2}{z} - 3$; $\frac{5-18}{9z} = \frac{53-27}{9}$; $\frac{13}{9z} = -\frac{26}{9}$; $z = -\frac{1}{2}$

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

3.2.A.02

а) $\frac{y^2 - 25}{4y + 20} = 0 \Rightarrow \begin{cases} y^2 - 25 = 0 \\ 4y + 20 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow y = 5$

Ответ: 5.

б) $\frac{y^2 - 9}{4y + 12} = 0 \Rightarrow \begin{cases} y^2 - 9 = 0 \\ 4y + 12 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow y = 3$

Ответ: 3.

3.2A.03

$$a) \frac{2x+5}{3x-1} = 6; \frac{2x+5-18x+6}{3x-1} = 0; \frac{11-16x}{3x-1} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{11}{16}$$

$$\text{Ответ: } \frac{11}{16}.$$

$$b) \frac{3x-4}{2x+3} = 4; \frac{3x-4-8x-12}{2x+3} = 0; \frac{-5x-16}{2x+3} = 0; x = -\frac{16}{5}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{16}{5}.$$

3.2A.04

$$a) \frac{50}{x-1} = \frac{40}{x+2}; \frac{5x+10-4x+4}{(x-1)(x+2)} = 0; \frac{x+14}{(x-1)(x+2)} = 0 \Leftrightarrow x = -14$$

$$\text{Ответ: } -14.$$

$$b) \frac{50}{x-2} = \frac{60}{x-3}; \frac{5x-15-6x+12}{(x-2)(x-3)} = 0; \frac{-x-3}{(x-2)(x-3)} = 0 \Leftrightarrow x = -3$$

$$\text{Ответ: } -3.$$

3.2A.05

$$a) \frac{x^2-7x+12}{x-3} = 0; \frac{(x-3)(x-4)}{x-3} = 0; x = 4$$

$$\text{Ответ: } 4.$$

$$b) \frac{x^2+6x+8}{x+4} = 0; \frac{(x+4)(x+2)}{x+4} = 0; x = -2$$

$$\text{Ответ: } 2.$$

3.2A.06

$$a) \frac{5}{2x+3} = \frac{4}{7}; \frac{35-8x-12}{7(2x+3)} = 0; \frac{23-8x}{2x+3} = 0; x = \frac{23}{8}$$

$$\text{Ответ: } \frac{23}{8}.$$

$$b) \frac{4}{3x+2} = \frac{3}{5}; \frac{20-9x-6}{5(3x+2)} = 0; \frac{14-9x}{3x+2} = 0; x = \frac{14}{9}$$

$$\text{Ответ: } \frac{14}{9}.$$

3.2A.07

$$a) \frac{x-4}{x+4} = 5; \frac{x-4-5x-20}{x+4} = 0; \frac{-4x-24}{x+4} = 0, x = -6$$

$$\text{Ответ: } -6.$$

$$b) \frac{x+3}{x-3} = 4; \frac{x+3-4x+12}{x-3} = 0; \frac{15-3x}{x-3} = 0, x = 5$$

$$\text{Ответ: } 5.$$

3.2A.08

$$a) \frac{4}{x} - \frac{11}{4x} = 15; \frac{16-11}{4x} = 15; \frac{5}{4x} = 15; x = \frac{1}{12}$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{12}.$$

$$b) \frac{3}{x} - \frac{19}{5x} = 16; \frac{15-19}{5x} = 16; -\frac{4}{5x} = 16; x = -\frac{1}{20}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{1}{20}.$$

3.2A.09

$$a) \frac{(x-2)(x-4)}{2x^2-7x+6} = 0, \text{ корни числителя } 2, 4, \text{ но } 2 - \text{ корень знаменателя} \Rightarrow$$

4 – корень уравнения, а 2; 3 – нет.

$$\text{Ответ: } 4.$$

$$b) \frac{(x+2)(x+3)}{2x^2+5x-3} = 0, \text{ корни числителя } -3, -2, \text{ но } -3 - \text{ корень знаменателя}$$

$\Rightarrow -2$ – корень уравнения, а $-2; -4$ – нет.

$$\text{Ответ: } -2.$$

3.2A.10

$$a) \frac{(x+3)(x-2)}{x^2-4} = 0; \frac{(x+3)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = 0 \Leftrightarrow x = -3$$

$$\text{Ответ: } -3.$$

$$b) \frac{(x+4)(x+1)}{x^2-1} = 0; \frac{(x+4)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = 0 \Leftrightarrow x = -4$$

$$\text{Ответ: } -4.$$

Уровень В**3.2.B01**

$$a) \frac{x+3}{x+2} = \frac{6}{x} + \frac{1}{x+2}; \frac{x(x+3)-6(x+2)-x}{x(x+2)} = 0; \frac{x^2+3x-6x-12-x}{x(x+2)} = 0;$$

$$\frac{x^2-4x-12}{x(x+2)} = 0; \frac{(x+2)(x-6)}{x(x+2)} = 0 \Leftrightarrow x = 6.$$

$$\text{Ответ: } 6.$$

$$b) \frac{x+4}{x-3} = \frac{4}{x} + \frac{7}{x-3}; \frac{x(x+4)-4(x-3)-7x}{x(x-3)} = 0;$$

$$\frac{x^2+4x-4x+12-7x}{x(x-3)} = 0; \frac{x^2-7x+12}{x(x-3)} = 0; \frac{(x-4)(x-3)}{x(x-3)} = 0 \Leftrightarrow x = 4.$$

$$\text{Ответ: } 4.$$

3.2.B02

$$a) \frac{5}{x^2} + \frac{3}{x} - 2 = 0, \frac{5+3x-2x^2}{x^2} = 0, 2x^2-3x-5=0, D=9+40=49,$$

$$x_1 = \frac{3+7}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}; x_2 = \frac{3-7}{4} = -1.$$

$$\text{Ответ: } \frac{5}{2}; -1.$$

$$b) \frac{6}{x^2} - \frac{1}{x} - 5 = 0, \frac{6-x-5x^2}{x^2} = 0, 5x^2+x-6=0, D=1+120=121,$$

$$x_1 = \frac{-1+11}{10} = 1; x_2 = \frac{-1-11}{10} = -1,2.$$

$$\text{Ответ: } -\frac{6}{5}; 1.$$

3.2.B03

$$a) \frac{y-1}{y} + \frac{1}{y^2} = 1; 1 - \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} = 1; \frac{1}{y^2} = \frac{1}{y} \Rightarrow y = 1$$

$$\text{Ответ: } 1.$$

$$b) \frac{y+1}{y} - \frac{4}{y^2} = 1; \frac{y(y+1)-4-y^2}{y^2} = 0; \frac{y-4}{y^2} = 0, y = 4$$

$$\text{Ответ: } 4.$$

3.2.B04

$$a) \frac{x^2}{x-5} - \frac{x}{5-x} = \frac{30}{x-5}; \frac{x^2+x-30}{x-5} = 0, \frac{(x+6)(x-5)}{x-5} = 0 \Leftrightarrow x = -6.$$

$$\text{Ответ: } -6.$$

$$b) \frac{x^2}{x-2} - \frac{7x}{2-x} = \frac{18}{x-2}; \frac{x^2+7x-18}{x-2} = 0, \frac{(x+9)(x-2)}{x-2} = 0 \Leftrightarrow x = -9.$$

$$\text{Ответ: } -9.$$

3.2.B05

$$a) \frac{6b+5}{b-2} = \frac{b-5}{3b+2}; \frac{(6b+5)(3b+2)-(b-5)(b-2)}{(b-2)(3b+2)} = 0$$

$$\frac{18b^2+27b+10-b^2+7b-10}{(b-2)(3b+2)} = 0; \frac{b(17b+34)}{(b-2)(3b+2)} = 0; \Rightarrow b = 0, b = -2$$

$$\text{Ответ: } 0; -2.$$

$$b) \frac{5b+4}{b-2} = \frac{b-4}{3b+2}; \frac{(5b+4)(3b+2)-(b-2)(b-4)}{(b-2)(3b+2)} = 0;$$

$$\frac{15b^2+22b+8-b^2+6b-8}{(b-2)(3b+2)} = 0; \frac{b(14b+28)}{(b-2)(3b+2)} = 0; \Rightarrow b = 0, b = -2.$$

$$\text{Ответ: } 0; -2.$$

3.2.B06

$$a) \frac{x^2 - 5x - 6}{x^2 + 2x - 3} = 0; \frac{(x-6)(x+1)}{(x+3)(x-1)} = 0 \Leftrightarrow x = 6, x = -1.$$

Omgeem: 6; -1.

$$b) \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} = 0; \frac{(x+1)(x+2)}{(x-3)(x-1)} = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = -2.$$

Omgeem: -1; -2.

3.2.B07

$$a) \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 5x + 4} = 0; \frac{(x-4)(x+3)}{(x-4)(x-1)} = 0 \Leftrightarrow x = -3.$$

Omgeem: -3.

$$b) \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + x - 12} = 0; \frac{(x+5)(x-3)}{(x+4)(x-3)} = 0 \Leftrightarrow x = -5.$$

Omgeem: -5.

3.2.B08

$$a) \frac{2y-3}{y} = \frac{y+6}{y+4}; \frac{(2y-3)(y+4) - y(y+6)}{y(y+4)} = 0;$$

$$\frac{2y^2 + 5y - 12 - y^2 - 6y}{y(y+4)} = 0; \frac{y^2 - y - 12}{y(y+4)} = 0; \frac{(y+3)(y-4)}{y(y+4)} = 0,$$

$$\Rightarrow y = -3, y = 4.$$

Omgeem: -3; 4.

$$b) \frac{5y+2}{y} = \frac{4y+13}{y+4}; \frac{(5y+2)(y+4) - (4y+13)y}{y(y+4)} = 0$$

$$\frac{5y^2 + 22y + 8 - 4y^2 - 13y}{y(y+4)} = 0; \frac{y^2 + 9y + 8}{y(y+4)} = 0; \frac{(y+1)(y+8)}{y(y+4)} = 0,$$

$$\Rightarrow y = -1, y = -8.$$

Omgeem: -1; -8.

3.2.B09

$$a) \frac{x}{17x^2 + 27} = 0,05x^{-1} \Rightarrow \frac{x}{17x^2 + 27} = \frac{1}{20x} \Leftrightarrow \frac{20x^2 - 17x^2 - 27}{20x(17x^2 + 27)} = 0$$

$$\frac{3x^2 - 27}{20x(17x^2 + 27)} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

Omgeem: 3; -3.

$$b) \frac{x}{3x^2 + 32} = 0,2x^{-1} \Leftrightarrow \frac{x}{3x^2 + 32} = \frac{1}{5x}; \frac{5x^2 - 3x^2 - 32}{5x(3x^2 + 32)} = 0; \frac{2x^2 - 32}{5x(3x^2 + 32)} = 0;$$

$$x^2 = 16; x = \pm 4. \text{ Omgeem: } \pm 4.$$

3.2.B10

$$a) \frac{2x-1}{x+2} = 1 - \frac{1}{2x}; \frac{2x(2x-1) - 2x(x+2) + x+2}{2x(x+2)} = 0$$

$$\frac{4x^2 - 2x - 2x^2 - 4x + x + 2}{2x(x+2)} = 0; \frac{2x^2 - 5x + 2}{2x(x+2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 = 0 \\ x(x+2) \neq 0 \end{cases}, D = 25 - 16 = 9, x_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{5+3}{4} = 2$$

Ответ: $\frac{1}{2}; 2$.

$$б) \frac{2x-1}{x-4} = 1 + \frac{2}{5x}; \frac{5x(2x-1) - 5x(x-4) - 2(x-4)}{5x(x-4)} = 0$$

$$\frac{10x^2 - 5x - 5x^2 + 20x - 2x + 8}{5x(x-4)} = 0; \frac{5x^2 + 13x + 8}{5x(x-4)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 13x + 8 = 0 \\ 5x(x-4) \neq 0 \end{cases}, D = 169 - 160 = 9,$$

$$x_1 = \frac{-13+3}{10} = -1; x_2 = \frac{-13-3}{10} = -\frac{8}{5}$$

Ответ: $-1; -\frac{8}{5}$.

Уровень С

3.2.C01

$$a) \frac{x-15}{x(x+7)} + \frac{2}{x+7} = 2; \frac{x-15+2x-2(x+7)x}{x(x+7)} = 0; \frac{2x^2+11x+15}{x(x+7)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 11x + 15 = 0 \\ x(x+7) \neq 0 \end{cases}, D = 121 - 120 = 1, x_1 = \frac{-11+1}{4} = -\frac{5}{4}; x_2 = \frac{-11-1}{4} = -3.$$

Ответ: $-\frac{5}{4}; -3$.

$$б) \frac{x+14}{x(x+1)} + \frac{3}{x+1} = 3; \frac{x+14+3x-3(x+1)x}{x(x+1)} = 0; \frac{3x^2-x-14}{x(x+1)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - x - 14 = 0 \\ x(x+1) \neq 0 \end{cases}, D = 1 + 168 = 13^2, x_1 = \frac{1+13}{6} = \frac{7}{3}; x_2 = \frac{1-13}{6} = -2$$

Ответ: $\frac{7}{3}; -2$.

3.2.C02

$$a) \frac{y-5}{y-3} + \frac{4}{y+3} = -\frac{24}{y^2-9}; \frac{(y-5)(y+3)+4(y-3)+24}{y^2-9} = 0;$$

$$\frac{y^2-2y-15+4y-12+24}{y^2-9} = 0; \frac{y^2-2y-3}{y^2-9} = 0; \frac{(y+3)(y-1)}{(y-3)(y+3)} = 0 \Leftrightarrow y = 1.$$

Ответ: 1.

$$б) \frac{y+1}{y+2} - \frac{1}{y-2} = -\frac{4}{y^2-4}; \frac{y(y-2)}{(y+2)(y-2)} = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Ответ: 0.**3.2.C03**

$$a) 8 - \frac{3}{u+1} = -\frac{19}{u-7}; \frac{8(u+1)(u-7)-3(u-7)+19(u+1)}{(u+1)(u-7)} = 0;$$

$$\frac{-56+8u^2-48u-3u+21+19u+19}{(u+1)(u-7)} = 0; \frac{8u^2-32u-16}{(u+1)(u-7)} = 0;$$

$$\frac{8(u^2-4u-2)}{(u+1)(u-7)} = 0; u^2-4u-2 = 0, \frac{D}{4} = 4+2 = 6; u_{\max} = 2+\sqrt{6}.$$

Ответ: $2+\sqrt{6}$.

$$б) 7 - \frac{1}{u-2} = -\frac{22}{u-9}; \frac{7(u-2)(u-9)-(u-9)+22(u-2)}{(u-2)(u-9)} = 0;$$

$$\frac{7u^2-77u+126-u+9+22u-44}{(u-2)(u-9)} = 0; \frac{7u^2-56u+91}{(u-2)(u-9)} = 0;$$

$$\frac{7(u^2-8u+13)}{(u-2)(u-9)} = 0; u^2-8u+13 = 0, \frac{D}{4} = 16-13 = 3; u_{\max} = 4+\sqrt{3}.$$

Ответ: $4+\sqrt{3}$.**3.2.C04**

$$a) \frac{1}{x-1} - \frac{45}{5x-9} = 5; \frac{5x-9-45x+45-5(x-1)(5x-9)}{(x-1)(5x-9)} = 0$$

$$\frac{-40x+36-25x^2+70x-45}{(x-1)(5x-9)} = 0; \frac{25x^2-30x+9}{(x-1)(5x-9)} = 0;$$

$$\frac{(5x-3)^2}{(x-1)(5x-9)} = 0, x = \frac{3}{5}$$

Ответ: $\frac{3}{5}$.

$$б) \frac{12}{3x+4} - \frac{1}{x+1} = 3; \frac{12x+12-3x-4-3(3x+4)(x+1)}{(3x+4)(x+1)} = 0;$$

$$\frac{12x+12-3x-4-9x^2-21x-12}{(3x+4)(x+1)}=0; \quad \frac{-9x^2-12x-4}{(3x+4)(x+1)}=0;$$

$$\frac{(3x+2)^2}{(3x+4)(x+1)}=0 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}.$$

Omgeem: $-\frac{2}{3}$.

3.2.C05

$$a) \frac{5z-3}{z+4} - \frac{4z-1}{z+2} = \frac{2-5z}{z^2+6z+8}; \quad \frac{(5z-3)(z+2)-(4z-1)(z+4)}{(z+4)(z+2)} = \frac{2-5z}{(z+4)(z+2)};$$

$$\frac{5z^2+7z-6-4z^2-15z+4-2+5z}{(z+4)(z+2)}=0; \quad \frac{z^2-3z-4}{(z+4)(z+2)}=0;$$

$$\frac{(z-4)(z+1)}{(z+4)(z+2)}=0 \Leftrightarrow z=4, z=-1.$$

Omgeem: 4; -1.

$$b) \frac{5z+1}{z-4} - \frac{4z+1}{z+2} = \frac{5z-14}{z^2-2z-8}; \quad \frac{(5z+1)(z+2)-(4z+1)(z-4)}{(z-4)(z+2)} = \frac{5z-14}{(z-4)(z+2)};$$

$$\frac{5z^2+11z+2-4z^2+15z+4-5z+14}{(z-4)(z+2)}=0; \quad \frac{z^2+21z+20}{(z-4)(z+2)}=0;$$

$$\frac{(z+1)(z+20)}{(z-4)(z+2)}=0 \Leftrightarrow z=-1, z=-20.$$

Omgeem: -1; -20.

3.2.C06

$$a) \frac{3z+4}{z+2} + \frac{z+2}{3z+4} = \frac{2(3z+4)(z+2)}{(z+2)(3z+4)};$$

$$\frac{(3z+4)^2+(z+2)^2-2(3z+4)(z+2)}{(z+2)(3z+4)}=0; \quad \frac{((3z+4)-(z+2))^2}{(z+2)(3z+4)}=0;$$

$$\frac{(2z+2)^2}{(z+2)(3z+4)}=0 \Leftrightarrow z=-1.$$

Omgeem: -1.

$$b) \frac{3z+1}{z-2} + \frac{z-2}{3z+1} = 2 \frac{(3z+1)(z-2)}{(z-2)(3z+1)};$$

$$\frac{(3z+1)^2+(z-2)^2-2(3z+1)(z-2)}{(z-2)(3z+1)}=0; \quad \frac{((3z+1)-(z-2))^2}{(z-2)(3z+1)}=0;$$

$$\frac{(2z+3)^2}{(z-2)(3z+1)}=0 \Leftrightarrow z=-\frac{3}{2}. \quad \text{Omgeem: } -\frac{3}{2}.$$

3.2.C07

$$a) \frac{x^2}{x^2+27} - \frac{4}{x^2+7} = 0; \frac{x^2(x^2+7) - 4x^2 - 108}{(x^2+27)(x^2+7)} = 0; \frac{x^4+7x^2-4x^2-108}{(x^2+27)(x^2+7)} = 0$$

$$x^4+3x^2-108=0; (x^2+12)(x^2-9)=0, x^2-9=0 \Leftrightarrow x=\pm 3.$$

Ответ: 3; -3.

$$б) \frac{x^2}{x^2+75} - \frac{3}{x^2-13} = 0; \frac{x^2(x^2-13) - 3(x^2+75)}{(x^2+75)(x^2-13)} = 0;$$

$$\frac{x^4-16x^2-225}{(x^2-13)} = 0; \frac{(x^2-25)(x^2+9)}{(x^2-13)} = 0 \Leftrightarrow x=\pm 5$$

Ответ: 5; -5.

3.2.C08

$$a) 2\left(\frac{7x+5}{x}\right)^2 - 11\left(\frac{7x+5}{x}\right) + 15 = 0; \frac{7x+5}{x} = \left(7 + \frac{5}{x}\right) = t;$$

$$2t^2 - 11t + 15 = 0, D = 121 - 120 = 1, t_1 = \frac{11+1}{4} = 3 \Leftrightarrow 7 + \frac{5}{x} = 3 \Leftrightarrow \frac{5}{x} = -4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{5}{4}; t_1 = \frac{11-1}{4} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 7 + \frac{5}{x} = \frac{5}{2}; \frac{5}{x} = -\frac{9}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{10}{9}.$$

Ответ: $-\frac{5}{4}; -\frac{10}{9}$.

$$б) 5\left(\frac{4x+7}{x}\right)^2 + 3 \cdot \frac{4x+7}{x} - 2 = 0; \frac{4x+7}{x} = 4 + \frac{7}{x} = t$$

$$5t^2 + 3t - 2 = 0, D = 9 + 40 = 49, t_1 = \frac{-3-7}{10} = -1, 4 + \frac{7}{x} = -1, x = -\frac{7}{5}$$

$$t_2 = \frac{-3+7}{10} = \frac{2}{5}; 4 + \frac{7}{x} = \frac{2}{5}; \frac{7}{x} = -\frac{18}{5} \Rightarrow x = -\frac{35}{18}$$

Ответ: $-\frac{7}{5}; -\frac{35}{18}$.

3.2.C09

$$a) \frac{3x+2}{2x+3} + \frac{2x+3}{3x+2} = -2; \frac{3x+2}{2x+3} = t; t + \frac{1}{t} = -2; \frac{t^2+1+2t}{t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(t+1)^2}{t} = 0 \Leftrightarrow t = -1; \frac{3x+2}{2x+3} = -1; 3x+2 = -2x-3 \Leftrightarrow x = -1.$$

Ответ: -1.

$$б) \frac{4x-3}{3x-4} + \frac{3x-4}{4x-3} = 2; \frac{4x-3}{3x-4} = t; t + \frac{1}{t} = 2; \frac{t^2+1-2t}{t} = 0;$$

$$\frac{(t-1)^2}{t} = 0; t = 1; \frac{4x-3}{3x-4} = 1; 4x-3 = 3x-4 \Leftrightarrow x = -1.$$

Ответ: -1.

3.2.C10

$$a) 2P(x-4)+3P(x-3)=2P(-4), P(t)=\frac{1}{t+5}; \frac{2}{t+1}+\frac{3}{t+2}=2;$$

$$\frac{2t+4+3t+3-2(t+1)(t+2)}{(t+1)(t+2)}=0; \frac{2t+4+3t+3-2t^2-6t-4}{(t+1)(t+2)}=0;$$

$$\frac{-2t^2-t+3}{(t+1)(t+2)}=0; \frac{-(t-1)(2t+3)}{(t+1)(t+2)}=0 \Leftrightarrow t=1, t=-\frac{3}{2}.$$

$$\text{Ответ: } 1; -\frac{3}{2}.$$

$$b) 2P(x+4)+P(x+3)=4P(7), P(t)=\frac{1}{t-5}; \frac{2}{t-1}+\frac{1}{t-2}=2;$$

$$\frac{2t-4+t-1-2(t-1)(t-2)}{(t-1)(t-2)}=0; \frac{2t-4+t-1-2t^2+6t-4}{(t-1)(t-2)}=0;$$

$$\frac{-2t^2+9t-9}{(t-1)(t-2)}=0; \frac{-(t-3)(2t-3)}{(t-1)(t-2)}=0 \Leftrightarrow t=3, t=\frac{3}{2}$$

$$\text{Ответ: } x=3; \frac{3}{2}.$$

Уровень D

3.2.D01

$$a) \frac{5}{x^2+2x+4}=\frac{1}{x-2}-\frac{4x+4}{x^3-8}; \frac{5(x-2)-x^2-2x-4+4x+4}{x^3-8}=0;$$

$$\frac{-x^2+7x-10}{x^3-8}=0; \frac{(x-2)(x-5)}{x^3-8}=0 \Leftrightarrow x=5$$

$$\text{Ответ: } 5.$$

$$b) \frac{4}{x^2+3x+9}=\frac{1}{x-3}-\frac{6x+9}{x^3-27}; \frac{4x-12-x^2-3x-9+6x+9}{x^3-27}=0;$$

$$\frac{-x^2+7x-12}{x^3-27}=0; \frac{(x-3)(x-4)}{(x-3)(x^2+3x+9)}=0 \Leftrightarrow x=4$$

$$\text{Ответ: } 4.$$

3.2.D02

$$a) x^2=\frac{12}{1+\frac{1}{x}}; \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)-12}{1+\frac{1}{x}}=0; \frac{x^2+x-12}{1+\frac{1}{x}}=0; \frac{(x-3)(x+4)}{1+\frac{1}{x}}=0$$

$$\Leftrightarrow x=3, x=-4.$$

$$\text{Ответ: } 3; -4.$$

$$6) x^2 = \frac{6}{1 - \frac{1}{x}}; \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) - 6}{1 - \frac{1}{x}} = 0; \frac{x^2 - x - 6}{1 - \frac{1}{x}} = 0; \frac{(x-3)(x+2)}{1 - \frac{1}{x}} = 0$$

$$x = 3, x = -2.$$

Омгем: 3; -2.

3.2.D03

$$a) \frac{x^2}{x+2} + \frac{x}{x^2-2} = 2; \frac{x^2-x-2}{x+2} = \frac{x^2-x-2}{x^2-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+1) \frac{(x^2-x-4)}{(x+2)(x^2-2)} = 0; x^2-x-4 = 0, D = 1+16 = 17, x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\text{Омгем: } 2; -1; \frac{1 + \sqrt{17}}{2}; \frac{1 - \sqrt{17}}{2}.$$

$$6) \frac{x^2}{x+6} + \frac{x}{x^2-6} = 2; \left(\frac{x^2}{x+6} - 1 \right) = \left(1 - \frac{x}{x^2-6} \right)$$

$$\frac{x^2-x-6}{x+6} = \frac{x^2-x-6}{x^2-6} \Rightarrow \frac{(x-3)(x+2)(x^2-x-12)}{(x+6)(x^2-6)} = 0$$

$$\frac{(x-3)(x+2)(x+3)(x-4)}{(x+6)(x^2-6)} = 0 \Leftrightarrow x = 3, -3, 2, 4.$$

Омгем: 3; -3; 2; 4.

3.2.D04

$$a) \frac{6}{(5-z)^2} + \frac{6}{(5+z)^2} = -\frac{13}{z^2-25};$$

$$\frac{6(z^2+10z+25+z^2-10z+25)}{(5+z)^2(5-z)^2} + \frac{13(z^2-25)}{(z^2-25)^2} = 0;$$

$$\frac{25z^2-25}{(z^2-25)^2} = 0 \Leftrightarrow z^2 = 1, z = \pm 1.$$

Омгем: 1; -1.

$$6) \frac{15}{(4-z)^2} + \frac{15}{(z+4)^2} = -\frac{34}{z^2-16};$$

$$\frac{15(z^2+8z+16+z^2-8z+16)}{(z-4)^2(z+4)^2} + \frac{34(z^2-16)}{(z^2-16)^2} = 0;$$

$$\frac{64z^2-64}{(z^2-16)^2} = 0 \Leftrightarrow z^2 = 1, z = \pm 1.$$

Омгем: 1; -1.

3.2.D05

$$a) \frac{(3x-2)^2}{(4x+3)^2} + \frac{(3x+2)^2}{(4x-5)^2} = 2 \frac{9x^2-4}{16x^2-9};$$

$$\frac{(3x-2)^2(4x-3)^2 + (3x+2)^2(4x+3)^2 - 2(3x+2)(3x-2)(4x+3)(4x-3)}{(4x+3)^2(4x-3)^2} = 0;$$

$$\frac{((3x-2)(4x-3) - (3x+2)(4x+3))^2}{(4x+3)^2(4x-3)^2} = 0; \frac{12x^2-17x+6-12x^2-17x-6}{16x^2-9} = 0;$$

$$\frac{-34x}{16x^2-9} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Омвем: 0.

$$b) \left(\frac{2x-3}{3x+4} \right)^2 + \left(\frac{2x+3}{3x-4} \right)^2 = 2 \frac{4x^2-9}{9x^2-16};$$

$$\frac{(2x-3)^2(3x-4)^2 + (2x+3)^2(3x+4)^2 - 2(2x-3)(2x+3)(3x+4)(3x-4)}{(3x+4)^2(3x-4)^2} = 0;$$

$$\frac{((2x-3)(3x-4) - (2x+3)(3x+4))^2}{((3x+4)(3x-4))^2} = 0; \frac{6x^2-17x+12-6x^2-17x-12}{9x^2-16} = 0;$$

$$\frac{-34x}{9x^2-16} = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Омвем: 0.

3.2.D06

$$a) \frac{2-7x^3}{x} = 2x-7; \frac{2-7x^3-2x^2+7x}{x} = 0; \frac{(7x+2)-x^2(7x+2)}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2-1)(7x+2)}{x} = 0; x^2 = 1, 7x+2 = 0; x = \pm 1, x = -\frac{2}{7}$$

$$\text{Омвем: } 1, -1, -\frac{2}{7}.$$

$$b) \frac{3-5x^3}{x} = 3x-5; \frac{3-5x^3-3x^2+5x}{x} = 0; \frac{(3+5x)-x^2(5x+3)}{x} = 0$$

$$\frac{(x^2-1)(5x+3)}{x} = 0; x = \pm 1, x = -\frac{3}{5}.$$

$$\text{Омвем: } 1; -1; -\frac{3}{5}.$$

3.2.D07

$$a) , x^2-x=t; t=14-\frac{24}{t} \Rightarrow \frac{t^2-14t+24}{t} = 0;$$

$$t^2-14t+24=0; \frac{D}{4} = 49-24=25;$$

$$t_1 = 7+5 = 12, x^2 - x - 12 = 0, (x-4)(x+3) = 0, x = 4, x = -3$$

$$t_2 = 7-5 = 2, x^2 - x - 2 = 0, (x-2)(x+1) = 0, x = 2, x = -1$$

$$x_{\min} = -3.$$

Ответ: -3.

$$6) x^2 - 5x = 30 - \frac{144}{x^2 - 5x}, x^2 - 5x = t; t = 30 - \frac{144}{t}; \frac{t^2 - 30t + 144}{t} = 0$$

$$t^2 - 30t + 144 = 0; \frac{D}{4} = 225 - 144 = 81;$$

$$t_1 = 15 - 9 = 6; x^2 - 5x - 6 = 0; (x-6)(x+1) = 0, x = 6, x = -1$$

$$t_2 = 15 + 9 = 24, x^2 - 5x - 24 = 0; (x-8)(x+3) = 0, x = 8, x = -3.$$

$$x_{\min} = -3$$

Ответ: -3.

3.2.D08

$$a) \frac{2x+1}{x-3} + \frac{5}{x+4} = \frac{7}{x-3} + \frac{x+9}{x+4} + \frac{12}{x^3 + x^2 - 12x + 12}$$

$$\frac{2x+1-7}{x-3} + \frac{5-x-9}{x+4} = \frac{12}{x^3 + x^2 - 12x + 12}$$

$$\frac{2(x-3)}{x-3} - \frac{x+4}{x+4} = \frac{12}{x^3 + x^2 - 12x + 12}; 1 = \frac{12}{x^3 + x^2 - 12x + 12}$$

$$\Rightarrow \frac{x^3 + x^2 - 12x + 12 - 12}{x^3 + x^2 - 12x + 12} = 0; \frac{x(x^2 + x - 12)}{x^3 + x^2 - 12x + 12} = 0; \frac{x(x+4)(x-3)}{x^3 + x^2 - 12x + 12} = 0.$$

$$\Rightarrow x = 0, x = -4, x = 3, \text{ но } x = -4, x = 3 \text{ не попадают в ОДЗ.}$$

Ответ: 0.

$$6) \frac{2x-1}{x+3} + \frac{5}{x-4} = -\frac{7}{x+3} + \frac{x+1}{x-4} + \frac{11}{x^3 - x^2 - 12x + 11}$$

$$\frac{2x-1+7}{x+3} + \frac{5-x-1}{x-4} = \frac{11}{x^3 - x^2 - 12x + 11}$$

$$\frac{2(x+3)}{x+3} - \frac{x-4}{x-4} = \frac{11}{x^3 - x^2 - 12x + 11}; 1 = \frac{11}{x^3 - x^2 - 12x + 11}$$

$$\frac{x^3 - x^2 - 12x + 11 - 11}{x^3 - x^2 - 12x + 11} = 0; \frac{x(x^2 - x - 12)}{x^3 - x^2 - 12x + 11} = 0; \frac{x(x-4)(x+3)}{x^3 - x^2 - 12x + 11} = 0$$

$$x = 0, x = 4, x = -3, \text{ но } x = 4, x = -3 \text{ не попадают в ОДЗ.}$$

Ответ: 0.

3.2.D09

$$a) \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + x + 1} - \frac{3x}{x^2 + 2x + 1} = 1; \frac{(x^2 + x + 1) + x}{x^2 + x + 1} - \frac{3x}{x^2 + 2x + 1} = 1;$$

$$\frac{x}{x^2 + x + 1} - \frac{3x}{x^2 + 2x + 1} = 0; \frac{x(x^2 + 2x + 1 - 3x^2 - 3x - 3)}{(x^2 + 2x + 1)(x^2 + x + 1)} = 0;$$

$$\frac{x(-2x^2 - x - 2)}{(x^2 + 2x + 1)(x^2 + x + 1)} = 0; \frac{x(2x^2 + x + 2)}{(x^2 + 2x + 1)(x^2 + x + 1)} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Ответ: 0.

$$б) \frac{x^2 - 4x + 2}{x^2 - 2x + 2} - \frac{3x}{x^2 + 2x + 2} = 1; \frac{(x^2 - 2x + 2) - 2x}{x^2 - 2x + 2} - \frac{3x}{x^2 + 2x + 2} = 1$$

$$\frac{-2x}{x^2 - 2x + 2} - \frac{3x}{x^2 + 2x + 2} = 0; \frac{x(2x^2 + 4x + 4 + 3x^2 - 6x + 6)}{(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)} = 0;$$

$$\frac{x(5x^2 - 2x + 10)}{(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Ответ: 0.

3.2.D10

$$а) \frac{1}{|x^2 + 10x|} = \frac{1}{25} + \frac{2}{5x}; \frac{1}{|x(x+10)|} = \frac{x+10}{25x}$$

Т.к. $|x(x+10)| > 0$, то x и $x+10$, должны быть одного знака, и $\frac{x+10}{25x} > 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{x(x+10)} = \frac{x+10}{25x} \Rightarrow \frac{1}{x} \left(\frac{25 - (x+10)^2}{25(x+10)} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{((x+10)+5)((x+10)-5)}{25x(x+10)} = 0 \Rightarrow \frac{(x+15)(x+5)}{25x(x+10)} = 0$$

$\Rightarrow x = -15, x = -5$, но $x = -5$ не подходит, т.к. $\frac{x+10}{25x}$ будет меньше 0.

Ответ: -15.

$$б) \frac{25}{|x^2 + 5x|} = 1 + \frac{5}{x}; \frac{25}{|x(5+x)|} = \frac{5+x}{x}, \text{ т.к. } |x(5+x)| > 0,$$

то и $\frac{5+x}{x} > 0 \Rightarrow x(5+x) > 0$, значит, модуль можем снять.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{25}{x(5+x)} = \frac{5+x}{x} \\ x(5+x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{25 - (5+x)^2}{x(5+x)} = 0 \\ x(5+x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x(x+10)}{x(x+5)} = 0 \\ x(5+x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -10$$

Ответ: -10.

§ 3. Иррациональные уравнения

3.3.A01

$$а) \sqrt{-3x} = 2 \Leftrightarrow -3x = 4, x = -\frac{4}{3}.$$

$$б) \sqrt{2x} = 3 \Leftrightarrow 2x = 9, x = 4,5.$$

Ответ: $-\frac{4}{3}$.

Ответ: 4,5.

3.3.A02

$$a) \sqrt{\frac{x}{2}} = 3; \frac{x}{2} = 9; x = 18;$$

Ответ: 18.

$$б) \sqrt{-\frac{x}{3}} = 2; -\frac{x}{3} = 4; x = -12.$$

Ответ: -12.

3.3.A03

$$a) \sqrt{x-5} = 4 \Leftrightarrow x-5 = 16 \Leftrightarrow x = 21.$$

Ответ: 21.

$$б) \sqrt{x-4} = 5 \Leftrightarrow x-4 = 25 \Leftrightarrow x = 29.$$

Ответ: 29.

3.3.A04

$$a) \sqrt{4-x} = 5 \Leftrightarrow 4-x = 25 \Leftrightarrow x = -21.$$

Ответ: -21.

$$б) \sqrt{5-x} = 4 \Leftrightarrow 5-x = 16 \Leftrightarrow x = -11.$$

Ответ: -11.

3.3.A05

$$a) \sqrt{3x-4} = 5 \Leftrightarrow 3x-4 = 25 \Leftrightarrow x = \frac{29}{3}. \text{ Ответ: } \frac{29}{3}.$$

$$б) \sqrt{5x-4} = 3 \Leftrightarrow 5x-4 = 9 \Leftrightarrow x = \frac{13}{5}. \text{ Ответ: } \frac{13}{5}.$$

3.3.A06

$$a) \sqrt{6x+5} = 7 \Leftrightarrow 6x+5 = 49 \Leftrightarrow 6x = 44 \Leftrightarrow x = \frac{22}{3}. \text{ Ответ: } \frac{22}{3}.$$

$$б) \sqrt{7x+6} = 5 \Leftrightarrow 7x+6 = 25 \Leftrightarrow 7x = 19 \Leftrightarrow x = \frac{19}{7}. \text{ Ответ: } \frac{19}{7}.$$

3.3.A07

$$a) \sqrt{8-3x} = 4 \Leftrightarrow 8-3x = 16 \Leftrightarrow 3x = -8 \Leftrightarrow x = -\frac{8}{3}. \text{ Ответ: } -\frac{8}{3}.$$

$$б) \sqrt{9-2x} = 6 \Leftrightarrow 9-2x = 36 \Leftrightarrow 2x = -27 \Leftrightarrow x = -13,5. \text{ Ответ: } -13,5.$$

3.3.A08

$$a) \sqrt{\frac{x-6}{5}} = 3 \Leftrightarrow \frac{x-6}{5} = 9 \Leftrightarrow x-6 = 45 \Leftrightarrow x = 51. \text{ Ответ: } 51.$$

$$б) \sqrt{\frac{x-4}{7}} = 2 \Leftrightarrow \frac{x-4}{7} = 4 \Leftrightarrow x-4 = 28 \Leftrightarrow x = 32. \text{ Ответ: } 32.$$

3.3.A09

$$a) \sqrt{\frac{3x}{5}} = 4 \Leftrightarrow \frac{3x}{5} = 16 \Leftrightarrow x = \frac{80}{3}.$$

Ответ: $\frac{80}{3}$

$$б) \sqrt{\frac{5x}{3}} = 4 \Leftrightarrow \frac{5x}{3} = 16 \Leftrightarrow x = \frac{48}{5}.$$

Ответ: $\frac{48}{5}$

3.3.A10

$$a) \sqrt{\frac{9-x}{2}} = 5 \Leftrightarrow \frac{9-x}{2} = 25 \Leftrightarrow 9-x = 50 \Leftrightarrow x = -41. \text{ Ответ: } -41.$$

$$b) \sqrt{\frac{8-x}{5}} = 2 \Leftrightarrow \frac{8-x}{5} = 4 \Leftrightarrow 8-x = 20 \Leftrightarrow x = -12. \text{ Ответ: } -12.$$

Уровень В**3.3.B01**

$$a) \sqrt{\frac{5}{x-5}} = 5 \Leftrightarrow \frac{5}{x-5} = 25 \Leftrightarrow \frac{5-25x+125}{x-5} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{25x-130}{x-5} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{26}{5}. \text{ Ответ: } \frac{26}{5}.$$

$$b) \sqrt{\frac{3}{x-3}} = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{x-3} = 9 \Leftrightarrow \frac{3-9x+27}{x-3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{9x-30}{x-3} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{10}{3}. \text{ Ответ: } \frac{10}{3}.$$

3.3.B02

$$a) \sqrt{\frac{7}{x+2}} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{7}{x+2} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ 112 = x+2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 110.$$

Ответ: 110.

$$b) \sqrt{\frac{6}{x+7}} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{6}{x+7} = \frac{1}{25} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -7 \\ 150 = x+7 \end{cases} \Leftrightarrow x = 143.$$

Ответ: 143.

3.3.B03

$$a) \sqrt{\frac{11}{10-x}} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{11}{10-x} = \frac{1}{36} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 10 \\ 396 = 10-x \end{cases} \Leftrightarrow x = -386.$$

Ответ: -386.

$$b) \sqrt{\frac{13}{12-x}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{13}{12-x} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 12 \\ 117 = 12-x \end{cases} \Leftrightarrow x = -105.$$

Ответ: -105.

3.3.B04

$$a) \sqrt{\frac{x-3}{x+6}} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{x-3}{x+6} = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \frac{25x-75-16x-96}{25(x+6)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{9x-171}{x+6} = 0 \Leftrightarrow x = 19.$$

Ответ: 19.

$$\begin{aligned}
 6) \sqrt{\frac{x-5}{x+11}} = \frac{3}{5} &\Leftrightarrow \frac{x-5}{x+11} = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \frac{25x-125-9x-99}{25(x+11)} = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{16x-224}{x+11} = 0 \Leftrightarrow x=14.
 \end{aligned}$$

Ответ: 14.

3.3.B05

$$\begin{aligned}
 a) \sqrt{\frac{3-x}{x+7}} = 3 &\Leftrightarrow \frac{3-x}{x+7} = 9 \Leftrightarrow \frac{3-x-9x-63}{x+7} = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{-10x-60}{x+7} = 0 \Leftrightarrow x=-6.
 \end{aligned}$$

Ответ: -6.

$$\begin{aligned}
 6) \sqrt{\frac{7-x}{x+10}} = 4 &\Leftrightarrow \frac{7-x}{x+10} = 16 \Leftrightarrow \frac{7-x-16x-160}{x+10} = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{-17x-153}{x+10} = 0 \Leftrightarrow \frac{x+9}{x+10} = 0 \Leftrightarrow x=-9
 \end{aligned}$$

Ответ: -9.

3.3.B06

$$\begin{aligned}
 a) \sqrt{\frac{x+6}{x-6}} = 2 &\Leftrightarrow \frac{x+6}{x-6} = 4 \Leftrightarrow \frac{x+6-4x+24}{x-6} = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{-3x+30}{x-6} = 0 \Leftrightarrow x=10.
 \end{aligned}$$

Ответ: 10.

$$\begin{aligned}
 6) \sqrt{\frac{x+4}{x-4}} = 3 &\Leftrightarrow \frac{x+4}{x-4} = 9 \Leftrightarrow \frac{x+4-9x+36}{x-4} = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{-8x+40}{x-4} = 0 \Leftrightarrow x=5.
 \end{aligned}$$

Ответ: 5.

3.3.B07

$$\begin{aligned}
 a) \sqrt{\frac{x+20}{x+5}} = 4 &\Leftrightarrow \frac{x+20}{x+5} = 16 \Leftrightarrow \frac{x+20-16x-80}{x+5} = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{-15x-60}{x+5} = 0 \Leftrightarrow x=-4.
 \end{aligned}$$

Ответ: -4.

$$\begin{aligned}
 6) \sqrt{\frac{x+17}{x+8}} = 2 &\Leftrightarrow \frac{x+17}{x+8} = 4 \Leftrightarrow \frac{x+17-4x-32}{x+8} = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{-3x-15}{x+8} = 0 \Leftrightarrow x=-5
 \end{aligned}$$

Ответ: -5.

3.3.B08

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt{\frac{5x}{x+31}} = 6 &\Leftrightarrow \frac{5x}{x+31} = 36 \Leftrightarrow \frac{5x-36x-36 \cdot 31}{x+31} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{-31x-31 \cdot 36}{x+36} = 0 \Leftrightarrow \frac{x+36}{x+31} = 0 \Leftrightarrow x = -36. \end{aligned}$$

Ответ: -36.

$$\begin{aligned} \text{б) } \sqrt{\frac{3x}{x+46}} = 7 &\Leftrightarrow \frac{3x}{x+46} = 49 \Leftrightarrow \frac{3x-49x-49 \cdot 46}{x+46} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{-46x-46 \cdot 49}{x+46} = 0 \Leftrightarrow \frac{x+49}{x+46} = 0 \Leftrightarrow x = -49. \end{aligned}$$

Ответ: -49.

3.3.B09

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt{6x^2-7x+2} = 1 &\Leftrightarrow 6x^2-7x+2=1 \Leftrightarrow 6x^2-6x-x+1=0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x-1)(6x-1)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{6}; x=1. \end{aligned}$$

Ответ: 1.

$$\begin{aligned} \text{б) } \sqrt{3x^2+2x-1} = 2 &\Leftrightarrow 3x^2+2x-1=4 \Leftrightarrow 3x^2-3x+5x-5=0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x-1)(3x+5)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{5}{3}, x=1. \end{aligned}$$

Ответ: 1.

3.3.B10

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt{6x-3x^2+13} = 2 &\Leftrightarrow 6x-3x^2+13=4 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x-3)(x+1)=0 \Leftrightarrow x=-1, x=3. \end{aligned}$$

Ответ: 3.

$$\begin{aligned} \text{б) } \sqrt{16x-4x^2+21} = 1 &\Leftrightarrow 16x-4x^2+21=1 \Leftrightarrow x^2-4x-5=0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x-5)(x+1)=0 \Leftrightarrow x=-1, x=5. \end{aligned}$$

Ответ: 5.

Уровень С**3.3.C01**

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt{3x-2} = 4x-3 &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2=16x^2-24x+9 \\ 4x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 16x^2-27x+11=0 \\ x \geq \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(16x-11)=0 \\ x \geq \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \end{aligned}$$

Ответ: 1.

$$\text{б) } \sqrt{2x-1} = 3x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=9x^2-12x+4 \\ 3x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 - 14x + 5 = 0 \\ x \geq \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(9x-5) = 0 \\ x \geq \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Omgeem: 1.

3.3.C02

$$a) \sqrt{\frac{x+3}{2}} = x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+3}{2} = x^2 + 4x + 4 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 7x + 5 = 0 \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(2x+5) = 0 \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$$

Omgeem: -1.

$$b) \sqrt{\frac{x-1}{3}} = x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{3} = x^2 - 6x + 9 \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 19x + 28 = 0 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 12x - 7x + 28 = 0 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)(3x-7) = 0 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Omgeem: 4.

3.3.C03

$$a) (x^2 - 9)\sqrt{x+2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = \pm 3 \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2, x = 3.$$

Omgeem: -2; 3.

$$b) (x^2 - 16)\sqrt{x+3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = \pm 4 \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4, x = -3.$$

Omgeem: -3; 4.

3.3.C04

$$a) \frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{x-4} \Leftrightarrow \sqrt{x-4} \left(\frac{1}{\sqrt{x-2}} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow x = 4.$$

Omgeem: 4.

$$b) \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+4}} = \sqrt{x+2} \Leftrightarrow \sqrt{x+2} \left(\frac{1}{\sqrt{x+4}} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

Omgeem: -2.

3.3.C05

$$a) \sqrt{x-5} = \sqrt{x^2-25} \Leftrightarrow \begin{cases} x-5 \geq 0 \\ x-5 = x^2-25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x^2 - x - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ (x-5)(x+4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5.$$

Omgeem: 5.

$$\begin{aligned}
 \text{б). } \sqrt{x-3} &= \sqrt{x^2-9} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-3 = x^2-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2-x-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ (x-3)(x+2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3.
 \end{aligned}$$

Ответ: 3.

3.3.C06

$$\text{а) } (x+6)\sqrt{2x-9} = 3(x+6); \text{ ОДЗ: } x \in [4, 5; +\infty)$$

$$\text{В ОДЗ } x+6 > 0, \sqrt{2x-9} = 3, 2x-9 = 9, x = 9.$$

Ответ: 9.

$$\text{б) } (x+4)\sqrt{3x-5} = 2(x+4); \text{ ОДЗ: } x \in \left[\frac{5}{3}; +\infty\right)$$

$$\text{В ОДЗ } x+4 > 0, \sqrt{3x-5} = 2, 3x-5 = 4, x = 3.$$

Ответ: 3.

3.3.C07

$$\text{а) } \frac{\sqrt{4x^2-9}}{\sqrt{3-2x}} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x > 0 \\ 4x^2-9 = 25(3-2x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ 4x^2+50x-84=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ 2x^2+25x-42=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ 2x^2+28x-3x-42=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ (x+14)(2x-3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ \begin{cases} x = -14 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: -14.

$$\text{б) } \frac{\sqrt{9x^2-4}}{\sqrt{2-3x}} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-3x > 0 \\ 9x^2-4 = 16(2-3x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{2}{3} \\ 9x^2+48x-36=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{2}{3} \\ x = -6; x = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{2}{3} \\ (x+6)(3x-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{2}{3} \\ \begin{cases} x = -6 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: -6.

3.3.C08

$$a) |\sqrt{3x+4}-1|=3 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x+4}-1=3 \\ \sqrt{3x+4}-1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{3x+4}=4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x+4=16, \Leftrightarrow x=4.$$

Ответ: 4.

$$b) |\sqrt{4x-3}-1|=2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4x-3}-1=2 \\ \sqrt{4x-3}-1=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{4x-3}=3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x-3=9 \Leftrightarrow x=3.$$

Ответ: 3.

3.3.C09

$$a) \sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2-4}=0 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(x+2)}+\sqrt{(x-2)(x+2)}=0$$

Левая часть обращается в 0 только при $x=-2$.

Ответ: -2.

$$b) \sqrt{x^2+4x+3}+\sqrt{x^2-9}=0 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(x+3)}+\sqrt{(x-3)(x+3)}=0$$

Левая часть обращается в 0 только при $x=-3$.

Ответ: -3.

3.3.C10

$$a) x-5\sqrt{x}-6=0,$$

$$(\sqrt{x}-6)(\sqrt{x}+1)=0$$

$$\sqrt{x}=6, x=36.$$

Ответ: 36.

$$b) x-6\sqrt{x}-7=0,$$

$$(\sqrt{x}-7)(\sqrt{x}+1)=0$$

$$\sqrt{x}=7, x=49.$$

Ответ: 49.

Уровень D

3.3.D01

$$a) (4x^2-4x-3)\sqrt{4x^2-12x+5}=0 \Leftrightarrow (2x-3)(2x+1)\sqrt{(2x-5)(2x-1)}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2}; x=-\frac{1}{2}; x=\frac{5}{2}; x=\frac{1}{2}. \\ (x-2,5)(x-0,5) \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{1}{2}; \frac{5}{2}; \frac{1}{2}.$$

$$b) (9x^2+6x-3)\sqrt{9x^2+18x+5}=0 \Leftrightarrow (x+1)(9x-3)\sqrt{(3x+1)(3x+5)}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1; x=\frac{1}{3}; x=-\frac{1}{3}; x=-\frac{5}{3} \\ \left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{5}{3}\right) \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \pm\frac{1}{3}; -\frac{5}{3}.$$

3.3.D02

а) $x^2+x+4=t$

$t-2\sqrt{t}-8=0$

$(\sqrt{t}-4)(\sqrt{t}+2)=0$

$t=16$

$x^2+x+4=16$

$x^2+x-12=0$

$(x+4)(x-3)=0$

Ответ: -4; 3.

б) $x^2+x+5=t$

$t-2\sqrt{t}-15=0$

$(\sqrt{t}-5)(\sqrt{t}+3)=0$

$t=25$

$x^2+x+5=25$

$x^2+x-20=0$

$(x+5)(x-4)=0$

Ответ: -5; 4.

3.3.D03

а) $x^3-x=\sqrt{x^2+9}$ и $\sqrt{x^2+9}=\frac{x^3+x}{2}$; $x^3-x=\frac{x^3+x}{2}$; $x^3-3x=0$;

$x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=0$. Среди $\pm\sqrt{3}$ и 0 подходит только $\sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$.

б) $3\sqrt{x^2+6}=x^3-8x$, $3\sqrt{x^2+6}=3x^3-12x$; $x^3-8x=3x^3-12x$, $x^3-2x=0$;

$x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0$. Среди $\pm\sqrt{2}$ и 0 подходит только $-\sqrt{2}$.

Ответ: $-\sqrt{2}$.**3.3.D04**

а) $\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}+9\sqrt{\frac{x+1}{2x-1}}=6$; $\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}=t$; $t^2-6t+9=0$ $(t-3)^2=0$, $t=3$

$\frac{2x-1}{x+1}=3^2=9$, $\frac{2x-1-9x-9}{x+1}=0$, $\frac{7x+10}{x+1}=0$, $x=-\frac{10}{7}$.

Ответ: $-\frac{10}{7}$.

б) $\sqrt{\frac{x-2}{2x+1}}+16\sqrt{\frac{2x+1}{x-2}}=8$; $\sqrt{\frac{x-2}{2x+1}}=t$; $t^2-8t+16=0$ $(t-4)^2=0$, $t=4$

$\frac{x-2}{2x+1}=4^2=16$, $\frac{x-2-32x-16}{2x+1}=0$, $\frac{31x+18}{2x+1}=0$, $x=-\frac{18}{31}$.

Ответ: $-\frac{18}{31}$.**3.3.D05**

а) $\sqrt{3x+4}-\sqrt{4x-7}=1 \Leftrightarrow \sqrt{3x+4}=1+\sqrt{4x-7} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 3x+4=1+2\sqrt{4x-7}+4x-7 \Leftrightarrow 10-x=2\sqrt{4x-7} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 100-20x+x^2=4(4x-7) \\ 10-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-36x+128=0 \\ x \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-32)(x-4)=0 \\ x \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4, x=32 \\ x \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow x=4.$

Ответ: 4.

$$\begin{aligned}
 6) \quad & \sqrt{4x-11} - \sqrt{3x+1} = -1 \Leftrightarrow 1 + \sqrt{4x-11} = \sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow 1 + 2\sqrt{4x-11} + 4x - 11 = 3x + 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{4x-11} = 11 - x \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} 11 - x \geq 0 \\ 4(4x-11) = 121 - 22x + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 11 \\ x = 5, x = 33 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5.
 \end{aligned}$$

Ответ: 5.

3.3.D06

$$a) \sqrt{6x-5} = |x| - |3x-2| + 1 \Leftrightarrow$$

(Заметим, что $6x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{6} \Rightarrow x > 0, 3x-2 > 0$).

$$\begin{aligned}
 & \Leftrightarrow \sqrt{6x-5} = x - 3x + 2 + 1 \Leftrightarrow \sqrt{6x-5} = 3 - 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-5 = 9 - 12x + 4x^2 \\ 3-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 9x + 7 = 0 \\ x \leq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(2x-7) = 0 \\ x \leq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, x=\frac{7}{2} \\ x \leq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=1.
 \end{aligned}$$

Ответ: 1.

$$6) \sqrt{2x-3} = |x| - |3x-4| + 1 \Leftrightarrow$$

(Здесь заметим, что т.к. $2x-3 \geq 0$, то $x > 0, 3x-4 > 0$).

$$\begin{aligned}
 & \Leftrightarrow \sqrt{2x-3} = x - 3x + 4 + 1 \Leftrightarrow \sqrt{2x-3} = 5 - 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 5-2x \geq 0 \\ 2x-3 = 25 - 20x + 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} 5-2x \geq 0 \\ 2x-3 = 25 - 20x + 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{5}{2} \\ 2x^2 - 11x + 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{5}{2} \\ (x-2)(2x-7) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow x=2. \text{ Ответ: 2.}
 \end{aligned}$$

3.3.D07

$$a) x(2x+1) + 2x\sqrt{\frac{2x+1}{x}} + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot \frac{2x+1}{x} + 2 \cdot x\sqrt{\frac{2x+1}{x}} + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x \cdot \sqrt{\frac{2x+1}{x}} + 1 \right)^2 = 0 \Leftrightarrow x\sqrt{\frac{2x+1}{x}} = -1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2x+1}{x}} = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \frac{2x+1}{x} = \frac{1}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 2x^2 + x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ (x+1)(2x-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$$

Ответ: -1.

$$\begin{aligned}
 \text{б) } 3(3x+4) + 4x\sqrt{\frac{3x+4}{x}} + 4 = 0 &\Leftrightarrow \left(x\sqrt{\frac{3x+4}{x}}\right)^2 + 4x\sqrt{\frac{3x+4}{x}} + 4 = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \left(x\sqrt{\frac{3x+4}{x}} + 2\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x\sqrt{\frac{3x+4}{x}} = -2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{3x+4}{x}} = -\frac{2}{x} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{3x+4}{x}} = -\frac{2}{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \frac{3x+4}{x} = \frac{4}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 3x^2 + 4x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ (x+2)(3x-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = -2. \text{ Ответ: } -2.
 \end{aligned}$$

3.3.D08

$$\begin{aligned}
 \text{а) } \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}} + \frac{2}{\sqrt{x^2 - 4x + 29}} &= \frac{7}{5}; \quad \frac{1}{\sqrt{(x-2)^2 + 1}} + \frac{2}{\sqrt{(x-2)^2 + 25}} = \frac{7}{5}; \\
 \max \text{ Л.Ч.} = \text{Л. Ч.}(2) &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{2}{\sqrt{25}} = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}.
 \end{aligned}$$

Ответ: 2.

$$\begin{aligned}
 \text{б) } \frac{2}{\sqrt{x^2 - 6x + 10}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 6x + 13}} &= \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{(x-3)^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{(x-3)^2 + 4}} = \frac{5}{2}; \\
 \max \text{ Л.Ч.} = \text{Л. Ч.}(3) &= \frac{2}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{4}} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.
 \end{aligned}$$

Ответ: 3.

3.3.D09

$$\begin{aligned}
 \text{а) } \sqrt{x^2 - y + 1} + \sqrt{x + 3y - 5} = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y + 1 = 0 \\ x + 3y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + x - 2 = 0 \\ x + 3y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(3x-2) = 0 \\ x + 3y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3}(5-x) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: $(-1; 2), \left(\frac{2}{3}; \frac{13}{9}\right)$.

$$\begin{aligned}
 \text{б) } \sqrt{x^2 + y - 5} + \sqrt{x - 4y + 2} = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y - 5 = 0 \\ x - 4y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + x - 18 = 0 \\ 4y = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 8x + 9x - 18 = 0 \\ 4y = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(4x+9) = 0 \\ y = \frac{1}{4}(x+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{9}{4}; x = 2 \\ y = \frac{1}{4}(x+2) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: $\left(-\frac{9}{4}; -\frac{1}{16}\right), (2; 1)$.

3.3.D10

$$\text{a) } \sqrt{(x-2y+1)^2+1} + \sqrt{(3x-y-2)^2+25} = 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+1=0 \\ 3x-y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x+5=0 \\ 5y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Ответ: (1; 1).

$$\text{б) } \sqrt{(2x-y-1)^2+9} + \sqrt{(x-3y+2)^2+16} = 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y-1=0 \\ x-3y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y-5=0 \\ -5x+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Ответ: (1; 1).

Глава 4. Неравенства

§ 1. Целые алгебраические неравенства

Уровень А

4.1.A01

а) $5x-7 \geq 7x-5$; $2x \leq -2 \Rightarrow x \leq -1$.

Ответ: $(-\infty; -1]$.

б) $3x-8 \geq 8x-3$; $5x \leq -5$, $x \leq -1$.

Ответ: $(-\infty; -1]$.

4.1.A02

а) $3(2x-3)-2(3x-2) \leq 1-4x$

$6x-9-6x+4 \leq 1-4x$; $4x \leq 6$, $x \leq \frac{3}{2}$

Ответ: $\left[-\infty; \frac{3}{2}\right]$.

б) $4(3x-4)-3(4x-3) \leq 1-5x$

$12x-16-12x+9 \leq 1-5x$; $5x \leq 8$; $x \leq \frac{8}{5}$

Ответ: $\left[-\infty; \frac{8}{5}\right]$.

4.1.A03

а) $(2-x)(\sqrt{5}-\sqrt{7}) > 0$, $(x-2)(\sqrt{7}-\sqrt{5}) > 0$, $x > 2$.

Ответ: $(2; +\infty)$.

б) $(1-x)(\sqrt{3}-\sqrt{5}) > 0$; $(x-1)(\sqrt{5}-\sqrt{3}) > 0$, $x > 1$.

Ответ: $(1; +\infty)$.

4.1.A04

а) $(\sqrt{7}-\sqrt{10})x < \frac{6}{\sqrt{7}+\sqrt{10}}$; $x > \frac{6}{(\sqrt{7}-\sqrt{10})(\sqrt{7}+\sqrt{10})}$, $x > -\frac{6}{3} \Leftrightarrow x > -2$

Ответ: $(-2; +\infty)$.

б) $(\sqrt{5}-\sqrt{7})x < \frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$; $x > \frac{4}{(\sqrt{5}-\sqrt{7})(\sqrt{5}+\sqrt{7})}$, $x > -\frac{4}{2} \Leftrightarrow x > -2$

Ответ: $(-2; +\infty)$.

4.1.A05

а) $(2x-3)(5x+2) \geq (2x-3)(5x-2)$

$(2x-3)(5x+2-5x+2) \geq 0$, $2x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$

Ответ: $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

б) $(3x-1)(4x+3) \leq (3x-1)(4x-3)$

$(3x-1)(4x+3-4x+3) \leq 0$, $3x-1 \leq 0$, $x \leq \frac{1}{3}$

Ответ: $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$.

4.1.A06

а) $5x-6 < 2(3-x)-3x$; $5x-6 < 6-2x-3x$;

$10x < 12 \Rightarrow x_{\text{наиб. целое}} = 1$.

Ответ: 1.

б) $3x+4 < -5(3+x)-x$; $3x+4 < -15-5x-x$;

$9x < -19 \Rightarrow x_{\text{наиб. целое}} = -3$.

Ответ: -3.

4.1.A07

$$a) \frac{4+5x}{2} > 3x+1, \frac{4+5x-6x-2}{2} > 0; -x+2 > 0 \Leftrightarrow x < 2.$$

Ответ: $(-\infty; 2)$.

$$b) \frac{3+7x}{4} > 2x+1, \frac{3+7x-8x-4}{4} > 0; -x-1 > 0 \Leftrightarrow x < -1.$$

Ответ: $(-\infty; -1)$.

4.1.A08

$$a) \frac{x}{3} - \frac{3-x}{5} \geq \frac{x+12}{15} - \frac{9}{5}; 5x-9+3x \geq x+12-27; 7x \geq -6; x \geq -\frac{6}{7}$$

Ответ: $\left[-\frac{6}{7}; +\infty\right)$.

$$b) \frac{x}{5} + \frac{x+2}{3} \geq \frac{4x+5}{15} - \frac{2}{3}; 3x+5x+10 \geq 4x+5-10, 4x \geq -15, x \geq -\frac{15}{4}$$

Ответ: $\left[-\frac{15}{4}; +\infty\right)$.

4.1.A09

$$a) (x+7)^2 \leq (x-3)^2, ((x+7)-(x-3))((x+7)+(x-3)) \leq 0, 10(2x+4) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -2.$$

Ответ: $(-\infty; -2]$.

$$b) (x-6)^2 \geq (x-4)^2; ((x-6)-(x-4))((x-6)+(x-4)) \geq 0, -2(2x-10) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 5$$

Ответ: $(-\infty; 5]$.

4.1.A10

$$a) \frac{4+10n}{9} + \frac{4(3-n)}{3} > 0, \frac{4+10n+36-12n}{9} > 0, 40-2n > 0 \Leftrightarrow n < 20$$

Ответ: $(-\infty; 20)$.

$$b) \frac{10+17n}{16} + \frac{5(2-n)}{4} < 0; \frac{10+17n+40-20n}{4} < 0; 50-3n < 0 \Leftrightarrow n > \frac{50}{3}.$$

Ответ: $\left(\frac{50}{3}; +\infty\right)$.

Уровень В**4.1.B01**

$$a) 5x^2+3x \leq 0; x(5x+3) \leq 0; x \in \left[-\frac{3}{5}; 0\right]. \text{ Ответ: } \left[-\frac{3}{5}; 0\right].$$

$$b) 3x^2-8x \leq 0; x(3x-8) \leq 0; x \in \left[0; \frac{8}{3}\right]. \text{ Ответ: } \left[0; \frac{8}{3}\right]$$

4.1.B02

$$a) 36x^2 - 25 \geq 0, (6x-5)(6x+5) \geq 0, \left(x - \frac{5}{6}\right)\left(x + \frac{5}{6}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{5}{6}\right] \cup \left[\frac{5}{6}; +\infty\right)$$

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; -\frac{5}{6}\right] \cup \left[\frac{5}{6}; +\infty\right).$$

$$b) 49x^2 - 16 \geq 0, (7x-4)(7x+4) \geq 0; \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{4}{7}\right] \cup \left[\frac{4}{7}; +\infty\right)$$

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; -\frac{4}{7}\right] \cup \left[\frac{4}{7}; +\infty\right).$$

4.1.B03

$$a) 9 \geq \frac{x^2}{25}; x^2 \leq 9 \cdot 25, (x-15)(x+15) \leq 0, x \in [-15; 15]$$

$$\text{Ответ: } [-15; 15].$$

$$b) 4 \geq \frac{x^2}{64}; x^2 \leq 4 \cdot 64, (x-16)(x+16) \leq 0, x \in [-16; 16]$$

$$\text{Ответ: } [-16; 16].$$

4.1.B04

$$a) \frac{3x^2}{4} \geq \frac{4x}{5}; 15x^2 \geq 16x; x(15x-16) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0] \cup \left[\frac{16}{15}; +\infty\right).$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; 0] \cup \left[\frac{16}{15}; +\infty\right).$$

$$b) \frac{7x^2}{4} \geq \frac{4x}{5}; 35x^2 \geq 16x; x(35x-16) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0] \cup \left[\frac{16}{35}; +\infty\right)$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; 0] \cup \left[\frac{16}{35}; +\infty\right).$$

4.1.B05

$$a) \frac{x^2}{\sqrt{2}} < \sqrt{162}, x^2 < 18 \Leftrightarrow x \in (-\sqrt{18}; \sqrt{18})$$

$$\text{Ответ: } (-\sqrt{18}; \sqrt{18}).$$

$$b) \frac{x^2}{\sqrt{2}} < \sqrt{98}, x^2 < 14 \Leftrightarrow x \in (-\sqrt{14}; \sqrt{14})$$

$$\text{Ответ: } (-\sqrt{14}; \sqrt{14})$$

4.1.B06

a) $x^2 - 19x + 18 \geq 0$, $(x-18)(x-1) \geq 0$, $x \in (-\infty; 1] \cup [18; +\infty)$

Ответ: $(-\infty; 1] \cup [18; +\infty)$.

б) $x^2 - 17x + 16 \geq 0$ $(x-1)(x-16) \geq 0$, $x \in (-\infty; 1] \cup [16; +\infty)$

Ответ: $(-\infty; 1] \cup [16; +\infty)$.

4.1.B07

a) $2x^2 - 9x - 5 < 0$, $2x^2 + x - 10x - 5 < 0$

$x(2x+1) - 5(2x+1) < 0$

$(x-5)(2x+1) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{2}; 5\right)$

Ответ: $\left(-\frac{1}{2}; 5\right)$.

б) $5x^2 + 9x - 2 < 0$, $5x^2 + 10x - x - 2 < 0$

$5x(x+2) - (x+2) < 0$

$(5x-1)(x+2) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-2; \frac{1}{5}\right)$

Ответ: $\left(-2; \frac{1}{5}\right)$.

4.1.B08

a) $(3x-7)^2 \geq (7x-3)^2$, $((3x-7)+(7x-3))((3x-7)-(7x-3)) \geq 0$

$(10x-10)(-4x-4) \geq 0$, $(x-1)(x+1) \leq 0 \Rightarrow x \in [-1; 1]$

Ответ: $[-1; 1]$.

б) $(5x-4)^2 \geq (4x-5)^2$, $((5x-4)+(4x-5))((5x-4)-(4x-5)) \geq 0$

$(9x-9)(x+1) \geq 0$ $(x-1)(x+1) \geq 0$ $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

Ответ: $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

4.1.B09

a) $x^2(x^2+9) \leq 9(x^2+9)$ т.к. $x^2+9 > 0$, то $x^2 \leq 9$, $x \in [-3; 3]$

Ответ: $[-3; 3]$.

б) $x^2(x^2+4) \geq 4(x^2+4)$ т.к. $x^2+4 > 0$, то $x^2 \geq 4$, $x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$

Ответ: $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

4.1.B10

a) $(x-2)(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow x \in [2; +\infty) \cup \{1\}$

Ответ: $\{1\} \cup [2; +\infty)$.

б) $(x-6)(x+2)^2 \geq 0 \Rightarrow x \in [6; +\infty) \cup \{-2\}$

Ответ: $\{-2\} \cup [6; +\infty)$.

Уровень С**4.1.C01**

a) $(x+3)^3 + (x-5)^3 \geq 2(x-1)^3$; $((x+3)+(x-5))((x+3)^2 + (x-5)^2 - (x+3)(x-5)) \geq 2(x-1)^3$;
 $2(x-1)(x^2+6x+9+x^2-10x+25-x^2+2x+15-x^2+2x-1) \geq 0$; $(x-1)(48) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Ответ: $[1; +\infty)$.

$$6) (x+5)^3 + (x-3)^3 \geq 2(x+1)^3; ((x+5) + (x-3))((x+5)^2 + (x-3)^2 - (x-3)(x+5)) \geq 2(x+1)^3;$$

$$2(x+1)(x^2 + 10x + 25 + x^2 - 6x + 9 - 2x - x^2 + 15 - x^2 - 2x - 1) \geq 0; (x+1) \cdot 48 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1.$$

Ответ: $[-1; +\infty)$.

4.1.C02

$$a) (x^2 - 6x + 5)(x+3)^2 \leq 0; (x-3)(x-2)(x+3)^2 \leq 0; x \in [2; 3] \cup \{-3\}$$

Ответ: $\{-3\} \cup [2; 3]$.

$$6) (x^2 - 5x + 4)(x+2)^2 \leq 0; (x-1)(x-4)(x+2)^2 \leq 0; x \in [1; 4] \cup \{-2\}$$

Ответ: $[1; 4] \cup \{-2\}$.

4.1.C03

$$a) 9x^4 \geq 4x^2; x^2(3x-2)(3x+2) \geq 0; x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup \{0\} \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup \{0\} \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

$$6) 9x^2 \leq 16x^4; x^2(4x-3)(4x+3) \geq 0; x \in \left(-\infty; -\frac{3}{4}\right] \cup \{0\} \cup \left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{3}{4}\right] \cup \{0\} \cup \left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$.

4.1.C04

$$a) (x^2 + 4x + 3)(x-2) < (x^2 - 2x - 3)(x+3), (x+1)(x+3)(x-2) < (x+1)(x-3)(x+3),$$

$$(x+1)(x+3)((x-2) - (x-3)) < 0, (x+1)(x+3) < 0 \quad x \in (-3; -1)$$

Ответ: $x \in (-3; -1)$

$$6) (x^2 - 3x + 2)(x-3) < (x^2 - 5x + 6)(x-4), (x-1)(x-2)(x-3) < (x-2)(x-3)(x-4),$$

$$(x-2)(x-3)((x-1) - (x-4)) < 0, (x-2)(x-3) < 0, x \in (2; 3)$$

Ответ: $(2; 3)$.

4.1.C05

$$a) (x^2 + 10x + 16)^2 > (x^2 + 10x + 26)^2,$$

$$((x^2 + 10x + 26) - (x^2 + 10x + 16))(x^2 + 10x + 16 + x^2 + 10x + 26) < 0,$$

$$10(2x^2 + 20x + 42) < 0, x^2 + 10x + 21 < 0, (x+3)(x+7) < 0, x \in (-7; -3)$$

Ответ: $(-7; -3)$.

$$6) (x^2 + 12x + 15)^2 > (x^2 + 12x + 25)^2,$$

$$((x^2 + 12x + 25) - (x^2 + 12x + 15))(x^2 + 12x + 25 + x^2 + 12x + 15) < 0,$$

$$10(2x^2 + 24x + 40) < 0, x^2 + 12x + 20 < 0, (x+2)(x+10) < 0, x \in (-10; -2)$$

Ответ: $(-10; -2)$.

4.1.C06

$$a) (x^2 - 3)(2x^2 - 3x + 1) < (x^2 - 7)(2x^2 - 3x + 1), (2x^2 - 3x + 1)(x^2 - 3 - x^2 + 7) < 0, 4(x-1)(2x-1) < 0$$

$$x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right). \text{ Ответ: } \left(\frac{1}{2}; 1\right).$$

$$6) (x^2-5)(4x^2-x-5) < (x^2-3)(4x^2-x-5), (4x^2-x-5)(x^2-5-x^2+3) < 0, (x+1)(4x-5) > 0$$

$$x \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{5}{4}; +\infty\right). \text{ Ответ: } (-\infty; -1) \cup \left(\frac{5}{4}; +\infty\right).$$

4.1.C07

$$a) (5x-2)(3x^2-x-4) \geq (4x+1)(3x^2-x-4)^2, (3x^2-x-4)^2((5x-2)-(4x+1)) \geq 0,$$

$$(x+1)^2(3x-4)^2(x-3) \geq 0 \quad x \in \{-1\} \cup \left\{\frac{4}{3}\right\} \cup [3; +\infty)$$

$$\text{Ответ: } \{-1\} \cup \left\{\frac{4}{3}\right\} \cup [3; +\infty).$$

$$6) (4x-1)(2x^2-x-3)^2 \geq (3x+4)(2x^2-x-3)^2, (2x^2-x-3)^2((4x-1)-(3x+4)) \geq 0,$$

$$(x+1)^2(2x-3)^2(x-5) \geq 0, \quad x \in \{-1\} \cup \left\{\frac{3}{2}\right\} \cup [5; +\infty)$$

$$\text{Ответ: } \{-1\} \cup \left\{\frac{3}{2}\right\} \cup [5; +\infty).$$

4.1.C08

$$a) (2x-3)(x^2-x-2) \leq (2x-3)(10x^2+11x+2); (2x-3)(10x^2+11x+2-x^2+x+2) \geq 0;$$

$$(2x-3)(9x^2+12x+4) \geq 0; (2x-3)(3x+2)^2 \geq 0 \Rightarrow x \in \left\{-\frac{2}{3}\right\} \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$$

$$\text{Ответ: } \left\{-\frac{2}{3}\right\} \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right).$$

$$6) (3x-1)(x^2+x-2) \leq (3x-1)(9x^2+7x-1); (3x-1)(9x^2+7x-1-x^2-x+2) \geq 0;$$

$$(3x-1)(8x^2+6x+1) \geq 0; (3x-1)(2x+1)(4x+1) \geq 0 \Rightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$$

$$\text{Ответ: } \left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right).$$

4.1.C09

$$a) (4x^2-9)(3x^2-5x-8) \geq (4x^2-9)(2x^2-5x-8); (4x^2-9)(3x^2-5x-8-2x^2+5x+8) \geq 0;$$

$$(2x-3)(2x+3)(x^2) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup \{0\} \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right).$$

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup \{0\} \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right).$$

$$6) (25x^2-4)(3x^2-2x-5) \geq (25x^2-4)(2x^2-2x-5); (25x^2-4)(3x^2-2x-5-2x^2+2x+5) \geq 0;$$

$$(5x-2)(5x+2)x^2 \geq 0, \quad x \in \left(-\infty; -\frac{2}{5}\right] \cup \{0\} \cup \left[\frac{2}{5}; +\infty\right).$$

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; -\frac{2}{5}\right] \cup \{0\} \cup \left[\frac{2}{5}; +\infty\right).$$

4.1.C10

а) $x^3+15x^2 \geq 225(x+15)$; $x^2(x+15) \geq 225(x+15)$; $(x^2-225)(x+15) \geq 0$;
 $(x-15)(x+15)^2 \geq 0$; $x \in \{-15\} \cup [15; +\infty)$

Ответ: $\{-15\} \cup [15; +\infty)$.

б) $x^3-14x^2 \leq 196(x-14)$; $x^2(x-14) \leq 196(x-14)$; $(x^2-196)(x-14) \leq 0$;
 $(x+14)(x-14)^2 \leq 0$; $x \in \{14\} \cup (-\infty; -14]$

Ответ: $(-\infty; -14] \cup \{14\}$.

Уровень D**4.1.D01**

а) $36x^4+35x^2-1 \leq 0$; $(x^2+1)(36x^2-1) \leq 0$; $(x^2+1)(6x-1)(6x+1) \leq 0$;

$x \in \left[-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}\right]$. Ответ: $\left[-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}\right]$.

б) $49x^4+48x^2-1 \leq 0$; $(x^2+1)(49x^2-1) \leq 0$; $(x^2+1)(7x-1)(7x+1) \leq 0$;

$x \in \left[-\frac{1}{7}; \frac{1}{7}\right]$. Ответ: $\left[-\frac{1}{7}; \frac{1}{7}\right]$.

4.1.D02

а) $(3x^2-4x+1)^4 \geq (2x^2-3x+3)^4$; $(3x^2-4x+1)^2 \geq (2x^2-3x+3)^2$;
 $(3x^2-4x+1+2x^2-3x+3)(3x^2-4x+1-2x^2+3x-3) \geq 0$; $(5x^2-7x+4)(x^2-x-2) \geq 0$;
 $5x^2-7x+4 > 0$ при всех x . $(x-2)(x+1) \geq 0$; $x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$

Ответ: $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$

б) $(3x^2-7x+2)^4 \geq (2x^2-5x+10)^4$; $(3x^2-7x+2)^2 - (2x^2-5x+10)^2 \geq 0$;
 $((3x^2-7x+2)+(2x^2-5x+10))(3x^2-7x+2-2x^2+5x-10) \geq 0$; $(5x^2-12x+12)(x^2-2x-8) \geq 0$;
 $5x^2-12x+12 > 0$ при всех x . $(x-4)(x+2) \geq 0$; $x \in (-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$

Ответ: $(-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$.

4.1.D03

а) $(9x^4-9x-10)^3 \leq (8x^4-9x-9)^3$; $9x^4-9x-10 \leq 8x^4-9x-9$; $x^4-1 \leq 0$; $x^4 \leq 1$; $x \in [-1; 1]$.

Ответ: $[-1; 1]$.

б) $(8x^4-8x+7)^3 \leq (7x^4-8x+23)^3$; $8x^4-8x+7 \leq 7x^4-8x+23$; $x^4 \leq 15$; $x \in [-2; 2]$.

Ответ: $[-2; 2]$.

4.1.D04

а) $(3x-4)^6 > (4x-3)^6$; $(3x-4)^2 > (4x-3)^2$; $(3x-4+4x-3)(3x-4-4x+3) > 0$;
 $(7x-7)(-x-1) > 0$; $(x-1)(x+1) < 0$; $x \in (-1; 1)$

Ответ: $(-1; 1)$.

б) $(2x-3)^6 > (3x-2)^6$; $(2x-3)^2 > (3x-2)^2$; $((2x-3)+(3x-2))(3x-2-2x+3) < 0$
 $(5x-5)(x+1) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 1)$

Ответ: $(-1; 1)$.

4.1.D05

а) $(2x-3)^6 < (3-2x)^3$, $(2x-3)^2 < 3-2x$; $4x^2-12x+9 < 3-2x$; $4x^2-10x+6 < 0$;

$2x^2-5x+3 < 0$; $(x-1)(2x-3) < 0$; $x \in \left(1; \frac{3}{2}\right)$. Ответ: $\left(1; \frac{3}{2}\right)$.

б) $(3x-4)^6 < (4-3x)^3$; $(3x-4)^2 < 4-3x$; $9x^2-24x+16 < 4-3x$; $9x^2-21x+12 < 0$;

$3x^2-7x+4 < 0$; $(x-1)(3x-4) < 0$; $x \in \left(1; \frac{4}{3}\right)$. Ответ: $\left(1; \frac{4}{3}\right)$.

4.1.D06

а) $|3x^2-11x+6|((6x^2-11x+3) \geq 0; |(3x-2)(x-3)|(2x-3)(3x-1) \geq 0$;

$x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right) \cup \left\{\frac{2}{3}\right\}$

Ответ: $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup \left\{\frac{2}{3}\right\} \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

б) $|4x^2-12x+5|((5x^2-12x+4) \geq 0; |(2x-5)(2x-1)|(x-2)(5x-2) \geq 0$;

$x \in \left(-\infty; \frac{2}{5}\right] \cup [2; +\infty) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Ответ: $\left(-\infty; \frac{2}{5}\right] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup [2; +\infty)$

4.1.D07

а) $(x^2-4x)^2+2(x^2-4x)-35 < 0$; $(x^2-4x-5)(x^2-4x+7) < 0$; $x^2-4x+4 > 0$ при всех x ;
 $x^2-4x-5 < 0$; $(x-5)(x+1) < 0$; $x \in (-1; 5)$.

Ответ: $(-1; 5)$.

б) $(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)-24 < 0$; $(x^2+3x+6)(x^2+3x-4) < 0$; $x^2+3x+6 > 0$, при всех x ;
 $x^2+3x-4 < 0$; $(x+4)(x-1) < 0$; $x \in (-4; 1)$.

Ответ: $(-4; 1)$.

4.1.D08

а) $(x^2+6x+11)(x^2+6x+13) \leq 8$; $(x^2+6x+11)^2+2(x^2+6x+11)-8 \leq 0$;

$(x^2+6x+11-2)(x^2+6x+11+4) \leq 0$; $(x^2+6x+9)(x^2+6x+15) \leq 0$;

$(x+3)^2((x+3)^2+6) \leq 0 \Rightarrow x = -3$.

Ответ: -3 .

б) $(x^2-8x+18)(x^2-8x+19) \leq 6$; $((x-4)^2+2)((x-4)^2+3) \leq 6$;

$[(x-4)^2+2] \geq 2$, при всех x ; $(x-4)^2+3 \geq 3$, при всех x] $\Leftrightarrow (x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4$.

Ответ: 4 .

4.1.D09

а) $(x^2-4x+7)(y^2+2y+10) \leq 27$; $((x-2)^2+3)((y+1)^2+9) \leq 27$. Неравенство верно, только при $(x-2)^2 = 0$, $(y+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$, $y = -1$

Ответ: $(2; -1)$.

б) $(x^2-2x+9)(y^2+4y+7) \leq 24$; $((x-1)^2+8)((y+2)^2+3) \leq 24$. Неравенство верно, только при $(x-1)^2 = 0$, $(y+2)^2 = 0$, $x = 1$, $y = -2$

Ответ: (1; -2).

4.1.D10

а) $7(x-5)^2+5(y-7)^2 \leq 6$, т.к. x, y целые, то несложно видеть, что неравенство верно, если $x-5 = 0$, и $y-7 = 0$ или $(y-7)^2 = 1 \Rightarrow x = 5$, $y = 7$ или $y = 8$ или $y = 6$.

Ответ: (5; 7); (5; 8); (5; 6).

б) $9(x-11)^2+11(y-9)^2 \leq 10$, т.к. x, y целые, то второе слагаемое > 10 , если $y \neq 9$, т.е. неравенство верно, только если $y = 9$ и $x-11 = 0$ или $(x-11)^2 = 1 \Leftrightarrow y = 9$, $x = 11$ или $x = 12$ или $x = 10$

Ответ: (11; 9); (12; 9); (10; 9).

§ 2. Дробно-рациональные неравенства

Уровень А

4.2.A01

а) $\frac{5}{3x+2} \leq 0$; $x < -\frac{2}{3}$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$.

б) $\frac{4}{2x+3} \geq 0$; $x > -\frac{3}{2}$

Ответ: $\left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

4.2.A02

а) $\frac{2x-1}{4x^2+3} > 0$; $x > \frac{1}{2}$

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

б) $\frac{3x-2}{5x^2+7} < 0$; $x < \frac{2}{3}$

Ответ: $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$.

4.2.A03

а) $\frac{3}{x^2+5} \geq \frac{2x}{x^2+5}$
 $\frac{2x-3}{x^2+5} \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$

Ответ: $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$.

б) $\frac{2}{x^2+4} \leq \frac{3x}{x^2+4}$
 $\frac{3x-2}{x^2+4} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}$

Ответ: $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

4.2.A04

а) $\frac{7x^2}{2-3x} > 0$; $x < \frac{2}{3}$

Ответ: $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$.

б) $\frac{6x^2+1}{3-2x} < 0$; $x > \frac{3}{2}$

Ответ: $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

4.2.A05

$$a) \frac{4x^2}{4x+3} < -\frac{7}{4x+3}$$

$$\frac{4x^2+7}{4\left(x+\frac{3}{4}\right)} < 0; x < -\frac{3}{4}$$

$$\text{Omsvæt: } \left(-\infty; -\frac{3}{4}\right).$$

4.2.A06

$$a) \frac{2}{5x-4} \leq \frac{3}{5x-4}$$

$$\frac{1}{5x-4} \geq 0; x \geq \frac{4}{5}$$

$$\text{Omsvæt: } \left(\frac{4}{5}; +\infty\right).$$

4.2.A07

$$a) \frac{5}{3x-2} < \frac{4}{2-3x}$$

$$\frac{9}{3\left(x-\frac{2}{3}\right)} < 0 \Leftrightarrow x < \frac{2}{3}$$

$$\text{Omsvæt: } \left(-\infty; \frac{2}{3}\right).$$

4.2.A08

$$a) \frac{x^2+4}{4x-1} \geq \frac{1}{4x-1}$$

$$\frac{x^2+3}{4\left(x-\frac{1}{4}\right)} \geq 0; x > \frac{1}{4}$$

$$\text{Omsvæt: } \left(\frac{1}{4}; +\infty\right).$$

4.2.A09

$$a) \frac{2x-7}{3x^2+2} > \frac{x-2}{3x^2+2}$$

$$b) \frac{5x^2}{5x-4} > -\frac{9}{5x-4}$$

$$\frac{5x^2+9}{5\left(x-\frac{4}{5}\right)} > 0; x > \frac{4}{5}$$

$$\text{Omsvæt: } \left(\frac{4}{5}; +\infty\right).$$

$$b) \frac{4}{3x+4} \geq \frac{5}{3x+4}$$

$$\frac{1}{3\left(x+\frac{4}{3}\right)} \leq 0; x < -\frac{4}{3}$$

$$\text{Omsvæt: } \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right).$$

$$b) \frac{2}{4x-3} > \frac{3}{3-4x}$$

$$\frac{5}{4x-3} > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{4}$$

$$\text{Omsvæt: } \left(\frac{3}{4}; +\infty\right).$$

$$b) \frac{x^2+3}{4x+5} \leq \frac{2}{4x+5}$$

$$\frac{x^2+1}{4\left(x+\frac{5}{4}\right)} \leq 0; x < -\frac{5}{4}$$

$$\text{Omsvæt: } \left(-\infty; -\frac{5}{4}\right).$$

$$b) \frac{7x-3}{2x^2+3} < \frac{x-3}{2x^2+3}$$

$$\frac{x-5}{3x^2+2} > 0; x > 5$$

Ответ: $(5; +\infty)$.

$$\frac{6x}{2x^2+3} < 0, x < 0$$

Ответ: $(-\infty; 0)$.

4.2.A10

$$a) \frac{2x-9}{5x+4} \leq \frac{2x-3}{5x+4}$$

$$\frac{6}{5x+4} \geq 0; x > -\frac{4}{5}$$

Ответ: $\left(-\frac{4}{5}; +\infty\right)$.

$$6) \frac{3x-5}{6x+5} \geq \frac{3x+2}{6x+5}$$

$$\frac{7}{6\left(x+\frac{5}{6}\right)} \leq 0; x < -\frac{5}{6}$$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{5}{6}\right)$.

Уровень В

4.2.B01

$$a) \frac{4}{4x^2-9} > 0; \frac{4}{(2x-3)(2x+3)} > 0; x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right).$$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

$$6) \frac{9}{9x^2-4} < 0; \frac{9}{(3x-2)(3x+2)} < 0; x \in \left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

Ответ: $\left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

4.2.B02

$$a) \frac{9x^2-1}{3x^2+4} < 0; \frac{(3x-1)(3x+1)}{3x^2+4} < 0; x \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

Ответ: $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

$$6) \frac{4x^2-1}{4x^2+5} > 0; \frac{(2x-1)(2x+1)}{4x^2+5} > 0; x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

4.2.B03

$$a) \frac{4}{x^2-16} \geq \frac{3}{16-x^2}; \frac{7}{(x-4)(x+4)} \geq 0; x \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty).$$

Ответ: $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.

$$6) \frac{5}{x^2-81} \leq \frac{2}{81-x^2}; \frac{7}{(x-9)(x+9)} \leq 0; x \in (-9; 9)$$

Омвем: $(-9; 9)$.

4.2.B04

$$a) \frac{2x^2+11}{25-x^2} \leq 0; \frac{2x^2+11}{(x-5)(x+5)} \geq 0; x \in (-\infty; -5) \cup (5; +\infty).$$

Омвем: $(-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$.

$$6) \frac{4x^2+13}{16-x^2} \geq 0; \frac{4x^2+13}{(x-4)(x+4)} \geq 0; x \in (-4; 4).$$

Омвем: $(-4; 4)$.

4.2.B05

$$a) \frac{7x^2}{49x^2-36} > -\frac{9}{49x^2-36}; \frac{7x^2+9}{(7x-6)(7x+6)} > 0;$$

$$x \in \left(-\infty; -\frac{6}{7}\right) \cup \left(\frac{6}{7}; +\infty\right). \text{ Омвем: } \left(-\infty; -\frac{6}{7}\right) \cup \left(\frac{6}{7}; +\infty\right).$$

$$6) \frac{4x^2}{36x^2-49} < -\frac{9}{36x^2-49}; \frac{4x^2+9}{(6x-7)(6x+7)} < 0; x \in \left(-\frac{7}{6}; \frac{7}{6}\right)$$

$$\text{Омвем: } \left(-\frac{7}{6}; \frac{7}{6}\right).$$

4.2.B06

$$a) \frac{6}{x(x-3)} < \frac{5}{x(3-x)}; \frac{11}{x(x-3)} < 0; x \in (0; 3)$$

Омвем: $(0; 3)$.

$$6) \frac{5}{x(x-2)} > \frac{4}{x(2-x)}; \frac{9}{x(x-2)} > 0; x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$$

Омвем: $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

4.2.B07

$$a) \frac{x^2-x-6}{2x^2+9} \geq 0; \frac{(x-3)(x+2)}{2x^2+9} \geq 0; x \in (-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$$

Омвем: $(-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$.

$$6) \frac{x^2+x-12}{3x^2+9} \leq 0; \frac{(x-3)(x+4)}{3x^2+5} \leq 0; x \in [-4; 3]$$

Омвем: $[-4; 3]$.

4.2.B08

$$a) \frac{2}{x^2 - 2x - 24} < \frac{3}{x^2 - 2x - 24}; \frac{1}{(x-3)(x+4)} > 0; x \in (-\infty; -4) \cup (6; +\infty).$$

Ответ: $(-\infty; -4) \cup (6; +\infty)$

$$б) \frac{3}{x^2 - 3x - 18} > \frac{4}{x^2 - 3x - 18}; \frac{1}{(x-6)(x+3)} < 0; x \in (-3; 6)$$

Ответ: $(-3; 6)$.

4.2.B09

$$a) \frac{x^2 - 20}{5x^2 + 12} \leq \frac{x - 8}{5x^2 + 12}; \frac{x^2 - x - 12}{5x^2 + 12} \leq 0; \frac{(x-4)(x+3)}{5x^2 + 12} \leq 0; x \in [-3; 4]$$

Ответ: $[-3; 4]$.

$$б) \frac{x^2 - 21}{4x^2 + 11} \geq \frac{9 - x}{4x^2 + 11}; \frac{x^2 + x - 30}{4x^2 + 11} \geq 0; \frac{(x+6)(x-5)}{4x^2 + 11} \geq 0;$$

$$x \in (-\infty; -6] \cup [5; +\infty).$$

Ответ: $(-\infty; -6] \cup [5; +\infty)$.

4.2.B10

$$a) \frac{(4x-3)^2}{7x^2+3} \geq \frac{x^2}{7x^2+3}; \frac{(4x-3+x)(4x-3-x)}{7x^2+3} \geq 0; \frac{(5x-3)(3x-3)}{7x^2+3} \geq 0;$$

$$x \in \left(-\infty; \frac{3}{5}\right] \cup [1; +\infty). \text{ Ответ: } \left(-\infty; \frac{3}{5}\right] \cup [1; +\infty).$$

$$б) \frac{x^2}{3x^2+7} \geq \frac{(3x-2)^2}{3x^2+7}; \frac{(3x-2-x)(3x-2+x)}{3x^2+7} \leq 0; \frac{(2x-2)(4x-2)}{3x^2+7} \leq 0;$$

$$x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]. \text{ Ответ: } \left[\frac{1}{2}; 1\right].$$

Уровень С**4.2.C01**

$$a) \frac{2x^2}{3x+7} \leq 0 \cdot x \in \{0\} \cup \left(-\infty; -\frac{7}{3}\right). \quad б) \frac{3x^2}{2x+5} \leq 0; x \in \{0\} \cup \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right)$$

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; -\frac{7}{3}\right) \cup \{0\}.$$

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right) \cup \{0\}.$$

4.2.C02

$$a) \frac{(x+4)^2}{x^2-9} \leq 0; \frac{(x+4)^2}{(x-3)(x+3)} \leq 0; x \in (-3; 3) \cup \{-4\}.$$

Ответ: $\{-4\} \cup (-3; 3)$.

$$6) \frac{(x+7)^2}{x^2-36} \leq 0; \frac{(x+7)^2}{(x-6)(x+6)} \leq 0; x \in (-6; 6) \cup \{-7\}.$$

Ответ: $(-6; 6) \cup \{-7\}$.

4.2.C03

$$a) \frac{16-x^2}{(x-3)^2} \geq 0; \frac{(x-4)(x+4)}{(x-3)^2} \leq 0; x \in [-4; 3) \cup (3; 4]$$

Ответ: $[-4; 3) \cup (3; 4]$.

$$6) \frac{25-x^2}{(x-4)^2} \geq 0; \frac{(x-5)(x+5)}{(x-4)^2} \leq 0; x \in [-5; 4) \cup (4; 5]$$

Ответ: $[-5; 4) \cup (4; 5]$.

4.2.C04

$$a) \frac{4x}{16x^2-25} > \frac{5}{16x^2-25}; \frac{4x-5}{(4x-5)(4x+5)} > 0; x \in \left(-\frac{5}{4}; \frac{5}{4}\right) \cup \left(\frac{5}{4}; +\infty\right).$$

Ответ: $\left(-\frac{5}{4}; \frac{5}{4}\right) \cup \left(\frac{5}{4}; +\infty\right)$.

$$6) \frac{3x}{9x^2-16} > \frac{4}{9x^2-16}; \frac{3x-4}{(3x-4)(3x+4)} > 0; x \in \left(-\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right) \cup \left(\frac{4}{3}; +\infty\right).$$

Ответ: $\left(-\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right) \cup \left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$.

4.2.C05

$$a) \frac{3x-2}{4x^2+9} \leq \frac{3x-2}{4x^2+5}; \frac{(3x-2)(4x^2+9-4x^2-5)}{(4x^2+9)(4x^2+5)} \geq 0; \frac{4(3x-2)}{(4x^2+9)(4x^2+5)} \geq 0;$$

$x \in \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$. Ответ: $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

$$6) \frac{4x-3}{3x^2+8} \geq \frac{4x-3}{3x^2+5}; \frac{(4x-3)(3x^2+8-3x^2-5)}{(3x^2+8)(3x^2+5)} \leq 0; \frac{3(4x-3)}{(3x^2+8)(3x^2+5)} \leq 0;$$

$x \in \left(-\infty; \frac{3}{4}\right]$. Ответ: $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right]$.

4.2.C06

$$a) \frac{4}{x^2-4x} < \frac{1}{x-4}; \frac{4-x}{x(x-4)} < 0; \frac{x-4}{(x-4)x} > 0; x \in (0; +\infty) \setminus \{4\}.$$

Ответ: $(0; 4) \cup (4; +\infty)$.

$$6) \frac{6}{x^2-6x} < \frac{1}{x-6}; \frac{6-x}{x(x-6)} < 0; \frac{x-6}{x(x-6)} > 0; x \in (0; +\infty) \setminus \{6\}.$$

Ответ: $(0; 6) \cup (6; +\infty)$.

4.2.C07

$$a) \frac{1}{2-x} < \frac{x^2-5}{x-2}; \frac{(x^2-4)}{x-2} > 0; \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} > 0; x \in (-2; +\infty) \setminus \{2\}.$$

Ответ: $(-2; 2) \cup (2; +\infty)$.

$$6) \frac{2}{3-x} < \frac{x^2-11}{x-3}; \frac{x^2-9}{x-3} > 0; \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} > 0; x \in (-3; +\infty) \setminus \{3\}.$$

Ответ: $(-3; 3) \cup (3; +\infty)$.

4.2.C08

$$a) \frac{x^3-3x^2-10x}{x^2-3x-10} \geq 0; \frac{x(x-5)(x+2)}{(x-5)(x+2)} \geq 0; x \in [0; +\infty) \setminus \{5\}.$$

Ответ: $[0; 5) \cup (5; +\infty)$.

$$6) \frac{x^3-4x^2-12x}{x^2-4x-12} \leq 0; \frac{x(x-6)(x+2)}{(x-6)(x+2)} \leq 0; x \in (-\infty; 0] \setminus \{-2\}.$$

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (-2; 0]$.

4.2.C09

$$a) \frac{x^3-9x^2+20x}{x-4} \leq 0; \frac{x(x-4)(x-5)}{x-4} \leq 0; x \in [0; 5] \setminus \{4\}.$$

Ответ: $[0; 4) \cup (4; 5]$.

$$6) \frac{x^3-8x^2+15x}{x-3} \leq 0; \frac{x(x-3)(x-5)}{x-3} \leq 0; x \in [0; 5] \setminus \{3\}.$$

Ответ: $[0; 3) \cup (3; 5]$.

4.2.C10

$$a) \frac{1}{x-7} > \frac{1}{x+8}; \frac{x+8-x+7}{(x-7)(x+8)} > 0; \frac{15}{(x-7)(x+8)} > 0;$$

$$x \in (-\infty; -8) \cup (7; +\infty)$$

Ответ: $(-\infty; -8) \cup (7; +\infty)$.

$$6) \frac{1}{x-8} < \frac{1}{x+7}; \frac{x+7-x+8}{(x-8)(x+7)} < 0; \frac{15}{(x-8)(x+7)} < 0;$$

$$x \in (-7; 8)$$

Ответ: $(-7; 8)$.

Уровень D

4.2.D01

$$a) \frac{x^3 - 4x^2 - 25x + 100}{4 - x} \geq 0; \frac{x^2(x - 4) - 25(x - 4)}{4 - x} \geq 0; \frac{(x^2 - 25)(x - 4)}{x - 4} \leq 0;$$

$x \in [-5; 5] \setminus \{4\}$. Ответ: $[-5; 4) \cup (4; 5]$.

$$6) \frac{x^3 - 3x^2 - 16x + 48}{3 - x} \geq 0; \frac{x^2(x - 3) - 16(x - 3)}{x - 3} \leq 0; \frac{(x - 4)(x + 4)(x - 3)}{x - 3} \leq 0;$$

$x \in [-4; 4] \setminus \{3\}$. Ответ: $[-4; 4] \setminus \{3\}$.

4.2.D02

$$a) \frac{(x^2 - 3x)^2}{9x^2 + 2} \geq \frac{(x^2 - 3x + 4)^2}{9x^2 + 2};$$

$$\frac{(x^2 + 3x + 4 - x^2 + 3x)(x^2 - 3x + 4 + x^2 - 3x)}{9x^2 + 2} \leq 0;$$

$$\frac{4(x^2 - 3x + 2)}{9x^2 + 2} \leq 0; \frac{(x - 1)(x - 2)}{9x^2 + 2} \leq 0; x \in [1; 2].$$

Ответ: $[1; 2]$.

$$6) \frac{(x^2 + 2x)^2}{8x^2 + 3} \geq \frac{(x^2 + 2x - 6)^2}{8x^2 + 3};$$

$$\frac{(x^2 + 2x + x^2 + 2x - 6)(x^2 + 2x - x^2 - 2x + 6)}{8x^2 + 3} \geq 0;$$

$$\frac{2(x^2 + 2x - 3)(6)}{8x^2 + 3} \geq 0; \frac{(x + 3)(x - 1)}{8x^2 + 3} \geq 0; x \in (-\infty; -3] \cup [1; +\infty).$$

Ответ: $(-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$.

4.2.D03

$$a) \frac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 + 5} \leq \frac{x^2 - 4x + 3}{3x^2 + 5}; \frac{(x - 1)(x - 3)(3x^2 + 5 - 2x^2 - 5)}{(2x^2 + 5)(3x^2 + 5)} \leq 0;$$

$$\frac{x^2(x - 1)(x - 3)}{(2x^2 + 5)(3x^2 + 5)} \leq 0; x \in [1; 3] \cup \{0\}.$$

Ответ: $\{0\} \cup [1; 3]$.

$$6) \frac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 + 7} \leq \frac{x^2 - 3x + 2}{4x^2 + 7}; \frac{(x - 1)(x - 2)(4x^2 + 7 - 3x^2 - 7)}{(3x^2 + 7)(4x^2 + 7)} \leq 0;$$

$$\frac{x^2(x - 1)(x - 2)}{(3x^2 + 7)(4x^2 + 7)} \leq 0; x \in [1; 2] \cup \{0\}.$$

Ответ: $\{0\} \cup [1; 2]$.

4.2.D04

$$a) \frac{x-2}{x+7} > \frac{x-5}{x+4}; \frac{(x-2)(x+4) - (x-5)(x+7)}{(x+7)(x+4)} > 0;$$

$$\frac{x^2 - 2x + 4x - 8 - x^2 - 2x + 35}{(x+7)(x+4)} > 0; \frac{27}{(x+7)(x+4)} > 0;$$

$$x \in (-\infty; -7) \cup (-4; +\infty)$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; -7) \cup (-4; +\infty).$$

$$b) \frac{x-3}{x+6} < \frac{x-4}{x+5}; \frac{(x-3)(x+5) - (x-4)(x+6)}{(x+6)(x+5)} < 0;$$

$$\frac{x^2 + 2x - 15 - x^2 - 2x + 24}{(x+6)(x+5)} < 0; \frac{9}{(x+6)(x+5)} < 0; x \in (-6; -5)$$

$$\text{Ответ: } (-6; -5).$$

4.2.D05

$$a) \left(\frac{3x-4}{x+2} \right)^2 + \left(\frac{3x+4}{x-2} \right)^2 \leq 2 \frac{9x^2-16}{x^2-4};$$

$$\frac{(3x-4)^2(x-2)^2 + (3x+4)^2(x+2)^2 - 2(3x-4)(3x+4)(x+2)(x-2)}{(x^2-4)^2} \leq 0;$$

$$\frac{((3x-4)(x-2) - (3x+4)(x+2))^2}{(x^2-4)^2} \leq 0; \frac{(3x^2-10x+8-3x^2-10x-8)^2}{(x^2-4)^2} \leq 0;$$

$$\frac{(-20x)^2}{(x^2-4)^2} \leq 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$\text{Ответ: } 0.$$

$$b) \left(\frac{2x-3}{x+3} \right)^2 + \left(\frac{2x+3}{x-3} \right)^2 \leq 2 \frac{4x^2-9}{x^2-9};$$

$$\frac{(2x-3)^2(x-3)^2 + (x+3)^2(2x+3)^2 - 2(2x-3)(2x+3)(x-3)(x+3)}{(x^2-9)^2} \leq 0;$$

$$\frac{((2x-3)(x-3) - (x+3)(2x+3))^2}{(x^2-9)^2} \leq 0; \frac{(2x^2-9x+9-2x^2-9x-9)^2}{(x^2-9)^2} \leq 0;$$

$$\Leftrightarrow \frac{(-18x)^2}{(x^2-9)^2} \leq 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$\text{Ответ: } 0.$$

4.2.D06

$$\text{a) } \frac{9}{(4x+5)^2} - \frac{18}{4x+5} + 8 < 0; \frac{8(4x+5)^2 - 18(4x+5) + 9}{(4x+5)^2} < 0;$$

$$\frac{(4(4x+5)-3)(2(4x+5)-3)}{(4x+5)^2} < 0; \frac{(16x+17)(8x+7)}{(4x+5)^2} < 0; x \in \left(-\frac{17}{16}; -\frac{7}{8}\right).$$

Ответ: $\left(-\frac{17}{16}; -\frac{7}{8}\right)$.

$$\text{б) } \frac{4}{(3x+4)^2} - \frac{16}{3x+4} + 15 > 0; \frac{15(3x+4)^2 - 16(3x+4) + 4}{(3x+4)^2} > 0, \text{ т.к.}$$

$$15t^2 - 16t + 4 = (5t-2)(3t-2); \frac{(5(3x+4)-2)(3(3x+4)-2)}{(3x+4)^2} > 0;$$

$$\frac{(15x+18)(9x+10)}{(3x+4)^2} > 0; x \in \left(-\infty; -\frac{18}{15}\right) \cup \left(-\frac{10}{9}; +\infty\right) \setminus \left\{-\frac{4}{3}\right\}.$$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{4}{3}\right) \cup \left(-\frac{4}{3}; -\frac{6}{5}\right) \cup \left(-\frac{10}{9}; +\infty\right)$.

4.2.D07

$$\text{a) } \frac{3}{x^2+8x+17} + \frac{4}{x^2+8x+18} \geq 5; \frac{3}{(x+4)^2+1} \leq 3, \text{ при любом } x;$$

$$\frac{4}{(x+4)^2+2} \leq 2, \text{ при любом } x \Rightarrow \text{сумма} \geq 5 \text{ только при } x = -4.$$

Ответ: -4.

$$\text{б) } \frac{2}{x^2+10x+27} + \frac{5}{x^2+10x+26} \geq 6; \frac{2}{(x+5)^2+2} < 1, \text{ при любом } x, \text{ кроме } -5;$$

$$\frac{5}{(x+5)^2+1} < 5, \text{ при любом } x, \text{ кроме } -5 \Rightarrow x = -5.$$

Ответ: -5.

4.2.D08

$$\text{a) } x^2+4x+6 \leq \frac{2}{y^2-6y+10}; (x+2)^2+2 \leq \frac{2}{(y-3)^2+1}, \text{ несложно видеть,}$$

что неравенство верно, только если $x+2=0$ и $y-3=0 \Rightarrow x=-2, y=3$

Ответ: $(-2; 3)$.

$$\text{б) } x^2-6x+11 \leq \frac{4}{y^2+4y+6}; (x-3)^2+2 \leq \frac{4}{(y+2)^2+2}, \text{ несложно видеть,}$$

что неравенство верно, только если $x-3=0, y+2=0 \Rightarrow x=3, y=-2$

Ответ: $(3; -2)$.

4.2.D09

а) $\frac{1}{2(x+5)^2} + \frac{2}{5(y-3)^2} \geq \frac{9}{10}$, т.к. x и y целые, то $\frac{1}{2(x+5)^2} \leq \frac{1}{8}, (x+5)^2 \neq 1$;

$\frac{2}{5(y-3)^2} \leq \frac{2}{20} = \frac{1}{10}, (y-3)^2 \neq 1$, т.е. неравенство верно только при

$x = \pm 1 - 5; y = \pm 1 + 3$

Ответ: $(-4; 2); (-4; 4); (-6; 2); (-6; 4)$.

б) $\frac{3}{5(x+2)^2} + \frac{1}{2(y-4)^2} \geq \frac{11}{10}$, аналогично, т.к. x, y — целые, то

$\frac{3}{5(x+2)^2} \leq \frac{3}{5 \cdot 4} = \frac{3}{20}$, при $(x+2)^2 \neq 1$, $\frac{1}{2(y-4)^2} \leq \frac{1}{8}$, при $(y-4)^2 \neq 1$,

т.е. неравенство верно, только если $x = \pm 1 - 2, y = \pm 1 + 4$

Ответ: $(-1; 3); (-1; 5); (-3; 3); (-3; 5)$.

4.2.D10

а) $\frac{1}{9(x-7)^2 + 7(y-9)^2} \geq \frac{1}{8}$, т.к. x, y — целые, то $9(x-7)^2 \geq 9$ при

$x \neq 7, 7(y-9)^2 > 8, y \neq 9, 10, 8$. Тогда неравенство верно, только если $x = 7$, а $y = 8, 10$. (Пара $(7; 9)$ не решение, т.к. является нулем знаменателя.)

Ответ: $(7; 8), (7; 10)$.

б) $\frac{1}{7(x-5)^2 + 5(y-7)^2} \geq \frac{1}{6}$, т.к. x, y — целые, то $7(x-5)^2 \geq 7, x \neq 5$

$5(y-7)^2 > 6, y \neq 6, 7, 8 \Rightarrow$ неравенство верно, только если $x = 5, y = 6, 8$. (Пара $(5; 7)$ не решение, т.к. является нулем знаменателя.)

Ответ: $(5; 6); (5; 8)$.

§ 3. Иррациональные неравенства

Уровень А

4.3.A01

а) $3\sqrt{2x-9} > 0; 2x-9 > 0; x > \frac{9}{2}$

Ответ: $\left(\frac{9}{2}; +\infty\right)$.

б) $7\sqrt{3x-8} > 0; 3x-8 > 0, x > \frac{8}{3}$

Ответ: $\left(\frac{8}{3}; +\infty\right)$

4.3.A02

а) $\sqrt{5x+8} \leq 0; 5x+8 = 0; x = -\frac{8}{5}$

Ответ: $-\frac{8}{5}$.

б) $\sqrt{8x+5} \leq 0; 8x+5 = 0; x = -\frac{5}{8}$

Ответ: $-\frac{5}{8}$. Т.к. корень всегда неотрицателен

4.3.A03

a) $(x^2 + 8)\sqrt{x+8} > 0, x > -8$

Ответ: $(-8; +\infty)$.

б) $(x^2 + 6)\sqrt{x+6} > 0, x > -6$

Ответ: $(-6; +\infty)$.

4.3.A04

a) $\frac{\sqrt{12x^2+11}}{12-11x} \leq 0; x > \frac{12}{11}$

Ответ: $\left(\frac{12}{11}; +\infty\right)$.

б) $\frac{\sqrt{16x^2+15}}{16-15x} \leq 0; x > \frac{16}{15}$

Ответ: $\left(\frac{16}{15}; +\infty\right)$.

4.3.A05

a) $\frac{7}{\sqrt{3x-5}} \geq \frac{5}{\sqrt{3x-5}}; \frac{2}{\sqrt{3x-5}} \geq 0; x > \frac{5}{3}$. Ответ: $\left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$.

б) $\frac{5}{\sqrt{4x-7}} \geq \frac{3}{\sqrt{4x-7}}; \frac{2}{\sqrt{4x-7}} \geq 0; x > \frac{7}{4}$. Ответ: $\left(\frac{7}{4}; +\infty\right)$.

4.3.A06

a) $\frac{6x}{\sqrt{2x^2+11}} \leq \frac{7}{\sqrt{2x^2+11}}; \frac{6x-7}{\sqrt{2x^2+11}} \leq 0; x \leq \frac{7}{6}$. Ответ: $\left(-\infty; \frac{7}{6}\right]$.

б) $\frac{4x}{\sqrt{3x^2+10}} \leq \frac{9}{\sqrt{3x^2+10}}; \frac{4x-9}{\sqrt{3x^2+10}} \leq 0; x \leq \frac{9}{4}$. Ответ: $\left(-\infty; \frac{9}{4}\right]$.

4.3.A07

a) $\frac{\sqrt{4x^2+7}}{2x-5} \geq \frac{3}{5-2x}; \frac{\sqrt{4x^2+7}+3}{2x-5} \geq 0; x > \frac{5}{2}$. Ответ: $\left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

б) $\frac{\sqrt{5x^2+9}}{3x-7} \geq \frac{2}{7-3x}; \frac{\sqrt{5x^2+9}+2}{3x-7} \geq 0; x > \frac{7}{3}$. Ответ: $\left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$.

4.3.A08

a) $\frac{7x+5}{\sqrt{7x^2+5}} > 0; x > -\frac{5}{7}$

Ответ: $\left(-\frac{5}{7}; +\infty\right)$.

б) $\frac{4x+3}{\sqrt{4x^2+3}} > 0; x > -\frac{3}{4}$

Ответ: $\left(-\frac{3}{4}; +\infty\right)$.

4.3.A09

a) $\frac{15x+8}{\sqrt{13x^2+12}} < \frac{2x-5}{\sqrt{13x^2+12}}; \frac{13x+13}{\sqrt{13x^2+12}} < 0; x < -1$. Ответ: $(-\infty; -1)$.

б) $\frac{12x+7}{\sqrt{11x^2+10}} > \frac{2x-3}{\sqrt{11x^2+10}}; \frac{10x+10}{\sqrt{11x^2+10}} > 0; x > -1$. Ответ: $(-1; +\infty)$.

4.3.A10

$$a) \frac{4}{\sqrt{2x^2+1}} \geq \frac{5x}{\sqrt{2x^2+1}}; \frac{5x-4}{\sqrt{2x^2+1}} \leq 0; x \leq \frac{4}{5}. \text{ Ответ: } \left(-\infty; \frac{4}{5}\right].$$

$$b) \frac{3}{\sqrt{4x^2+3}} \leq \frac{2x}{\sqrt{4x^2+3}}; \frac{2x-3}{\sqrt{4x^2+3}} \geq 0; x \geq \frac{3}{2}. \text{ Ответ: } \left[\frac{3}{2}; +\infty\right).$$

Уровень В**4.3.B01**

$$a) \frac{5}{\sqrt{16x^2-25}} > 0; \frac{5}{\sqrt{(4x+5)(4x-5)}} > 0; x \in \left(-\infty; -\frac{5}{4}\right) \cup \left(\frac{5}{4}; +\infty\right).$$

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; -\frac{5}{4}\right) \cup \left(\frac{5}{4}; +\infty\right).$$

$$b) \frac{3}{\sqrt{36x^2-9}} > 0; \frac{3}{\sqrt{(6x-3)(6x+3)}} > 0; x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

4.3.B02

$$a) \frac{4x^2-9}{\sqrt{13x^2+11}} < 0; \frac{(2x-3)(2x+3)}{\sqrt{13x^2+11}} < 0; x \in \left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

$$b) \frac{9x^2-4}{\sqrt{14x^2+11}} > 0; \frac{(3x-2)(3x+2)}{\sqrt{14x^2+11}} > 0; x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right).$$

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right).$$

4.3.B03

$$a) (36x^2-49)\sqrt{36x^2+49} \geq 0; (6x-7)(6x+7)\sqrt{36x^2+49} \geq 0;$$

$$x \in \left(-\infty; -\frac{7}{6}\right] \cup \left[\frac{7}{6}; +\infty\right). \text{ Ответ: } \left(-\infty; -\frac{7}{6}\right] \cup \left[\frac{7}{6}; +\infty\right).$$

$$b) (25x^2-36)\sqrt{25x^2+36} \leq 0; (5x-6)(5x+6)\sqrt{25x^2+36} \leq 0;$$

$$x \in \left[-\frac{6}{5}; \frac{6}{5}\right]. \text{ Ответ: } \left[-\frac{6}{5}; \frac{6}{5}\right]$$

4.3.B04

$$a) \frac{\sqrt{3x^2+7}}{16-x^2} < 0; \frac{\sqrt{3x^2+7}}{(x-4)(x+4)} > 0; x \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty).$$

Омгем: $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.

$$b) \frac{\sqrt{14x^2+3}}{49-x^2} > 0; \frac{\sqrt{14x^2+3}}{(x-7)(x+7)} < 0; x \in (-7; 7).$$

Омгем: $(-7; 7)$.

4.3.B05

$$a) \frac{5x^2}{\sqrt{25x^2-4}} > -\frac{2}{\sqrt{25x^2-4}}; \frac{5x^2+2}{\sqrt{(5x-2)(5x+2)}} > 0;$$

$$x \in \left(-\infty; -\frac{2}{5}\right) \cup \left(\frac{2}{5}; +\infty\right). \text{ Омгем: } \left(-\infty; -\frac{2}{5}\right) \cup \left(\frac{2}{5}; +\infty\right).$$

$$b) \frac{4x^2}{\sqrt{16x^2-9}} > -\frac{3}{\sqrt{16x^2-9}}; \frac{4x^2+3}{\sqrt{(4x-3)(4x+3)}} > 0;$$

$$x \in \left(-\infty; -\frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}; +\infty\right). \text{ Омгем: } \left(-\infty; -\frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}; +\infty\right).$$

4.3.B06

$$a) 4x^2\sqrt{4x^2+9} \geq 9\sqrt{4x^2+9}; (4x^2-9)\sqrt{4x^2+9} \geq 0;$$

$$(2x-3)(2x+3)\sqrt{4x^2+9} \geq 0; x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right).$$

$$\text{Омгем: } \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right).$$

$$b) 9x^2\sqrt{9x^2+4} \leq 4\sqrt{9x^2+4}; (9x^2-4)\sqrt{9x^2+4} \leq 0;$$

$$(3x-2)(3x+2)\sqrt{9x^2+4} \leq 0; x \in \left[-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right].$$

$$\text{Омгем: } \left[-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right].$$

4.3.B07

$$a) \sqrt{\frac{x^2-x-30}{6x^2+7}} \geq 0; \sqrt{\frac{(x-6)(x+5)}{6x^2+7}} \geq 0; x \in (-\infty; -5] \cup [6; +\infty)$$

Омгем: $(-\infty; -5] \cup [6; +\infty)$.

$$6) \sqrt{\frac{x^2 + x - 42}{5x^2 + 6}} \geq 0; \sqrt{\frac{(x+7)(x-6)}{5x^2 + 6}} \geq 0; x \in (-\infty; -7] \cup [6; +\infty).$$

Ответ: $(-\infty; -7] \cup [6; +\infty)$.

4.3.B08

$$a) \frac{4}{\sqrt{x^2 + 3x - 18}} < \frac{9}{\sqrt{x^2 + 3x - 18}}; \frac{5}{\sqrt{(x+6)(x-3)}} > 0;$$

$$x \in (-\infty; -6) \cup (3; +\infty).$$

Ответ: $(-\infty; -6) \cup (3; +\infty)$.

$$6) \frac{4}{\sqrt{x^2 + 5x - 24}} < \frac{7}{\sqrt{x^2 + 5x - 24}}; \frac{3}{\sqrt{(x+8)(x-3)}} > 0;$$

$$x \in (-\infty; -8) \cup (3; +\infty).$$

Ответ: $(-\infty; -8) \cup (3; +\infty)$.

4.3.B09

$$a) \frac{x^2 + 24}{\sqrt{15x^2 + 11}} \leq \frac{10x}{\sqrt{15x^2 + 11}}; \frac{x^2 - 10x + 24}{\sqrt{15x^2 + 11}} \leq 0; \frac{(x-6)(x-4)}{\sqrt{15x^2 + 11}} \leq 0; x \in [4; 6].$$

Ответ: $[4; 6]$.

$$6) \frac{x^2 + 20}{\sqrt{14x^2 + 17}} \geq \frac{12x}{\sqrt{14x^2 + 17}}; \frac{x^2 - 12x + 20}{\sqrt{14x^2 + 17}} \geq 0; \frac{(x-2)(x-10)}{\sqrt{14x^2 + 17}} \geq 0;$$

$$x \in (-\infty; 2] \cup [10; +\infty).$$

Ответ: $(-\infty; 2] \cup [10; +\infty)$.

4.3.B10

$$a) \frac{(x-3)^2}{\sqrt{3x^2 + 4}} \geq \frac{(2x-5)^2}{\sqrt{3x^2 + 4}}; \frac{(2x-5-x+3)(2x-5+x-3)}{\sqrt{3x^2 + 4}} \leq 0;$$

$$\frac{(x-2)(3x-8)}{\sqrt{3x^2 + 4}} \leq 0; x \in \left[2; \frac{8}{3}\right]$$

Ответ: $\left[2; \frac{8}{3}\right]$.

$$6) \frac{(x-4)^2}{\sqrt{5x^2 + 6}} \leq \frac{(3x-8)^2}{\sqrt{5x^2 + 6}}; \frac{(3x-8-x+4)(3x-8+x-4)}{\sqrt{5x^2 + 6}} \geq 0;$$

$$\frac{(2x-4)(4x-12)}{\sqrt{5x^2 + 6}} \geq 0; x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty),$$

Ответ: $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$.

4.3.C01

$$a) (3x-4)\sqrt{4x-3} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4 \leq 0 \\ 4x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{4}{3} \\ x \geq \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow x \in \left[\frac{3}{4}; \frac{4}{3} \right].$$

Ответ: $\left[\frac{3}{4}; \frac{4}{3} \right]$.

$$б) (3x-5)\sqrt{5x-3} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-3 \geq 0 \\ 3x-5 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{5} \\ x \leq \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow x \in \left[\frac{3}{5}; \frac{5}{3} \right]$$

Ответ: $\left[\frac{3}{5}; \frac{5}{3} \right]$.

4.3.C02

$$a) \frac{\sqrt{6-x}}{2x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 > 0 \\ 6-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x \leq 6 \end{cases} \Rightarrow x \in \left(-\frac{1}{2}; 6 \right].$$

Ответ: $\left(-\frac{1}{2}; 6 \right]$.

$$б) \frac{\sqrt{4-x}}{2-3x} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-3x < 0 \\ 4-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{2}{3} \\ x \leq 4 \end{cases} \Rightarrow x \in \left(\frac{2}{3}; 4 \right]. \text{ Ответ: } \left(\frac{2}{3}; 4 \right].$$

4.3.C03

$$a) \frac{6x-5}{\sqrt{4x+3}} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-5 \leq 0 \\ 4x+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{5}{6} \\ x > -\frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow x \in \left(-\frac{3}{4}; \frac{5}{6} \right].$$

Ответ: $\left(-\frac{3}{4}; \frac{5}{6} \right]$.

$$б) \frac{5x-4}{\sqrt{6x+5}} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-4 \leq 0 \\ 6x+5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{4}{5} \\ x > -\frac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow x \in \left(-\frac{5}{6}; \frac{4}{5} \right].$$

Ответ: $\left(-\frac{5}{6}; \frac{4}{5} \right]$.

4.3.C04

$$a) \frac{5\sqrt{x}}{4x-3} < \frac{2}{3-4x}; \frac{5\sqrt{x}+2}{4x-3} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x-3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x < \frac{3}{4} \end{cases}; x \in \left[0; \frac{3}{4}\right)$$

$$\text{Ответ: } \left[0; \frac{3}{4}\right).$$

$$b) \frac{4\sqrt{x}}{3x-2} < \frac{3}{2-3x}; \frac{4\sqrt{x}+3}{3x-2} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 3x-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x < \frac{2}{3} \end{cases}; x \in \left[0; \frac{2}{3}\right)$$

$$\text{Ответ: } \left[0; \frac{2}{3}\right).$$

4.3.C05

$$a) \frac{2\sqrt{x}}{x(x-2)} < \frac{11}{x(2-x)}; \frac{2\sqrt{x}+11}{x(x-2)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x(x-2) < 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (0, 2).$$

$$\text{Ответ: } (0, 2).$$

$$b) \frac{4\sqrt{x}}{x(x-4)} < \frac{13}{x(4-x)}; \frac{4\sqrt{x}+13}{x(x-4)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x(x-4) < 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (0, 4).$$

$$\text{Ответ: } (0, 4).$$

4.3.C06

$$a) \sqrt{\frac{7(x-7)^2}{5-6x}} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-7=0 \\ 5-6x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ x < \frac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{5}{6}\right) \cup \{7\}.$$

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; \frac{5}{6}\right) \cup \{7\}.$$

$$b) \sqrt{\frac{5(x-5)^2}{2-7x}} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ 2-7x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x < \frac{2}{7} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{2}{7}\right) \cup \{5\}.$$

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; \frac{2}{7}\right) \cup \{5\}.$$

4.3.C07

$$a) \frac{16x-x^3}{\sqrt{x^2-16}} \geq 0; \frac{x(16-x^2)}{\sqrt{x^2-16}} \geq 0; \frac{x(x^2-16)}{\sqrt{x^2-16}} \leq 0 \begin{cases} x^2-16 > 0 \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -4)$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; -4).$$

$$6) \frac{49x - x^3}{\sqrt{x^2 - 49}} \leq 0; \frac{x(x^2 - 49)}{\sqrt{x^2 - 49}} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 49 > 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (7; +\infty).$$

Ответ: $(7; +\infty)$.

4.3.C08

$$a) \frac{\sqrt{12 - x - x^2}}{x - 2} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 < 0 \\ 12 - x - x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ (x + 4)(x - 3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \in [-4; 3] \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-4; 2)$$

Ответ: $[-4; 2)$.

$$6) \frac{\sqrt{6 - x - x^2}}{x - 1} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 > 0 \\ 6 - x - x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ (x + 3)(x - 2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \in [-3; 2] \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1; 2]$$

Ответ: $(1; 2]$.

4.3.C09

$$a) \frac{\sqrt{x+7}}{x+5} \geq \frac{\sqrt{x+7}}{x-5}; \frac{\sqrt{x+7}(x-5-x-5)}{(x-5)(x+5)} \geq 0;$$

$$\frac{\sqrt{x+7}}{(x-5)(x+5)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+7 \geq 0 \\ (x-5)(x+5) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-5; 5)$$

Ответ: $(-5; 5)$.

$$6) \frac{\sqrt{x+9}}{x-6} \leq \frac{\sqrt{x+9}}{x+6}; \frac{\sqrt{x+9}(x+6-x-6)}{(x-6)(x+6)} \leq 0;$$

$$\frac{\sqrt{x+9}}{(x-6)(x+6)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+9 \geq 0 \\ (x-6)(x+6) < 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (-6; 6)$$

Ответ: $(-6; 6)$.

4.3.C10

$$a) \frac{2}{3-x} < \frac{\sqrt{x^2-16}}{x-3}; \frac{\sqrt{x^2-16}+2}{x-3} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 16 \geq 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)(x+4) \geq 0 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (3; 4]$$

Ответ: $(3; 4]$.

$$6) \frac{3}{2-x} < \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-2}; \frac{\sqrt{x^2-9}+3}{x-2} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-9 \geq 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x+3) \geq 0 \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow x \in (2; 3]$$

Ответ: (2; 3].

Уровень D

4.3.D01

$$a) \frac{\sqrt{4x^2-12x+5}}{2x^2-3x-2} \leq 0; \frac{\sqrt{(2x-5)(2x-1)}}{(x-2)(2x+1)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x-5)(2x-1) \geq 0 \\ (x-2)(2x+1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{2}; +\infty\right) \\ x \in \left(-\frac{1}{2}; 2\right) \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right].$$

Ответ: $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

$$6) \frac{\sqrt{6x^2-23x+7}}{3x^2-8x-3} \leq 0; \frac{\sqrt{(2x-7)(3x-1)}}{(x-3)(3x+1)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x-7)(3x+1) \geq 0 \\ (x-3)(3x+1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{7}{2}; +\infty\right) \\ x \in \left(-\frac{1}{3}; 3\right) \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right].$$

Ответ: $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$.

4.3.D02

$$a) \frac{3x^2-16x+5}{\sqrt{15-2x-x^2}} \geq 0; \frac{(3x-1)(x-5)}{\sqrt{-(x+5)(x-3)}} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3x-1)(x-5) \geq 0 \\ (x+5)(x-3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup [5; +\infty) \\ x \in (-5; 3) \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-5; \frac{1}{3}\right].$$

Ответ: $\left(-5; \frac{1}{3}\right]$.

$$\begin{aligned}
 & \text{б) } \frac{5x^2 - 16x + 5}{\sqrt{15 + 2x - x^2}} \geq 0; \quad \frac{(5x-1)(x-3)}{\sqrt{-(x-5)(x+3)}} \geq 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} (5x-1)(x-3) \geq 0 \\ (x-5)(x+3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; \frac{1}{5}\right] \cup [3; +\infty) \\ x \in (-3; 5) \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-3; \frac{1}{5}\right]. \\
 & \text{Ответ: } \left(-3; \frac{1}{5}\right].
 \end{aligned}$$

4.3.D03

$$\begin{aligned}
 & \text{а) } (2x^2 + 3x - 20)\sqrt{25 - x^2} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 25 - x^2 \geq 0 \\ 2x^2 + 3x - 20 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (5-x)(5+x) \geq 0 \\ (2x-5)(x+4) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-5; 5] \\ x \in \left[-4; \frac{5}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-4; \frac{5}{2}\right]. \quad \text{Ответ: } \left[-4; \frac{5}{2}\right]. \\
 & \text{б) } (3x^2 + 5x - 12)\sqrt{16 - x^2} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 5x - 12 \leq 0 \\ 16 - x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)(3x-4) \leq 0 \\ (x+4)(x-4) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[-3; \frac{4}{3}\right] \\ x \in [-4; 4] \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-3; \frac{4}{3}\right]. \quad \text{Ответ: } \left[-3; \frac{4}{3}\right].
 \end{aligned}$$

4.3.D04

$$\begin{aligned}
 & \text{а) } 10x - 29\sqrt{x} + 10 < 0 \Rightarrow (2\sqrt{x} - 5)(5\sqrt{x} - 2) < 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \sqrt{x} \in \left(\frac{2}{5}; \frac{5}{2}\right) \Rightarrow x \in \left(\frac{4}{25}; \frac{25}{4}\right). \quad \text{Ответ: } \left(\frac{4}{25}; \frac{25}{4}\right). \\
 & \text{б) } 12x - 25\sqrt{x} + 12 < 0 \Rightarrow (3\sqrt{x} - 4)(4\sqrt{x} - 3) < 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \sqrt{x} \in \left(\frac{3}{4}; \frac{4}{3}\right) \Rightarrow x \in \left(\frac{9}{16}; \frac{16}{9}\right). \quad \text{Ответ: } \left(\frac{9}{16}; \frac{16}{9}\right).
 \end{aligned}$$

4.3.D05

$$\begin{aligned}
 & \text{а) } \frac{4}{\sqrt{x-5}+3} > \frac{3}{\sqrt{x-5}+4}; \quad \frac{4\sqrt{x-5}+16-3\sqrt{x-5}-9}{(\sqrt{x-5}+3)(\sqrt{x-5}+4)} > 0; \\
 & \frac{\sqrt{x-5}+7}{(\sqrt{x-5}+3)(\sqrt{x-5}+4)} > 0 \Leftrightarrow x \geq 5. \quad \text{Ответ: } [5; +\infty).
 \end{aligned}$$

$$6) \frac{3}{\sqrt{x-4}+2} > \frac{2}{\sqrt{x-4}+3}; \frac{3\sqrt{x-4}+9-2\sqrt{x-4}-4}{(\sqrt{x-4}+2)(\sqrt{x-4}+3)} > 0;$$

$$\frac{\sqrt{x-4}+5}{(\sqrt{x-4}+2)(\sqrt{x-4}+3)} > 0 \Leftrightarrow x \geq 4. \text{ Ответ: } [4; +\infty).$$

4.3.D06

$$a) 3x + 2\sqrt{x} - 3 \leq \frac{4x-9}{2\sqrt{x}-3} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2\sqrt{x} - 3 \leq 2\sqrt{x} + 3 \\ 2\sqrt{x} - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 2 \\ x \neq \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0; 2].$$

Ответ: $[0; 2]$.

$$6) 2x + 3\sqrt{x} - 4 \leq \frac{9x-4}{3\sqrt{x}-2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3\sqrt{x} - 4 \leq 3\sqrt{x} + 2 \\ 3\sqrt{x} - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 3 \\ x \neq \frac{4}{9} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[0; \frac{4}{9}\right) \cup \left(\frac{4}{9}; 3\right]. \text{ Ответ: } \left[0; \frac{4}{9}\right) \cup \left(\frac{4}{9}; 3\right].$$

4.3.D07

$$a) x + 3 + \sqrt{-3x-2} \geq \frac{\sqrt{9x^2-4}}{\sqrt{2-3x}} \Leftrightarrow x + 3 + \sqrt{-3x-2} \geq \frac{\sqrt{(-3x-2)(2-3x)}}{\sqrt{2-3x}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 + \sqrt{-3x-2} \geq \sqrt{-3x-2} \\ 2-3x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 2-3x > 0 \\ -3x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x < \frac{2}{3} \\ x \leq -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[-3; -\frac{2}{3}\right]. \text{ Ответ: } \left[-3; -\frac{2}{3}\right].$$

$$6) (x+4) + \sqrt{-2x-3} \geq \frac{\sqrt{4x^2-9}}{\sqrt{3-2x}} \Leftrightarrow x+4 + \sqrt{-2x-3} \geq \frac{\sqrt{(-2x-3)(3-2x)}}{\sqrt{3-2x}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+4 + \sqrt{-2x-3} \geq \sqrt{-2x-3} \\ 3-2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 \geq 0 \\ -2x-3 \geq 0 \\ 3-2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-4; -\frac{3}{2}\right].$$

Ответ: $\left[-4; -\frac{3}{2}\right]$.

4.3.D08

а) $\frac{7}{\sqrt{x^2 - 8x + 17}} + \frac{6}{\sqrt{x^2 - 8x + 52}} \geq 8$; $\frac{7}{\sqrt{(x-4)^2 + 1}} + \frac{6}{\sqrt{(x-4)^2 + 36}} \geq 8$.

Т.к. 1-е слагаемое < 7 при $x \neq 4$, а второе < 1 при $x \neq 4$, то неравенство верно только при $x = 4$.

Ответ: 4.

б) $\frac{9}{\sqrt{x^2 + 6x + 18}} + \frac{10}{\sqrt{x^2 + 6x + 34}} \geq 5$; $\frac{9}{\sqrt{(x+3)^2 + 9}} + \frac{10}{\sqrt{(x+3)^2 + 25}} \geq 5$.

Аналогично: 1-е слагаемое < 3 при $x \neq -3$, а второе < 2 при $x \neq -3$, то неравенство верно только при $x = -3$.

Ответ: -3.

4.3.D09

а) $\sqrt{x^2 - 6x + 13} \cdot \sqrt{y^2 + 10y + 34} \leq 6$; $\sqrt{(x-3)^2 + 4} \cdot \sqrt{(y+5)^2 + 9} \leq 6$.

Первый множитель > 2 при $x \neq 3$, а второй > 3 при $y \neq -5$, тогда произведение > 6 при $x \neq 3$ и $y \neq -5$, т.е. неравенство верно только при $x = 3$, $y = -5$.

Ответ: (3; -5).

б) $\sqrt{x^2 + 8x + 20} \cdot \sqrt{y^2 - 6y + 34} \leq 10$; $\sqrt{(x+4)^2 + 4} \cdot \sqrt{(y-3)^2 + 25} \leq 10$.

Первый множитель > 2 при $x \neq -4$, а второй > 5 при $y \neq 3$, тогда произведение > 10 при $x \neq -4$, $y \neq 3 \Rightarrow$ Неравенство верно только при $x = -4$, $y = 3$.

Ответ: (-4; 3).

4.3.D10

а) $5\sqrt{3x-2y-4} + 3\sqrt{2x+3y-7} \leq 2$, т.к. x и y целые: то $5\sqrt{3x-2y-4}$ и $3\sqrt{2x+3y-7}$ либо 0, либо больше 1, тогда неравенство верно только

при $\begin{cases} 3x-2y-4=0 \\ 2x+3y-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x=26 \\ 2x+3y-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

Ответ: (2; 1).

б) $4\sqrt{3x-2y+1} + 7\sqrt{2x-3y+4} \leq 3$, т.к. x и y целые: то $4\sqrt{3x-2y+1}$ и $7\sqrt{2x-3y+4}$ либо 0, либо больше 2, т.е. неравенство верно только при

$\begin{cases} 3x-2y+1=0 \\ 2x-3y+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=1 \end{cases}$. Ответ: (1; 2).

Глава 5. Системы уравнений

§ 1. Системы целых алгебраических уравнений

Уровень А

5.1.A01

$$\text{а) } \begin{cases} 5x + y = -2 \\ 7x - y = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x = -12 \\ 7x - y = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} . \text{ Ответ: } (-1; 3).$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3x + y = 13 \\ 4x - y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 28 \\ 4x - y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} . \text{ Ответ: } (4; 1).$$

5.1.A02

$$\text{а) } \begin{cases} 4x - 3y = -4 \\ 4x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 7 \\ 4x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3,5 \\ x = \frac{13}{8} \end{cases} . \text{ Ответ: } \left(\frac{13}{8}; \frac{7}{2}\right).$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3x + y = 3 \\ 3x + 4y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = -5 \\ 3x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{5}{3} \\ x = \frac{14}{9} \end{cases} . \text{ Ответ: } \left(\frac{14}{9}; -\frac{5}{3}\right).$$

5.1.A03

$$\text{а) } \begin{cases} 8x + 3y = -3 \\ 4x + 3y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 3 \\ 4x + 3y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = -3 \end{cases} . \text{ Ответ: } \left(\frac{3}{4}; -3\right).$$

$$\text{б) } \begin{cases} 9x + 2y = 23 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 10 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = 4 \end{cases} . \text{ Ответ: } \left(\frac{5}{3}; 4\right)$$

5.1.A04

$$\text{а) } \begin{cases} 3x - 5y = 3 \\ 2y - 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3y = 4 \\ 2y - 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{4}{3} \\ x = -\frac{11}{9} \end{cases} . \text{ Ответ: } \left(-\frac{11}{9}; -\frac{4}{3}\right).$$

$$\text{б) } \begin{cases} 7x - 2y = 2 \\ 5y - 7x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 5 \\ 7x - 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{5}{3} \\ x = \frac{16}{21} \end{cases} . \text{ Ответ: } \left(\frac{16}{21}; \frac{5}{3}\right).$$

5.1.A05

$$a) \begin{cases} 15x - 4y = 14 \\ 5x + 4y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20x = 8 \\ 5x + 4y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{5} \\ x = -2 \end{cases}. \text{ Ответ: } \left(\frac{2}{5}; -2\right).$$

$$6) \begin{cases} 4x - 3y = 9 \\ 2x + 3y = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x = -9 \\ 2x + 3y = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = -5 \end{cases}. \text{ Ответ: } \left(-\frac{3}{2}; -5\right).$$

5.1.A06

$$a) \begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 3x - 5y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 12 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 4 \end{cases}. \text{ Ответ: } (4; 4).$$

$$6) \begin{cases} 5x + 2y = 24 \\ 5x - y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 6 \\ 5x - y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 4 \end{cases}. \text{ Ответ: } (4; 2).$$

5.1.A07

$$a) \begin{cases} 5x - 3y = 7 \\ 7x + y = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 26x = -26 \\ 7x + y = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -4 \end{cases}. \text{ Ответ: } (-1; -4).$$

$$6) \begin{cases} 4x + 3y = -5 \\ 5x + y = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -11x = 22 \\ 5x + y = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}. \text{ Ответ: } (-2; 1).$$

5.1.A08

$$a) \begin{cases} 2x + 5y = 5 \\ x - 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11y = 3 \\ x - 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{11} \\ x = \frac{20}{11} \end{cases}. \text{ Ответ: } \left(\frac{20}{11}; \frac{3}{11}\right).$$

$$6) \begin{cases} 3x - 5y = -2 \\ -x + 4y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7y = -11 \\ -x + 4y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{11}{7} \\ x = -\frac{23}{7} \end{cases}. \text{ Ответ: } \left(-\frac{23}{7}; -\frac{11}{7}\right).$$

5.1.A09

$$a) \begin{cases} 10y - x = -21 \\ 3x + 5y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7x = -7 \\ 3x + 5y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}. \text{ Ответ: } (1; -2).$$

$$6) \begin{cases} 15y + x = 29 \\ 2x - 3y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11x = -11 \\ 2x - 3y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}. \text{ Ответ: } (-1; 2).$$

5.1.A10

$$a) \begin{cases} 7(x-3y) = -11 \\ x-4y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7(4y-2-3y) = -11 \\ x-4y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7y = 3 \\ x-4y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{7} \\ x = -\frac{2}{7} \end{cases}.$$

Ответ: $\left(-\frac{2}{7}; \frac{3}{7}\right)$.

$$b) \begin{cases} 6(x+4y) = 19 \\ x+3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6(1+y) = 19 \\ x+3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{13}{6} \\ x = -\frac{11}{2} \end{cases}. \text{ Ответ: } \left(-\frac{11}{2}; \frac{13}{6}\right).$$

Уровень В

5.1.B01

$$a) \begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{2}{3}y = -8 \\ -x + \frac{1}{3}y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}x = 2 \\ -x + \frac{1}{3}y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 3 \end{cases}. \text{ Ответ: } (-4; 3).$$

$$b) \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{3}{5}y = 3 \\ -x + \frac{1}{5}y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{2}x = 15 \\ -x + \frac{1}{5}y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = -10 \end{cases}. \text{ Ответ: } (-6; -10).$$

5.1.B02

$$a) \begin{cases} 3x + 5y = 29 \\ 5x + 2y = 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25y - 6y = 29 \cdot 5 - 23 \cdot 3 \\ 5x + 2y = 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 19y = 76 \\ 5x + 2y = 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Ответ: (3; 4).

$$b) \begin{cases} 4x + 5y = 21 \\ 3x - 4y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15y + 16y = 21 \cdot 3 - 8 \cdot 4 \\ 3x - 4y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 31y = 31 \\ 3x - 4y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Ответ: (4; 1).

5.1.B03

$$a) \begin{cases} 2x + y = \frac{22}{5} \\ 3x + 2y = \frac{34}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = -2 \\ 2x + y = \frac{22}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{2}{5} \end{cases}. \text{ Ответ: } \left(2; \frac{2}{5}\right).$$

$$6) \begin{cases} 7x - y = \frac{107}{5} \\ 4x + 3y = \frac{54}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25x = \frac{107 \cdot 3 + 54}{5} \\ 4x + 3y = \frac{54}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25x = 75 \\ 4x + 3y = \frac{54}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -\frac{2}{5} \end{cases}.$$

Ответ: $\left(3; -\frac{2}{5}\right)$.

5.1.B04

$$a) \begin{cases} x^2 + 5y = (x-2)^2 - 20 \\ 4x + y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 5y = x^2 - 4x + 4 - 20 \\ 4x + y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 5y = -16 \\ 4x + y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = -8 \\ 4x + y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}. \text{ Ответ: } \left(-\frac{3}{2}; -2\right).$$

$$6) \begin{cases} x^2 + 3y = (x+1)^2 + 12 \\ 2x - 5y = -17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3y = x^2 + 2x + 1 + 12 \\ 2x - 5y = -17 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y - 2x = 13 \\ 2x - 5y = -17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y = -4 \\ 2x - 5y = -17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -\frac{7}{2} \end{cases}. \text{ Ответ: } \left(-\frac{7}{2}; 2\right).$$

5.1.B05

$$a) \begin{cases} (x+2)^2 + (y-1)^2 = x^2 + y^2 + 1 \\ 6y + x = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + y^2 + 1 \\ 6y + x = 25 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = -4 \\ 6y + x = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x = 13 \\ 6y + x = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

Ответ: $(1; 4)$.

$$6) \begin{cases} (x+2)^2 + (y-4)^2 = x^2 + y^2 + 4 \\ 7y + x = 23 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = x^2 + y^2 + 4 \\ 7y + x = 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 8y = -16 \\ 7y + x = 23 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -4 \\ 7y + x = 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9y = 27 \\ 7y + x = 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ответ: $(2; 3)$.

5.1.B06

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{cases} (x+2y)^2 - (3x+y)^2 = 8 \\ y-2x=4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2y-3x-y)(x+2y+3x+y) = 8 \\ y-2x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (y-2x)(4x+3y) = 8 \\ y-2x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+3y=2 \\ y-2x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y=10 \\ y-2x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=-1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Ответ: $(-1; 2)$.

$$\begin{aligned} \text{б) } \begin{cases} (2x-y)^2 - (x+3y)^2 = -9 \\ 3x+2y=-1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (2x-y-x-3y)(2x-y+x+3y) = -9 \\ 3x+2y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-4y)(3x+2y) = -9 \\ 3x+2y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4y=9 \\ 3x+2y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x=7 \\ x-4y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}. \end{aligned}$$

Ответ: $(1; -2)$.

5.1.B07

$$\text{a) } \begin{cases} (x-2)(y+3)=0 \\ 3x-2y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=2 \\ 3x-2y=6 \end{cases} \\ \begin{cases} y+3=0 \\ 3x-2y=6 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y=-3 \\ x=0 \end{cases} \end{cases}. \text{ Ответ: } (2; 0); (0; -3).$$

$$\text{б) } \begin{cases} (x+3)(y-4)=0 \\ 4x-3y=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x+3=0 \\ 4x-3y=-12 \end{cases} \\ \begin{cases} y-4=0 \\ 4x-3y=-12 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=-3 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y=4 \\ x=0 \end{cases} \end{cases}. \text{ Ответ: } (-3; 0); (0; 4).$$

5.1.B08

$$\text{a) } \begin{cases} (x-3y)(x+4)=0 \\ x-5y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-3y=0 \\ x-5y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x+4=0 \\ x-5y=1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} y=-\frac{1}{2} \\ x=-\frac{3}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-4 \\ y=-1 \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right); (-4; -1)$.

$$6) \begin{cases} (x+4y)(x-3)=0 \\ x+3y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=3 \\ x+3y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x+4y=0 \\ x+3y=1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=3 \\ y=-\frac{2}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} y=-1 \\ x=-4 \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: $\left(3; -\frac{2}{3}\right); (-4; -1)$.

5.1.B09

$$a) \begin{cases} 4(x+3y)+2(x-y)=28 \\ 2(y-x)+x+3y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(x+3y)=30 \\ 2(y-x)+x+3y=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=6 \\ y-x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y=4 \\ y-x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=3 \end{cases}. \text{ Ответ: } (3; 1).$$

$$6) \begin{cases} 2(x+y)+3(2x-3y)=-30 \\ 4(3y-2x)+x+y=40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+y)+3(2x-3y)=-30 \\ 11(2x-3y)=-110 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+y)+3(2x-3y)=-30 \\ 2x-3y=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ 2x-3y=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}.$$

Ответ: $(-2; 2)$.

5.1.B10

$$a) \begin{cases} 3x^2-y=7 \\ 5y-3x^2=-23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y=-16 \\ 3x^2-y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-4 \\ 3x^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-4 \\ x=\pm 1 \end{cases}.$$

Ответ: $(1; -4); (-1; -4)$.

$$6) \begin{cases} 5x^2-4y=17 \\ 6y-5x^2=-23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=-6 \\ 5x^2-4y=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-3 \\ x^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-3 \\ x=\pm 1 \end{cases}.$$

Ответ: $(1; -3); (-1; -3)$.

Уровень С

5.1.C01

$$a) \begin{cases} x\sqrt{48}+y\sqrt{5}=-11 \\ x\sqrt{27}-y\sqrt{5}=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x\sqrt{3}+y\sqrt{5}=-11 \\ 3x\sqrt{3}-y\sqrt{5}=-10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x\sqrt{3}+y\sqrt{5}=-11 \\ 7x\sqrt{3}=-21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y\sqrt{5}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}. \text{ Ответ: } \left(-\sqrt{3}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad & \begin{cases} x\sqrt{27} + y\sqrt{2} = -6 \\ x\sqrt{75} - y\sqrt{2} = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x\sqrt{3} + y\sqrt{2} = -6 \\ 5x\sqrt{3} - y\sqrt{2} = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x\sqrt{3} + y\sqrt{2} = -6 \\ 8x\sqrt{3} = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} 3x\sqrt{3} + y\sqrt{2} = -6 \\ 8x\sqrt{3} = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x\sqrt{3} + y\sqrt{2} = -6 \\ x = -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = \frac{3}{\sqrt{2}} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Omgeem: $\left(-\sqrt{3}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$.

5.1.C02

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \begin{cases} 4x^2 - 49y^2 = 10(2x - 7y) \\ x + y = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x - 7y)(2x + 7y) = 10(2x - 7y) \\ x + y = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} (2x - 7y)(2x + 7y - 10) = 0 \\ x + y = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2x - 7y = 0 \\ x + y = 45 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x + 7y - 10 = 0 \\ x + y = 45 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} y = 10 \\ x = 35 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -16 \\ x = 61 \end{cases} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Omgeem: (35; 10); (61; -16).

$$\begin{aligned}
 6) \quad & \begin{cases} 9x^2 - 64y^2 = 5(3x + 8y) \\ x - y = 55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x + 8y)(3x - 8y) = 5(3x + 8y) \\ x - y = 55 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} (3x + 8y)(3x - 8y - 5) = 0 \\ x - y = 55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 3x + 8y = 0 \\ x - y = 55 \end{cases} \\ \begin{cases} 3x - 8y - 5 = 0 \\ x - y = 55 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} y = -15 \\ x = 40 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 32 \\ x = 87 \end{cases} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Omgeem: (40; -15); (87; 32).

5.1.C03

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \begin{cases} (x - 2y)^2 = 11(x - 2y) \\ 2x + y = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2y)(x - 2y - 11) = 0 \\ 2x + y = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + y = 50 \end{cases} \\ \begin{cases} x - 2y - 11 = 0 \\ 2x + y = 50 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} y = 10 \\ x = 20 \end{cases} \\ \begin{cases} 5x = 111 \\ 2x + y = 50 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} y = 10 \\ x = 20 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{111}{5} \\ y = \frac{28}{5} \end{cases} \end{cases} \cdot \text{Omgeem: } (20; 10); \left(\frac{111}{5}; \frac{28}{5}\right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad & \begin{cases} (3x-y)^2 = 9(3x-y) \\ x+3y=40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x-y)(3x-y-9)=0 \\ x+3y=40 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 3x-y=0 \\ x+3y=40 \end{cases} \\ \begin{cases} 3x-y-9=0 \\ x+3y=40 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=4 \\ y=12 \end{cases} \\ \begin{cases} 10x=67 \\ x+3y=40 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=4 \\ y=12 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{67}{10} \\ y=\frac{111}{10} \end{cases} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Омвем: $(4; 12); \left(\frac{67}{10}; \frac{111}{10}\right)$.

5.1.C04

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \begin{cases} (x-5y)(x^2-36)=0 \\ x-y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-5y=0 \\ x-y=4 \end{cases} \\ \begin{cases} x=6 \\ x-y=4 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-6 \\ x-y=4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-6 \\ y=-10 \end{cases} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Омвем: $(5; 1); (6; 2); (-6; -10)$.

$$\begin{aligned}
 6) \quad & \begin{cases} (x+3y)(x^2-4)=0 \\ x+y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x+3y=0 \\ x+y=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ x+y=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ x+y=-2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Омвем: $(-3; 1); (2; -4); (-2; 0)$.

5.1.C05

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \begin{cases} x^2-16y^2+x+4y=0 \\ 3x-4y=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4y)(x+4y)+(x+4y)=0 \\ 3x-4y=16 \end{cases} \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+4y+1)(x-4y)=0 \\ 3x-4y=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-4y=0 \\ 3x-4y=16 \end{cases} \\ \begin{cases} x+4y+1=0 \\ 3x-4y=16 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=8 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{15}{4} \\ y=-\frac{19}{16} \end{cases} \end{cases}$$

Omgeem: $(8; 2); \left(\frac{15}{4}; -\frac{19}{16}\right)$.

$$6) \begin{cases} x^2 - 9y^2 + x - 3y = 0 \\ 4x + 3y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3y)(x+3y+1) = 0 \\ 4x + 3y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-3y=0 \\ 4x+3y=10 \end{cases} \\ \begin{cases} x+3y+1=0 \\ 4x+3y=10 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=2 \\ y=\frac{2}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{11}{3} \\ y=-\frac{14}{9} \end{cases} \end{cases} \cdot \text{Omgeem: } \left(2; \frac{2}{3}\right); \left(\frac{11}{3}; -\frac{14}{9}\right).$$

5.1.C06

$$a) \begin{cases} 2x + y = -5 \\ x^2 + xy - x - 11y = 55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x - 5 \\ x^2 + x(-2x - 5) - x - 11(-2x - 5) = 55 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x - 5 \\ x^2 - 2x^2 - 5x - x + 22x + 55 = 55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x - 5 \\ -x^2 + 16x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x - 5 \\ x(16 - x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=0 \\ y=-5 \end{cases} \\ \begin{cases} x=16 \\ y=-37 \end{cases} \end{cases}.$$

Omgeem: $(0; -5); (16; -37)$.

$$6) \begin{cases} x + 2y = 7 \\ x^2 - xy + x + 43y = 56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 - 2y \\ (7 - 2y)^2 - (7 - 2y)y + 7 - 2y + 43y = 56 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 - 2y \\ 49 - 28y + 4y^2 - 7y + 2y^2 + 7 - 2y + 43y = 56 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 - 2y \\ 6y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 7 \\ y = -1 \\ x = 9 \end{cases}. \text{ Ответ: } (7; 0); (9; -1).$$

5.1.C07

$$\text{а) } \begin{cases} 6x + 5y = 44 \\ xy = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{16}{y} \\ \frac{16 \cdot 6}{y} + 5y = 44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{16}{y} \\ 5y^2 - 44y + 96 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{16}{y} \\ (5y - 24)(y - 4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \\ y = \frac{24}{5} \\ x = \frac{10}{3} \end{cases}. \text{ Ответ: } (4; 4); \left(\frac{10}{3}; \frac{24}{5}\right).$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3x + 4y = 35 \\ xy = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{25}{y} \\ \frac{75}{y} + 4y = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{25}{y} \\ 4y^2 - 35y + 75 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{25}{y} \\ (y - 5)(4y - 15) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \\ y = \frac{15}{4} \\ x = \frac{20}{3} \end{cases}. \text{ Ответ: } (5; 5); \left(\frac{20}{3}; \frac{15}{4}\right).$$

5.1.C08

$$\text{а) } \begin{cases} 4|x| + 3y = 8 \\ 4x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4|x| + 12x = 11 \\ 4x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (\text{ясно, что } x > 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12x + 4x = 11 \\ 4x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x = 11 \\ 4x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{16} \\ y = \frac{7}{4} \end{cases}. \text{ Ответ: } \left(\frac{11}{16}; \frac{7}{4}\right).$$

$$б) \begin{cases} 3|x|+2y=2 \\ 3x-y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3|x|+6x=10 \\ 3x-y=4 \end{cases} \Leftrightarrow (\text{ясно, что } x>0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x=10 \\ 3x-y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{10}{9} \\ y=-\frac{2}{3} \end{cases}. \text{ Ответ: } \left(\frac{10}{9}; -\frac{2}{3}\right).$$

5.1.C09

$$а) \begin{cases} 3x^2-4y+3xy-4x=0 \\ 3x-2y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x(x+y)-4(x+y)=0 \\ 3x-2y=6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3x-4)(x+y)=0 \\ 3x-2y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x+y=0 \\ 3x-2y=6 \end{cases} \\ \begin{cases} 3x-4=0 \\ 3x-2y=6 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=-y \\ -5y=6 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{4}{3} \\ y=-1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=\frac{6}{5} \\ y=-\frac{6}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{4}{3} \\ y=-1 \end{cases} \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{6}{5}; -\frac{6}{5}\right); \left(\frac{4}{3}; -1\right).$$

$$б) \begin{cases} 5x^2-2y-5xy+2x=0 \\ 5x+3y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x(x-y)+2(x-y)=0 \\ 5x+3y=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (5x+2)(x-y)=0 \\ 5x+3y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 5x+2=0 \\ 5x+3y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=y \\ 5x+3y=1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=-\frac{2}{5} \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{1}{8} \\ y=\frac{1}{8} \end{cases} \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{2}{5}; 1\right); \left(\frac{1}{8}; \frac{1}{8}\right).$$

5.1.C10

$$а) \begin{cases} x^3-64y^3=-56 \\ 4y-x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 64y^3-x^3=56 \\ 4y-x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4y-x)(16y^2+4xy+x^2)= \\ 4y-x=2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} 16y^2 + 4xy + x^2 = 28 \\ x = 4y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16y^2 + 4(4y - 2)y + (4y - 2)^2 = 28 \\ x = 4y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 16y^2 + 16y^2 - 8y + 16y^2 - 16y + 4 = 28 \\ x = 4y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 48y^2 - 24y - 24 = 0 \\ x = 4y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 - y - 1 = 0 \\ x = 4y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y - 1)(2y + 1) = 0 \\ x = 4y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \\ y = -\frac{1}{2} \\ x = -4 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ответ: (2; 1); $\left(-4; -\frac{1}{2}\right)$

$$\begin{aligned}
6) \begin{cases} x^3 - 8y^3 = -91 \\ 2y - x = 7 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 8y^3 - x^3 = 91 \\ 2y - x = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2y - x)(4y^2 + 2xy + x^2) = 91 \\ 2y - x = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2 + 2xy + x^2 = 13 \\ x = 2y - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2 + 2(2y - 7)y + (2y - 7)^2 = 13 \\ x = 2y - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2 + 4y^2 - 14y + 4y^2 - 28y + 49 = 13 \\ x = 2y - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12y^2 - 42y + 36 = 0 \\ x = 2y - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 - 7y + 6 = 0 \\ x = 2y - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y - 2)(2y - 3) = 0 \\ x = 2y - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -3 \\ y = \frac{3}{2} \\ x = -4 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ответ: (-3; 2); $\left(-4; \frac{3}{2}\right)$.

Уровень D

5.1.D01.

$$\begin{aligned}
a) \begin{cases} (2x - 3y)4 + 7(2x - 3y)2 = 8 \\ 3x + 3y = 5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} ((2x - 3y)^2 - 1)((2x - 3y)^2 + 8) = 0 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y - 1 = 0 \\ 2x + 3y = 5 \\ 2x - 3y + 1 = 0 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 6 \\ 2x + 3y = 5 \\ 4x = 4 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{2}{3} \\ x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ Ответ: } \left(\frac{3}{2}; \frac{2}{3}\right); (1; 1).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad & \begin{cases} (3x-5y)^4 + 6(3x-5y)^2 = 7 \\ 3x+5y=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ((3x-5y)^2 - 1)((3x-5y)^2 + 7) = 0 \\ 3x+5y=11 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-5y=1 \\ 3x+5y=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x=12 \\ 3x+5y=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-5y=-1 \\ 3x+5y=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x=10 \\ 3x+5y=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{3} \\ y=\frac{6}{5} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: $(2; 1); \left(\frac{5}{3}; \frac{6}{5}\right)$.

5.1.D02

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \begin{cases} x^3 + y^3 = 152 \\ x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 152 \\ x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 19 \\ x = 8 - y \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} (8-y)^2 + y^2 - y(8-y) = 19 \\ x = 8 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 64 - 16y + y^2 + y^2 - 8y + y^2 = 19 \\ x = 8 - y \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} 3y^2 - 24y + 45 = 0 \\ x = 8 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 18y + 15 = 0 \\ x = 8 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-3)(y-5) = 0 \\ x = 8 - y \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ x=5 \\ y=5 \\ x=3 \end{cases}. \text{ Ответ: } (3; 5); (5; 3). \\
 6) \quad & \begin{cases} x^3 - y^3 = 98 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x^2 + xy + y^2) = 98 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 49 \\ x = y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} (y+2)^2 + y(y+2) + y^2 = 49 \\ x = y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 4y + 4 + y^2 + 2y + y^2 = 49 \\ x = y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} 3y^2 + 6y - 45 = 0 \\ x = y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 2y - 15 = 0 \\ x = y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y+5)(y-3) = 0 \\ x = y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ x=5 \\ y=-5 \\ x=-3 \end{cases}. \text{ Ответ: } (5; 3); (-3; -5).
 \end{aligned}$$

5.1.D03

$$\begin{aligned}
 \text{а) } \begin{cases} 2x^2 + xy = 10 \\ 2y^2 + 9xy = 20 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 + 9xy - 4x^2 - 2xy = 0 \\ 2x^2 + xy = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 + 7xy - 4x^2 = 0 \\ 2x^2 + xy = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} (4x + y)(2y - x) = 0 \\ 2x^2 + xy = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4x \\ -2x^2 = 10 \\ x = 2y \\ y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \\ y = -1 \\ x = -2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: (2; 1); (-2; 1).

$$\begin{aligned}
 \text{б) } \begin{cases} 3x^2 + xy = 30 \\ 3y^2 + 19xy = 60 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3y^2 + 17xy - 6x^2 = 0 \\ 3x^2 + xy = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3y - x)(6x + y) = 0 \\ 3x^2 + xy = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 3y = x \\ y^2 = 1 \\ y = -6x \\ -3x^2 = 30 \end{cases} \text{ - нет решений} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 3 \\ y = -1 \\ x = -3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: (-3; -1); (3; 1).

5.1.D04

$$\begin{aligned}
 \text{а) } \begin{cases} |x - 3y| - |y| = -3 \\ 2|x - 3y| + y = 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3|x - 3y| + (y - |y|) = 0 \\ 2|x - 3y| + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ 3|x - 3y| = 0 \Rightarrow y = 3, x = 9 \\ 2|x - 3y| + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -9 \\ x = -21 \\ x = -33 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} y < 0 \\ |x - 3y| + y = -3 \Rightarrow \begin{cases} y < 0 \\ |x - 3y| = 6 \Rightarrow \begin{cases} y = -9 \\ |x + 27| = 6 \end{cases} \end{cases} \\ 2|x - 3y| + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -9 \\ x = -21 \\ x = -33 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: (9; 3); (-21; -9); (-33; -9).

$$\begin{aligned}
 \text{б) } \begin{cases} |x - 2y| - |y| = -12 \\ 5|x - 2y| + y = 12 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ |x - 2y| - y = -12 \Rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 12 \end{cases} \\ 5|x - 2y| + y = 12 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} y < 0 \\ |x - 2y| + y = -12 \Leftrightarrow \begin{cases} y < 0 \\ 4|x - 2y| = 24 \\ |x - 2y| + y = -12 \end{cases} \\ 5|x - 2y| + y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} |x - 2y| = 6 \\ y = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x + 36| = 6 \\ y = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -30 \\ x = -42 \\ y = -18 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: (24; 12); (-30; -18); (-42; -18).

5.1.D05

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & \begin{cases} x^2 + 5xy + 6y^2 = 0 \\ |x + 2y| + |x + 3y| = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 2y)(x + 3y) = 0 \\ |x + 2y| + |x + 3y| = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x + 2y = 0 \\ |x + 2y| + |x + 3y| = 12 \end{cases} \\ \begin{cases} x + 3y = 0 \\ |x + 2y| + |x + 3y| = 12 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -2y \\ |y| = 12 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -3y \\ |y| = 12 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = \mp 24 \\ y = \pm 12 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \mp 36 \\ y = \pm 12 \end{cases} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: (24; -12); (-24; +12); (36; -12); (-36; 12).

$$\begin{aligned}
 \text{б) } & \begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 0 \\ |x + y| + |x - 3y| = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 3y)(x + y) = 0 \\ |x + y| + |x - 3y| = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x - 3y = 0 \\ |x + y| + |x - 3y| = 16 \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = 0 \\ |x + y| + |x - 3y| = 16 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 3y \\ |4y| = 16 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -9 \\ |4y| = 16 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = \pm 12 \\ y = \pm 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \mp 4 \\ y = \pm 4 \end{cases} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: (12; 4); (-12; -4); (4; -4); (-4; 4).

5.1.D06

$$\begin{aligned}
 \text{а) } & \begin{cases} |x + y| = 1 \\ (x^2 - y^2)(x - y) = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x + y| = 1 \\ (x + y)(x - y)^2 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -1 \\ (x - y)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - y \\ 2y + 1 = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} y = -\frac{3}{2} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases} \cdot \text{Ответ: } \left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{б) } & \begin{cases} |x - y| = 2 \\ (x^2 - y^2)(x + y) = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x - y| = 2 \\ (x + y)^2(x - y) = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ (x + y)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = y + 2 \\ x + y = 5 \end{cases} \\ \begin{cases} x = y + 2 \\ x + y = -5 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = y + 2 \\ 2y + 2 = 5 \end{cases} \\ \begin{cases} x = y + 2 \\ 2y + 2 = -5 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = -\frac{7}{2} \end{cases} \end{cases} \cdot \text{Ответ: } \left(\frac{7}{2}; \frac{3}{2}\right); \left(-\frac{3}{2}; -\frac{7}{2}\right).
 \end{aligned}$$

5.1.D07

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{cases} (4x-5)^2 + (4y-5)^2 = 2(4x-5)(4y-5) \\ x^2 + y^2 = 72 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} ((4x-5) - (4y-5))^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 72 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + y^2 = 72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 6 \\ y = \pm 6 \end{cases} \end{aligned}$$

Omøem: (6; 6); (-6; -6).

$$\begin{aligned} \text{b) } \begin{cases} (3x+2)^2 + (3y+2)^2 = 2(3x+2)(3y+2) \\ x^2 + y^2 = 98 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} ((3x+2) - (3y+2))^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 98 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (3x-3y)^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 98 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 = 49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 7 \\ y = \pm 7 \end{cases} \end{aligned}$$

Omøem: (7; 7); (-7; -7).

5.1.D08

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{cases} x^2 - 6x(y+1) - 27(y+1)^2 = 0 \\ (x-9y-9)^2 + (x+3y+3)^2 = 36 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-9(y+1))(x+3(y+1)) = 0 \\ (x-9(y+1))^2 + (x+3(y+1))^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 9(y+1) \\ (x-9(y+1))^2 + (x+3(y+1))^2 = 36 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -3(y+1) \\ (x-9(y+1))^2 + (x+3(y+1))^2 = 36 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 9(y+1) \\ (12(y+1))^2 = 36 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -3(y+1) \\ (-12(y+1))^2 = 36 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 9(y+1) \\ y+1 = \pm \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -3(y+1) \\ y+1 = \pm \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = \pm \frac{9}{2} \\ y = \pm \frac{1}{2} - 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \pm \frac{3}{2} \\ y = \mp \frac{1}{2} - 1 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Omøem: $\left(\frac{9}{2}; -\frac{1}{2}\right); \left(-\frac{9}{2}; -\frac{3}{2}\right); \left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right); \left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} \text{b) } \begin{cases} x^2 + 5x(y-1) - 24(y-1)^2 = 0 \\ (x+8y-8)^2 + (x-3y+3)^2 = 25 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x+8(y-1))(x-3(y-1)) = 0 \\ (x+8(y-1))^2 + (x-3(y+1))^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+8(y-1)=0 \\ (x-3(y-1))^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-8(y-1) \\ y-1=\pm\frac{5}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\frac{40}{11}, y=\pm\frac{5}{11}+1 \\ x=\pm\frac{15}{11}, y=\pm\frac{5}{11}+1 \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\frac{40}{11}; \frac{16}{11}\right); \left(\frac{40}{11}; \frac{6}{11}\right); \left(\frac{15}{11}; \frac{16}{11}\right); \left(\frac{15}{11}; \frac{6}{11}\right)$.

5.1.D09

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 2y = -17 \\ 3z - x + 5y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2 + (y-1)^2 = 0 \\ 3z - x + 5y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \\ 3z-4+5=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \\ z=-3 \end{cases}$$

Ответ: $(4; 1; -3)$.

$$\text{б) } \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 2y = -2 \\ 2z + x + y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 + (y-1)^2 = 0 \\ 2z + x + y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \\ 2z+1-1=-6 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1, y=1, z=-3$$

Ответ: $(-1; 1; -3)$.

5.1.D10

$$\text{a) } \begin{cases} (x-3z)^2 + |y-7z| = 0 \\ x+y+z=44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3z \\ y=7z \\ 3z+7z+z=44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=12 \\ y=28 \\ z=4 \end{cases}$$

Ответ: $(12; 28; 4)$.

$$\text{б) } \begin{cases} (x-4z)^2 + |y-6z| = 0 \\ x+y+z=33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4z \\ y=6z \\ 4z+6z+z=33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=12 \\ y=18 \\ z=3 \end{cases}$$

Ответ: $(12; 18; 3)$.

§ 2. Системы рациональных уравнений

Уровень А

5.2.A01

$$a) \begin{cases} \frac{5}{2x+y}=1 \\ 2x-y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=5 \\ 2x-y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x=12 \\ 2y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow x=3, y=-1.$$

$$б) \begin{cases} \frac{3}{4x+y}=1 \\ 4x-y=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+y=3 \\ 4x-y=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x=16 \\ 2y=-10 \end{cases} \Leftrightarrow x=2, y=-5.$$

5.2.A02

$$a) \begin{cases} \frac{4}{3x-y}=-0,5 \\ 0,2x-y=-2,4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-y=-8 \\ 0,2x-y=-2,4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14y=28 \\ -14x=28 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2, y=2.$$

$$б) \begin{cases} \frac{5}{2x-y}=-0,5 \\ 0,3x-y=-4,9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=-10 \\ 0,3x-y=-4,9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1,7x=-5,1 \\ 0,3x-y=-4,9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ -0,9-y=-4,9 \end{cases} \Leftrightarrow x=-3, y=4.$$

5.2.A03

$$a) \begin{cases} \frac{3x-2y}{2x+3y}=-5 \\ 2x-3y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=-10x-15y \\ 2x+3y \neq 0 \\ 2x-3y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x+13y=0 \\ 2x+3y \neq 0 \\ 2x-3y=5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ 2x+3y \neq 0 \\ 2x-3y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ 2x+3y \neq 0 \\ 5x=5 \end{cases} \Leftrightarrow x=1, y=-1.$$

$$б) \begin{cases} \frac{2x-3y}{3x+2y}=5 \\ 2x-2y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y=15x+10y \\ 3x+2y \neq 0 \\ 3x-2y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ 3x+2y \neq 0 \\ 3x-2y=5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ x \neq 0 \\ 5x=5 \end{cases} \Leftrightarrow x=1, y=-1.$$

5.2.A04

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} \frac{x+3}{y+3} = 2 \\ x+y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \neq -3 \\ x+3=2y+6 \\ x+y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \neq -3 \\ x-2y=3 \\ x+y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \neq -3 \\ -3y=-6 \Leftrightarrow x=7, y=2. \\ x+y=9 \end{cases} \\ \text{б)} \quad & \begin{cases} \frac{x+2}{y+2} = 3 \\ x+y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \neq -2 \\ x+2=3y+6 \\ x+y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \neq -2 \\ x-3y=4 \\ x+y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \neq -2 \\ -4y=-4 \Leftrightarrow x=7, y=1. \\ 4x=28 \end{cases} \end{aligned}$$

5.2.A05

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} \frac{4}{x+5} = \frac{5}{y+4} \\ 4x+5y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y+16=5x+25 \\ x \neq -5 \\ 4x+5y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x+4y=9 \\ 4x+5y=1 \\ x \neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1, y=1. \end{cases} \\ \text{б)} \quad & \begin{cases} \frac{3}{x+4} = \frac{4}{y+3} \\ 3x+4y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y+9=4x+16 \\ x \neq -4 \\ 3x+4y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x+3y=7 \\ 3x+4y=1 \\ x \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1, y=1. \end{cases} \end{aligned}$$

5.2.A06

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} \frac{1}{x-7} = \frac{1}{y-5} \\ 5x+7y=58 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-5=x-7 \\ x \neq 7 \\ 5x+7y=58 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y=-2 \\ 5x+7y=58 \\ x \neq 7 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 12y=48 \\ 12x=72 \Leftrightarrow x=6, y=4. \\ x \neq 7 \end{cases} \\ \text{б)} \quad & \begin{cases} \frac{1}{x-9} = \frac{1}{y-3} \\ 4x+9y=50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=6 \\ x \neq 9 \\ 4x+9y=50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x=104 \\ 13y=26 \Leftrightarrow x=8, y=2. \\ x \neq 9 \end{cases} \end{aligned}$$

5.2.A07

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} \frac{11}{x} = \frac{13}{y} \\ x-y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11y=13(y-2) \\ x=y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=26 \\ x=y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=11, y=13. \end{cases} \\ \text{б)} \quad & \begin{cases} \frac{5}{x} = \frac{9}{y} \\ x-y=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y-4 \\ 5y=9(y-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y-4 \\ 4y=9 \cdot 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5, y=9. \end{cases} \end{aligned}$$

5.2.A08

$$a) \begin{cases} \frac{1}{3x+4} = \frac{1}{3y+4} \\ 4x-3y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3x+4} = \frac{1}{4x+2} \\ 3y=4x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4=4x+2 \\ 3y=4x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$$

Ответ: (2; 2).

$$б) \begin{cases} \frac{1}{4x+5} = \frac{1}{4y+5} \\ 5x-4y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x=3 \end{cases}$$

Ответ: (3; 3).

5.2.A09

$$a) \begin{cases} \frac{x-y}{x+y} = 49 \\ x-y=49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+y} = 1 \\ x-y=49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=25 \\ y=-24 \end{cases}$$

Ответ: (25; -24).

$$б) \begin{cases} \frac{x+y}{x-y} = 47 \\ x+y=47 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x-y} = 1 \\ x+y=47 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ x+y=47 \end{cases}$$

Ответ: (24; 23).

5.2.A10

$$a) \begin{cases} \frac{6x}{5x+y} = 7 \\ 5x+y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=-29 \end{cases}$$

Ответ: (7; -29).

$$б) \begin{cases} \frac{8x}{7x+y} = 9 \\ 7x+y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9 \\ y=-55 \end{cases}$$

Ответ: (9; -55).

Уровень В

5.2.B01

$$a) \begin{cases} \frac{17}{8x+9y} = 1 \\ \frac{7}{3x+4y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x+9y=17 \\ 3x+4y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=3 \\ 3x+4y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=3 \\ x+3y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5y=-5 \\ x=\frac{3-y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Ответ: (1; 1).

$$6) \begin{cases} \frac{19}{9x+10y} = 1 \\ \frac{9}{4x+5y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x+10y=19 \\ 4x+5y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 5y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Ответ: (1; 1).

5.2.B02

$$a) \begin{cases} \frac{2x+7}{7y+2} = -5 \\ \frac{7x+2}{2y+7} = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+7 = -35y-10 \\ 7x+2 = 26y+91 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+35y = -17 \\ 7x-26y = 89 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x+9y = 72 \\ 2x+35y = -17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 8 \\ 2x+35y = -17 \end{cases} \Leftrightarrow 33y = -33, y = -1, x = 9$$

Ответ: (9; -1)

$$6) \begin{cases} \frac{3x+5}{5y+3} = -10 \\ \frac{5x+3}{3y+5} = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+5 = -50y-30 \\ 5x+3 = 42y+70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+50y = -35 \\ 5x-42y = 67 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x+8y = 32 \\ 5x-42y = 67 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 4 \\ -47y = 47 \end{cases}$$

Ответ: (5; -1).

5.2.B03

$$a) \begin{cases} \frac{5x+6}{5y+6} = \frac{6x+5}{6y+5} \\ \frac{5}{x} = \frac{1}{6-y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(5x+6)(6y+5) - (6x+5)(5y+6)}{(5y+6)(6y+5)} = 0 \\ \frac{5}{x} = \frac{1}{6-y} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{11y-11x}{(5y+6)(6y+5)} = 0 \\ \frac{5}{x} = \frac{1}{6-y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ (5y+6)(6y+5) \neq 0 \\ 5(6-x) = x \end{cases}$$

Ответ: (5; 5).

$$6) \begin{cases} \frac{4x+5}{4y+5} = \frac{5x+4}{5y+4} \\ \frac{4}{x} = \frac{1}{5-y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(4x+5)(5y+4) - (5x+4)(4y+5)}{(4y+5)(5y+4)} = 0 \\ 4(5-y) = x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4y-4x}{(4y+5)(5y+4)} = 0 \\ 4(5-y) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 4(5-x) = x \end{cases}$$

Omæem: (4; 4).

5.2.B04

$$a) \begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{7}{y} = 13 \\ \frac{4}{x} - \frac{3}{y} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{8}{y} = 8 \\ \frac{4}{x} - \frac{3}{y} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ \frac{4}{x} = 8 \end{cases}$$

Omæem: (0,5; 1).

$$b) \begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{7}{y} = 19 \\ \frac{6}{x} - \frac{5}{y} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{12}{y} = 12 \\ \frac{6}{x} - \frac{5}{y} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ \frac{6}{x} = 12 \end{cases}$$

Omæem: (0,5; 1).

5.2.B05

$$a) \begin{cases} 12x + \frac{15}{y} = 13 \\ 13x - \frac{15}{y} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25x = 25 \\ 13x - \frac{15}{y} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 1 = \frac{15}{y} \end{cases}$$

Omæem: (1; 15).

$$b) \begin{cases} 13x + \frac{17}{y} = 14 \\ 14x - \frac{17}{y} = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27x = 27 \\ 13x + \frac{17}{y} = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 13x + \frac{17}{y} = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \frac{17}{y} = 1 \end{cases}$$

Omæem: (1; 17).

5.2.B06

$$a) \begin{cases} \frac{3x+2y}{3x-2y} = \frac{25}{3x+2y} \\ 3x+2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{3x-2y} = \frac{25}{5} \\ 3x+2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y = 1 \\ 3x+2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 6 \\ 4y = 4 \end{cases}$$

Omæem: (1; 1).

$$b) \begin{cases} \frac{2x-3y}{2x+3y} = \frac{49}{2x-3y} \\ 2x-3y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{2x+3y} = \frac{49}{7} \\ 2x-3y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y = 1 \\ 2x-3y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 8 \\ 6y = -6 \end{cases}$$

Omæem: (2; -1).

5.2.B07

$$a) \begin{cases} \frac{17}{x-17} = \frac{19}{y-19} \\ 19x+17y=38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17y-17 \cdot 19 = 19x-19 \cdot 17 \\ 19x+17y=38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 19x-17y=0 \\ 19x+17y=38 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 38x=38 \\ 34y=38 \end{cases} \cdot \text{Ответ: } \left(1; \frac{19}{17}\right).$$

$$6) \begin{cases} \frac{13}{x-13} = \frac{15}{y-15} \\ 15x+13y=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13y-15 \cdot 13 = 15x-13 \cdot 15 \\ 15x+13y=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15x-13y=0 \\ 15x+13y=30 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 30x=30 \\ 26x=30 \end{cases} \cdot \text{Ответ: } \left(1; \frac{15}{13}\right).$$

5.2.B08

$$a) \begin{cases} \frac{5-3x}{3x-4} = \frac{5-3y}{3y-4} \\ \frac{y+5}{x-3} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 + \frac{1}{3x-4} = -1 + \frac{1}{3y-4} \\ \frac{y+5}{x-3} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4=3y-4 \\ \frac{y+5}{x-3} = 5 \\ x \neq \frac{4}{3} \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x+5=5x-15 \\ x \neq \frac{4}{3}, x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x=5 \end{cases}$$

Ответ: (5; 5).

$$6) \begin{cases} \frac{7-5x}{5x-6} = \frac{7-5y}{5y-6} \\ \frac{y+7}{x-5} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(7-5x)(5y-6) - (7-5y)(5x-6)}{(5x-6)(5y-6)} = 0 \\ \frac{y+7-7x+35}{x-5} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{35y-25xy-42+30x+42+25xy-35x-30y}{(5x-6)(5y-6)} = 0 \\ \frac{y-7x+42}{x-5} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-5x+5y}{(5x-6)(5y-6)} = 0 \\ \frac{y-7x+42}{x-5} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-y}{(5x-6)(5y-6)} = 0 \\ \frac{-6x+42}{x-5} = 0 \end{cases}.$$

Ответ: (7; 7).

5.2.B09

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \begin{cases} \frac{x^2}{13x+14y} = 14 \\ 13x+14y = 14 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{14} = 14 \\ 13x+14y = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 14 \\ 13x+14y = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -14 \\ 14y = 14 + 13 \cdot 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -14 \\ y = 14 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 14 \\ 14y = 14 - 13 \cdot 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 14 \\ y = -12 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: $(-14; 14), (14; -12)$.

5.2.B10

$$\text{a) } \begin{cases} (x+12)(y+13) = 0 \\ \frac{13x+12y}{y+13} = 24 \end{cases} \quad \text{Т.к. } y \neq -13$$

$$\begin{cases} x = -12 \\ \frac{-12 \cdot 13 + 12y}{y+13} = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -12 \\ \frac{y-13}{y+13} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -12 \\ y-13 = 2y+26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -12 \\ y = -39 \end{cases}$$

Ответ: $(-12; -39)$.

$$\begin{aligned}
 \text{б) } \begin{cases} (x+11)(y+12) = 0 \\ \frac{12x+11y}{y+12} = 22 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -11 \\ \frac{12x+11y}{y+12} = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -11 \\ \frac{-12 \cdot 11 + 11y}{y+12} = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -11 \\ \frac{y-12}{y+12} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -11 \\ y-12 = 2y+24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -11 \\ y = -36 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: $(-11; -36)$.

Уровень С

5.2.C01

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \begin{cases} \frac{5x+4y}{5x-4y} = -31 \\ \frac{4x-5y}{4x+5y} = -\frac{1}{4} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5x+4y+155x-124y}{5x-4y} = 0 \\ \frac{16x-20y+4x+5y}{4(4x+5y)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{160x-120y}{5x-4y} = 0 \\ \frac{20x-15y}{4x+5y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4x-3y}{5x-4y} = 0 \\ \frac{4x-3y}{4x+5y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 3y \\ 5x-4y \neq 0 \\ 4x+5y \neq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: $(3t; 4t), t \neq 0$.

$$\begin{aligned}
 6) \quad & \begin{cases} \frac{4x+3y}{4x-3y} = -17 \\ \frac{3x-4y}{3x+4y} = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4x+3y+68x-51y}{4x-3y} = 0 \\ \frac{9x-12y+3x+4y}{3x+4y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{72x-48y}{4x-3y} = 0 \\ \frac{12x-8y}{3x+4y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2y \\ 4x - 3y \neq 0 \\ 3x + 4y \neq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Омгем: $(2t; 3t)$, $t \neq 0$.

5.2.C02

$$a) \quad \begin{cases} (x-5)(y-3) = 0 \\ \frac{3x+y+12}{x-y+8} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)(y-3) = 0 \\ \frac{x+y+2}{x-y+8} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \\ \frac{x+y+2}{x-y+8} = 0 \end{cases}$$

Омгем: $(5; -7)$.

$$6) \quad \begin{cases} (x+3)(y-4) = 0 \\ \frac{2y-x+5}{x+y+7} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)(y-4) = 0 \\ \frac{-y-4x-16}{x+y+7} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 4 \\ y+4x+16 = 0 \\ x+y+7 \neq 0 \end{cases}$$

Омгем: $(-5; 4)$.

5.2.C03

$$a) \quad \begin{cases} \frac{(x-7)(y-6)}{y-5} = 0 \\ y^2 + 6x + y = 72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 \\ 36 + 6x + 6 = 72 \\ x = 7 \\ y \neq 5 \\ y^2 + 42 + y = 72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 \\ x = 5 \\ x = 7 \\ y \neq 5 \\ y^2 + y - 30 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 6 \\ x = 7 \\ y = -6 \end{cases}$$

Омгем: $(5; 6)$, $(7; -6)$.

$$6) \quad \begin{cases} \frac{(x-6)(y-5)}{y-4} = 0 \\ y^2 + 5x + y = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ 25 + 5x + 5 = 50 \\ x = 6 \\ y \neq 4 \\ y^2 + 30 + y = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \\ x = 6 \\ y \neq 4 \\ (y+5)(y-4) = 0 \end{cases}$$

Омгем: $(4; 5)$, $(6; -5)$.

5.2.C04

$$a) \begin{cases} \frac{x}{y} - 18 \frac{y}{x} = 3 \\ x + 3y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy \neq 0 \\ x^2 - 3xy - 18y^2 = 0 \\ x + 3y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy \neq 0 \\ x^2 - 6xy + 3y - 18y^2 = 0 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy \neq 0 \\ (x - 6y)(x + 3y) = 0 \\ x + 3y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy \neq 0 \\ x = 6y \\ 9y = 9 \end{cases} \text{ . Ответ: } (6; 1).$$

$$b) \begin{cases} \frac{x}{y} - 16 \frac{y}{x} = 6 \\ x + 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{x}{y}\right)^2 - 6 \frac{x}{y} - 16 = 0 \\ x + 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{x}{y} - 8\right)\left(\frac{x}{y} + 2\right) = 0 \\ x + 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 8y \\ x = -2y \\ x + 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8y \\ 10y = 10 \end{cases} \text{ . Ответ: } (8; 1).$$

5.2.C05

$$a) \begin{cases} x^2 + \frac{5}{y} = 26 \\ x^2 - \frac{10}{y} = 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{15}{y} = 3 \\ 3x^2 = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = \pm 5 \end{cases} \text{ . Ответ: } (\pm 5; 5).$$

$$b) \begin{cases} x^2 + \frac{6}{y} = 37 \\ x^2 - \frac{12}{y} = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^3 = 108 \\ \frac{18}{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 36 \\ y = 6 \end{cases} \text{ . Ответ: } (\pm 6; 6).$$

5.2.C06

$$a) \begin{cases} \frac{x}{y} = 32 \\ \frac{x^2}{32y} + \frac{32y^2}{x} = 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 32y \\ x + y = 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 33y = 33 \\ x = 32y \end{cases} \text{ . Ответ: } (32; 1).$$

$$b) \begin{cases} \frac{x}{y} = 33 \\ \frac{x^2}{33y} + \frac{33y^2}{x} = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 33y \\ x + y = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 33y \\ 34y = 34 \end{cases} \text{ . Ответ: } (33; 1).$$

5.2.C07

$$a) \begin{cases} \frac{y}{x+5} = -5 \\ y^2 + \frac{y^2}{x+5} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x+5} = -5 \\ y^2 - 6y + y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x+5} = -5 \\ (y-6)(y+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ \frac{1}{x+5} = 5 \\ y = 6 \\ \frac{6}{x+5} = -5 \end{cases}$$

Омвем: $(-4; 1), (-6, 2; 6)$.

$$b) \begin{cases} \frac{y}{x+6} = -6 \\ y^2 + \frac{y^2}{x+6} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x+6} = -6 \\ y^2 - 6y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x+6} = -6 \\ \begin{cases} y = 7 \\ y = -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ \frac{1}{x+6} = 1 \\ y = 7 \\ \frac{7}{x+6} = -6 \end{cases}$$

Омвем: $(-5; -1), \left(-7\frac{1}{6}; 7\right)$.

5.2.C08

$$a) \begin{cases} 5x + \frac{4}{y} = -y \\ 5x + \frac{3}{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{y} = -y - 2 \\ 5x + \frac{3}{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 2y + 1 = 0 \\ 5x + \frac{3}{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ 5x = 5 \end{cases} \text{ Омвем: } (1; -1).$$

$$b) \begin{cases} 6x + \frac{5}{y} = -y \\ 6x + \frac{4}{y} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{y} = -y + 2 \\ 6x + \frac{4}{y} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-1)^2 = 0 \\ 6x = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \end{cases} \text{ Омвем: } (-1; 1).$$

5.2.C09

$$a) \begin{cases} 4x^2 = 9y^2 \\ \frac{2x+3y+1}{y} = \frac{2x-3y+1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-3y)(2x+3y) = 0 \\ \frac{2x+3y+1}{y} = \frac{2x-3y+1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2x-3y=0 \\ \frac{6y+1}{y} = \frac{1}{x} \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+3y=0 \\ \frac{1}{y} = \frac{-6y+1}{x} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2x=3y \\ \frac{6y+1}{y} = \frac{2}{3y} \end{cases} \\ \begin{cases} 2x=-3y \\ \frac{1}{2y} = \frac{-6y+1}{-3y} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2x=3y \\ 18y+3=2 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x=-3y \\ -3=-12y+2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{12} \\ y = -\frac{1}{18} \\ x = -\frac{5}{8} \\ y = \frac{5}{12} \end{cases}$$

Omgeem: $\left(-\frac{1}{12}; -\frac{1}{18}\right), \left(-\frac{5}{8}; \frac{5}{12}\right)$.

$$\begin{aligned} 6) \quad & \begin{cases} 9x^2 = 4y^2 \\ \frac{3x+2y+1}{y} = \frac{3x-2y+1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x-2y)(3x+2y) = 0 \\ \frac{3x+2y+1}{y} = \frac{3x-2y+1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 3x-2y=0 \\ \frac{4y+1}{y} = \frac{1}{x} \end{cases} \\ \begin{cases} 3x+2y=0 \\ \frac{1}{y} = \frac{-4y+1}{x} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = \frac{2}{3}y \\ \frac{4y+1}{y} = \frac{3}{2y} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{2}{3}y \\ \frac{1}{y} = \frac{-4y+1}{-\frac{2}{3}y} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = \frac{2}{3}y \\ 4y+1 = 1,5 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{2}{3}y \\ -\frac{2}{3} = -4+1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = \frac{1}{12} \\ y = \frac{1}{8} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{5}{18} \\ y = \frac{5}{12} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Omgeem: $\left(-\frac{5}{18}; -\frac{5}{12}\right), \left(-\frac{1}{12}; \frac{1}{8}\right)$.

5.2.C10

$$\begin{aligned} a) \quad & \begin{cases} 3x = 4y \\ \frac{4}{x} + \frac{3}{y-2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 4y \\ \frac{3}{y} + \frac{3}{y-2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 4 \\ \frac{3y-6+3y-4y^2+8y}{y(y-2)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 4y \\ \frac{2y^2-7y+3}{y(y-2)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 4y \\ \frac{(y-3)(2y-1)}{y(y-2)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3}y \\ \begin{cases} y = 3 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Omgeem: $(4; 3), \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} 6) \quad & \begin{cases} 5x = 4y \\ \frac{4}{x} + \frac{5}{y-4} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 4y \\ \frac{5}{y} + \frac{5}{y-4} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 4y \\ \frac{5y-20+5y-6y^2+24y}{y(y-4)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 4y \\ \frac{3y^2-17y+20}{y(y-4)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 4y \\ \frac{(y-4)(3y-5)}{y(y-4)} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Omgeem: $\left(\frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right)$.

5.2.D01

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \begin{cases} 24x + \frac{121}{y} = y \\ 24y + \frac{121}{x} = x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 24(x-y) + \frac{121(x-y)}{xy} = y-x \\ 24(x+y) + \frac{121(x+y)}{xy} = x+y \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \left(25 + \frac{121}{xy}\right)(x-y) = 0 \\ \left(23 + \frac{121}{xy}\right)(x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-y=0 \\ 23 + \frac{121}{xy} = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=0 \\ 25 + \frac{121}{xy} = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=y \\ 23 + \frac{121}{x^2} = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-y \\ 25 = \frac{121}{y^2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ y = \pm \frac{11}{5} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: $\left(\frac{11}{5}; -\frac{11}{5}\right), \left(-\frac{11}{5}; \frac{11}{5}\right)$.

$$\begin{aligned}
 \text{б) } \begin{cases} 35x + \frac{169}{y} = y \\ 35y + \frac{169}{x} = x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 35(x-y) + \frac{169(x-y)}{xy} = y-x \\ 35(x+y) + \frac{169(x+y)}{xy} = x+y \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \left(36 + \frac{169}{xy}\right)(x-y) = 0 \\ \left(34 + \frac{169}{xy}\right)(x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-y=0 \\ 34 + \frac{169}{xy} = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=0 \\ 36 + \frac{169}{xy} = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=y \\ 34 + \frac{169}{x^2} = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-y \\ 36 = \frac{169}{y^2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ y = \pm \frac{13}{6} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: $\left(\frac{13}{6}; -\frac{13}{6}\right), \left(-\frac{13}{6}; \frac{13}{6}\right)$.

5.2.D02

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \begin{cases} x^2 - 7xy + 12y^2 = 0 \\ \frac{12}{x} + \frac{1}{y} = 20 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3y)(x-4y) = 0 \\ \frac{12}{x} + \frac{1}{y} = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=3y \\ \frac{4}{y} + \frac{1}{y} = 20 \end{cases} \\ \begin{cases} x=4y \\ \frac{3}{y} + \frac{1}{y} = 20 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=3y \\ y=\frac{1}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} x=4y \\ y=\frac{1}{5} \end{cases} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: $\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right), \left(\frac{4}{5}; \frac{1}{5}\right)$.

$$\begin{aligned}
 \text{б) } \begin{cases} x^2 - 9xy + 14y^2 = 0 \\ \frac{14}{x} + \frac{1}{y} = 24 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-7y)(x-2y) = 0 \\ \frac{14}{x} + \frac{1}{y} = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=7y \\ \frac{3}{y} = 24 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2y \\ \frac{8}{y} = 24 \end{cases} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: $\left(\frac{7}{8}; \frac{1}{8}\right), \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

5.2.D03

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \begin{cases} \frac{x}{2y-3} + \frac{2y}{2x-3} = -3 \\ \frac{3x}{2y-3} + \frac{2y}{2x-3} = -1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4x}{2y-3} = -4 \\ -\frac{8y}{2x-3} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \neq \frac{3}{2} \\ x = -2y + 3 \\ -y = 2x - 3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x, y \neq \frac{3}{2} \\ x + 2y = 3 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \neq \frac{3}{2} \\ -3y = -3 \\ -3x = -3 \end{cases}$$

Ответ: (1; 1).

$$\begin{aligned}
 \text{б) } \begin{cases} \frac{x}{4y-5} + \frac{4y}{4x-5} = -5 \\ \frac{5x}{4y-5} - \frac{4y}{4x-5} = -1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6x}{4y-5} = -6 \\ -\frac{24y}{4x-5} = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \neq \frac{5}{4} \\ x = -4y + 5 \\ -y = 4x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \neq \frac{5}{4} \\ x + 4y = 5 \\ 4x + y = 5 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: (1; 1).

5.2.D04

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & \begin{cases} (x-3)^2 + (y-3)^2 = 1 \\ \frac{x^2 + 5y^2 + 3x - 2}{4y^2 + 3x + 11} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2 + (y-3)^2 = 1 \\ \frac{x^2 + y^2 - 13}{4y^2 + 3x + 11} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 = 1 \\ \frac{x^2 + y^2 - 13}{4y^2 + 3x + 11} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 6x + 6y - 17 \\ \frac{6x + 6y + 30}{4y^2 + 3x + 11} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2 + (2-x)^2 = 1 \\ y = 5 - x \\ 4y^2 + 3x + 11 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 9 + 4 - 4x + x^2 = 1 \\ y = 5 - x \\ 4y^2 + 3x + 11 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 6 = 0 \\ y = 5 - x \\ 4y^2 + 3x + 11 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, x = 3 \\ y = 5 - x \\ 4y^2 + 3x + 11 \neq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: (2; 3), (3; 2).

$$\text{б) } \begin{cases} (x-4)^2 + (y-4)^2 = 1 \\ \frac{x^2 + 6y^2 + 2x - 8}{5y^2 + 2x + 17} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2 + (y-4)^2 = 1 \\ \frac{x^2 + y^2 - 25}{5y^2 + 2x + 17} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2 + (y-4)^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 5^2 \\ 5y^2 + 2x + 17 \neq 0 \end{cases}$$

Первые два уравнения – соответствуют двум окружностям. Две окружности пересекаются не более, чем в двух точках. Их легко угадать.

Ответ: (3; 4), (4; 3).

5.2.D05

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & \begin{cases} \frac{xy}{5x-4} = \frac{xy}{4y-5} \\ 5x+4y = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy \left(\frac{1}{5x-4} - \frac{1}{4y-5} \right) = 0 \\ 5x+4y = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} xy \frac{-5x+4y-1}{(5x-4)(4y-5)} = 0 \\ 5x+4y = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, y=-\frac{9}{4} \\ y=0, y=-\frac{9}{5} \\ \begin{cases} 5x-4 \neq 0 \\ 4y-5 \neq 0 \\ -5x+4y=1 \\ 5x+4y=-9 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, y=-\frac{9}{4} \\ y=-\frac{9}{5}, y=0 \\ \begin{cases} 5x \neq 4 \\ 4y \neq 5 \\ y=-1 \\ x=-1 \end{cases} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: $\left(0; -\frac{9}{4}\right), \left(-\frac{9}{5}; 0\right), (-1; 1)$.

$$6) \begin{cases} \frac{xy}{4x+3} = \frac{xy}{3y+4} \\ 5x+4y = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \cdot \frac{7-4x}{3} \left(\frac{1}{4x+3} - \frac{1}{11-4x} \right) = 0 \\ y = \frac{7-4x}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(7-4x) \frac{8-8x}{(4x+3)(11-4x)} = 0 \\ y = \frac{7-4x}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, y=\frac{7}{3} \\ y=\frac{7}{4}, y=0 \\ x=1, y=1 \end{cases}$$

Отвѣт: $\left(0; \frac{7}{3}\right), \left(\frac{7}{4}; 0\right), (1; 1)$.

5.2.D06

$$a) \begin{cases} \frac{x}{1-\frac{5}{x+5}} = \frac{y}{1-\frac{6}{y+6}} \\ 5x-y = xy+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{x+5} = \frac{y}{y+6} \\ 5x-y = xy+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, y \neq 0 \\ x \neq -5, y \neq -6 \\ x+5 = y+6 \\ 5x-y = xy+5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, y \neq 0 \\ x \neq -5, y \neq -6 \\ y = x-1 \\ 5x-x+1 = x^2-x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, y \neq 0 \\ x \neq -5, y \neq -6 \\ y = x-1 \\ x^2-5x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, y \neq 0 \\ x \neq -5, y \neq -6 \\ y = x-1 \\ x=1, x=4 \end{cases}$$

Отвѣт: $(4; 3)$.

$$6) \begin{cases} \frac{x}{1-\frac{4}{x+4}} = \frac{y}{1-\frac{5}{y+5}} \\ 4x-y = xy+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{x+4} = \frac{y}{y+5} \\ 4x-y = xy+4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+4 = y+5 \\ x \neq 0, y \neq 0 \\ x \neq -4, y \neq -5 \\ 4x-y = xy+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x-1 \\ x \neq 0, y \neq 0 \\ x \neq -4, y \neq -5 \\ 4x-x+1 = x^2-x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x-1 \\ x \neq 0, y \neq 0 \\ x \neq -4, y \neq -5 \\ x^2-4x+4=0 \end{cases}$$

Отвѣт: $(2; 1)$.

5.2.D07

$$a) \begin{cases} \frac{8}{|x^2 - 9x| + 4} = y^2 + 2 \\ \frac{x + 19y}{x + y - 8} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \text{В первом уравнении л.ч. } \leq 2, \text{ п.ч. } \geq 2. \text{ Они}$$

$$\text{равны, когда } y = 0 \text{ а } x = 0 \text{ и } x = 9. \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ x = 9 \\ \frac{x}{x-8} = 9 \end{cases} . \text{ Ответ: } (9; 0).$$

$$б) \begin{cases} \frac{6}{|x^2 - 7x| + 2} = y^2 + 3 \\ \frac{x + 16y}{x + y - 6} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \text{В первом уравнении л.ч. } \leq 3, \text{ п.ч. } \geq 3 \text{ при } y = 0$$

$$\text{а } x = 0 \text{ или } x = 7. \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ x = 7 \\ \frac{x}{x-6} = 7 \end{cases} . \text{ Ответ: } (7; 0).$$

5.2.D08

$$a) \begin{cases} \frac{2}{(2x-3z)^2 + 1} + \frac{3}{(3y-4z)^2 + 1} = 5 \\ 2x + 3y + 4z = 66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3z = 0 \\ 3y - 4z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 66 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 3z \\ 3y = 4z \\ 11z = 66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 8 \\ z = 6 \end{cases}$$

Ответ: (9; 8; 6).

$$б) \begin{cases} \frac{3}{(3x-4z)^2 + 1} + \frac{4}{(4y-5z)^2 + 1} = 7 \\ 3x + 4y + 5z = 168 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4z = 0 \\ 4y - 5z = 0 \\ 3x + 4y + 5z = 168 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 4z \\ 4y = 5z \\ 14z = 168 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = 15 \\ z = 12 \end{cases}$$

Ответ: (16; 15; 12).

5.2.D09

$$a) \begin{cases} x = \frac{7y-34}{y-5} \\ x^2 + y^2 = 52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 + \frac{1}{y-5} \\ x^2 + y^2 = 52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4, x = 6 \\ y = 6, x = 8 \\ x^2 + y^2 = 52 \end{cases}$$

Ответ: (6; 4).

$$б) \begin{cases} x = \frac{6y-23}{y-4} \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 + \frac{1}{y-4} \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3, x = 5 \\ y = 5, x = 7 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases}$$

Ответ: (5; 3).

5.2.D10

$$a) \begin{cases} y = 3x + \frac{5}{3x+1} \\ x^3 = y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, y = 5 \\ x = -2, y = -7 \\ x^3 = y - 1 \end{cases}$$

Ответ: (-2; -7).

$$б) \begin{cases} y = 4x + \frac{7}{4x-1} \\ x^3 = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, y = 7 \\ x = 2, y = 7 \\ x^3 = y + 1 \end{cases}$$

Ответ: (2; 7).

§ 3. Системы иррациональных уравнений

Уровень А

5.3.A01

$$a) \begin{cases} \sqrt{x+y-3} = 0 \\ \sqrt{x-y-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-3=0 \\ x-y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4=0 \\ x-y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

Ответ: (2; 1).

$$б) \begin{cases} \sqrt{x+y-4} = 0 \\ \sqrt{x-y-2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-4=0 \\ x-y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-6=0 \\ x-y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$$

Ответ: (3; 1).

5.3.A02

$$a) \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} = 4 \\ x+y=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=16y \\ x+y=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=16 \end{cases}$$

Ответ: (16; 1).

$$6) \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} = 3 \\ x + y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9y \\ x + y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 9 \end{cases}$$

Омвем: (9; 1).

5.3.A03

$$a) \begin{cases} \sqrt{x-y} = 2 \\ x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 12 \\ x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases}$$

Омвем: (6; 2).

$$6) \begin{cases} \sqrt{x-y} = 3 \\ x + y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 9 \\ x + y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 20 \\ x + y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 1 \end{cases}$$

Омвем: (10; 1).

5.3.A04

$$a) \begin{cases} \sqrt{3x+4y} = 0 \\ \sqrt{3x-4y} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -4y \\ 3x - 4y = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -4y \\ -8y = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = -18 \end{cases}$$

Омвем: (24; -18).

$$6) \begin{cases} \sqrt{2x+3y} = 0 \\ \sqrt{2x-3y} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 2x - 3y = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 36 \\ 2x - 3y = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = -6 \end{cases}$$

Омвем: (9; -6).

5.3.A05

$$a) \begin{cases} \sqrt{\frac{x-7}{y-6}} = 1 \\ x + y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 7 = y - 6 \\ x + y = 11 \\ y \neq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 11 \\ y \neq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 12 \\ x + y = 11 \\ y \neq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6, y = 5 \\ y \neq 6 \end{cases}$$

Омвем: (6; 5).

$$6) \begin{cases} \sqrt{\frac{x-9}{y-5}} = 1 \\ x + y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 9 = y - 5 \\ x + y = 12 \\ y \neq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 12 \\ y \neq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 16 \\ x + y = 12 \\ y \neq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8, y = 4 \\ y \neq 5 \end{cases}$$

Омвем: (8; 4).

5.3.A06

$$a) \begin{cases} \sqrt{3x-y-1} = 1 \\ \sqrt{x-2y+5} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y - 1 = 1 \\ x - 2y + 5 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 2 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 5 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1, y = 1$$

Омвем: (1; 1).

$$6) \begin{cases} \sqrt{x-3y+3}=1 \\ \sqrt{2x-y+3}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y+3=1 \\ 2x-y+3=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y=-2 \\ 2x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x=5 \\ 2x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=1, y=1$$

Отвѣт: (1; 1).

5.3.A07

$$a) \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4x+5y}}=1 \\ 4x-5y=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+5y=1 \\ 4x-5y=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x=-8 \\ 4x-5y=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$$

Отвѣт: (-1; 1).

$$6) \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3x+4y}}=1 \\ 3x-4y=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4y=1 \\ 3x-4y=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x=-6 \\ 3x-4y=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$$

Отвѣт: (-1; 1).

5.3.A08

$$a) \begin{cases} \sqrt{\frac{x-y}{7}}=2 \\ \frac{x+y}{7}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-y}{7}=4 \\ \frac{x+y}{7}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=28 \\ x+y=28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=28 \\ y=0 \end{cases}$$

Отвѣт: (28; 0).

$$6) \begin{cases} \sqrt{\frac{x-y}{9}}=3 \\ \frac{x+y}{9}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=81 \\ x+y=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=126 \\ x+y=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=63 \\ y=-18 \end{cases}$$

Отвѣт: (63; -18).

5.3.A09

$$a) \begin{cases} \sqrt{\frac{3y}{5x}}=1 \\ 5x+3y=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y=5x \\ x \neq 0 \\ 5x+3y=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x=30 \\ 5x+3y=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$$

Отвѣт: (3; 5).

$$6) \begin{cases} \sqrt{\frac{7y}{2x}}=1 \\ 2x+7y=28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7y=2x \\ x \neq 0 \\ 2x+7y=28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14y=28 \\ 7y=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=7 \end{cases}$$

Отвѣт: (7; 2).

5.3.A10

$$a) \begin{cases} \sqrt{\frac{2y-3x}{x}} = 3 \\ x+y=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y-3x=9x \\ x+y=14 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y-12x=0 \\ x+y=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=12 \end{cases}$$

Ответ: (2; 12).

$$б) \begin{cases} \sqrt{\frac{2y-5x}{x}} = 5 \\ x+y=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y-5x=25x \\ x+y=16 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=15x \\ x+y=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=15 \end{cases}$$

Ответ: (1; 15).

Уровень В

5.3.B01

$$a) \begin{cases} (x-2)\sqrt{y-3} = 0 \\ x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=2 \\ x+y=4 \end{cases} \\ \begin{cases} y=3 \\ x+y=4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, y=2 \\ x=1, y=3 \end{cases}$$

Ответ: (2; 2); (1; 3).

$$б) \begin{cases} (x-4)\sqrt{y-6} = 0 \\ x+y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-4=0 \\ x+y=8 \end{cases} \\ \begin{cases} y-6=0 \\ x+y=8 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4, y=4 \\ x=2, y=6 \end{cases}$$

Ответ: (4; 4); (2; 6).

5.3.B02

$$a) \begin{cases} (x-25)(y-28) = 0 \\ y+5\sqrt{x} = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=25 \\ y+25=25 \end{cases} \\ \begin{cases} y=28 \\ 5\sqrt{x} = -3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=25 \\ y=0 \end{cases} \text{ — нет решений.}$$

Ответ: (25; 0).

$$б) \begin{cases} (x-16)(y-19) = 0 \\ y+4\sqrt{x} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=16 \\ y+16=16 \end{cases} \\ \begin{cases} y=19 \\ 4\sqrt{x} = -3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=16 \\ y=0 \end{cases} \text{ — нет решений.}$$

Ответ: (16; 0).

5.3.B03

$$a) \begin{cases} 3x - 2\sqrt{y} = 4 \\ 3x + 2\sqrt{y} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 12 \\ 3x + 2\sqrt{y} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}. \text{ Ответ: } (2; 1).$$

$$б) \begin{cases} 2x - 3\sqrt{y} = 3 \\ 2x + 3\sqrt{y} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 12 \\ 2x + 3\sqrt{y} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}. \text{ Ответ: } (3; 1).$$

5.3.B04

$$a) \begin{cases} 2\sqrt{x} + 7y = 9 \\ 2\sqrt{x} + 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = 4 \\ 2\sqrt{x} + 3 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}. \text{ Ответ: } (1; 1).$$

$$б) \begin{cases} 3\sqrt{x} + 4y = 7 \\ 3\sqrt{x} + 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 2 \\ 3\sqrt{x} + 2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}. \text{ Ответ: } (1; 1).$$

5.3.B05

$$a) \begin{cases} (\sqrt{x} - 3)(y - 6) = 0 \\ \sqrt{x} + 5y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 3 \\ 5y + 3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 1 \end{cases}. \text{ Ответ: } (9; 1).$$

$$\begin{cases} y = 6 \\ \sqrt{x} + 30 = 8 \end{cases} - \text{ нет решений.}$$

$$б) \begin{cases} (\sqrt{x} - 4)(y - 5) = 0 \\ \sqrt{x} + 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 4 \\ 4 + 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = 1 \end{cases}. \text{ Ответ: } (16; 1).$$

$$\begin{cases} y = 5 \\ \sqrt{x} = -4 \end{cases} - \text{ нет решений.}$$

5.3.B06

$$a) \begin{cases} 4\sqrt{x} - 7\sqrt{y} = -3 \\ 4\sqrt{x} + 7\sqrt{y} = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8\sqrt{x} = 8 \\ 4\sqrt{x} + 7\sqrt{y} = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}. \text{ Ответ: } (1; 1).$$

$$б) \begin{cases} 8\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 5 \\ 8\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16\sqrt{x} = 16 \\ 8\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}. \text{ Ответ: } (1; 1).$$

5.3.B07

$$a) \begin{cases} 2\sqrt{x} = y - 4 \\ 4\sqrt{x} = y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x} = y - 4 \\ 2\sqrt{x} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = y - 4 \\ \sqrt{x} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 10 \end{cases}$$

Ответ: (9; 10).

$$6) \begin{cases} 3\sqrt{x} = y - 5 \\ 5\sqrt{x} = y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{x} = y - 5 \\ 2\sqrt{x} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 5 = 12 \\ \sqrt{x} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = 17 \end{cases}$$

Ответ: (16; 17).

5.3.B08

$$a) \begin{cases} \sqrt{\frac{5x}{2y+3}} = 1 \\ x^2 + 5y + 25 = (x+5)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 2y + 3 \\ 2y + 3 \neq 0 \\ x^2 + 5y + 25 = x^2 + 10x + 25 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 2y + 3 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 4x + 3 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 6 \end{cases}$$

Ответ: (3; 6).

$$6) \begin{cases} \sqrt{\frac{7x}{3y+4}} = 1 \\ x^2 + 7y + 49 = (x+7)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 3y + 4 \\ 3y + 4 \neq 0 \\ x^2 + 7y + 49 = (x+7)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 3y + 4 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 6x + 4 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 8 \end{cases}$$

Ответ: (4; 8).

5.3.B09

$$a) \begin{cases} \sqrt{5x^2 + 9y + 16} = 5 \\ \sqrt{4x^2 + 9y + 16} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 9y + 16 = 25 \\ 4x^2 + 9y + 16 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ 9y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Ответ: (0; 1).

$$6) \begin{cases} \sqrt{4x^2 + 7y + 2} = 4 \\ \sqrt{3x^2 + 7y + 2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 7y + 2 = 16 \\ 3x^2 + 7y + 2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ 7y = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

Ответ: (0; 2).

5.3.B10

$$a) \begin{cases} \sqrt{x+y} = 8 \\ \sqrt{\frac{x+y}{x}} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 64 \\ \frac{8}{x} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 62 \end{cases} \text{ Ответ: (2; 62).}$$

$$6) \begin{cases} \sqrt{x+y} = 6 \\ \sqrt{\frac{x+y}{x}} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 36 \\ \frac{6}{x} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 34 \end{cases} \text{ Ответ: (2; 34).}$$

5.3.C01

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 4 \\ x - y = 32 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 4 \\ (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 4 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x} = 12 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 36 \\ y = 4 \end{cases} \cdot \text{Ответ: } (36; 4). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2 \\ x - y = 36 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2 \\ (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x} = 20 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 100 \\ y = 64 \end{cases} \cdot \text{Ответ: } (100; 64). \end{aligned}$$

5.3.C02

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \begin{cases} x - y = 76 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 38 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 76 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 38 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 20 \\ \sqrt{y} = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 400 \\ y = 324 \end{cases} \cdot \text{Ответ: } (400; 324). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad \begin{cases} x - y = 72 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 36 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 72 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 19 \\ \sqrt{y} = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 361 \\ y = 289 \end{cases} \cdot \text{Ответ: } (361; 289). \end{aligned}$$

5.3.C03

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \begin{cases} \sqrt{xy} = 11 \\ x + y = 122 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 122 \\ x - 2\sqrt{xy} + y = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}\sqrt{y} = 11 \\ (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 10\sqrt{y} + y = 11 \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{y} + 11)(\sqrt{y} - 1) = 0 \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 121 \end{cases} \\ \begin{cases} 10\sqrt{y} + x = 11 \\ \sqrt{y} - \sqrt{x} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x} + 11)(\sqrt{x} - 1) = 0 \\ \sqrt{y} - \sqrt{x} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 121 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: (121; 1); (1; 121).

$$\begin{aligned}
 6) \quad & \begin{cases} \sqrt{xy} = 10 \\ x + y = 101 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{xy} = 10 \\ x - 2\sqrt{xy} + y = 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{xy} = 10 \\ (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = 81 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 9 \\ 9\sqrt{y} + y - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 9 \\ (\sqrt{y} - 1)(\sqrt{y} + 10) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 100 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y} - \sqrt{x} = 9 \\ 9\sqrt{x} + x - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y} - \sqrt{x} = 9 \\ (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 10) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 100 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Омәем: (100; 1); (1; 100).

5.3.C04

$$a) \quad \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{17} \\ xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ 2xy = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)^2 = 9 \\ xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x - y = 3 \\ xy = 4 \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x - y = -3 \\ xy = 4 \end{cases} & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad \begin{cases} x = y + 3 \\ y^2 + 3y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 3 \\ (y + 4)(y - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1, x = 4 \\ y = -4, x = -1 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x = y - 3 \\ y^2 - 3y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 3 \\ (y - 4)(y + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4, x = 1 \\ y = -1, x = -4 \end{cases}$$

Омәем: (4; 1); (-4; -1); (1; 4); (-1; -4).

$$6) \quad \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{5} \\ xy = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ 2xy = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)^2 = 4 \\ xy = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x - y = 2 \\ xy = 8 \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x - y = -2 \\ xy = 8 \end{cases} & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad \begin{cases} x - y = 2 \\ xy = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ y^2 + 2y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ (y + 4)(y - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2, x = 4 \\ y = -4, x = -2 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x - y = -2 \\ y^2 - 2y + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 2 \\ (y - 4)(y + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4, x = 2 \\ y = -2, x = -4 \end{cases}$$

Омәем: (4; 2); (-2; -4); (-4; -2); (-4; -2).

5.3.C05

$$a) \quad \begin{cases} 5x + 3y = 10\sqrt{5x + 3y} \\ 5x - 3y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{5x + 3y}(\sqrt{5x + 3y} - 10) = 0 \\ 5x - 3y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x+3y=0 \\ 5x-3y=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x=20 \\ 5x-3y=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-\frac{10}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x+3y=100 \\ 5x-3y=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x=120 \\ 5x-3y=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=12 \\ y=\frac{40}{3} \end{cases}$$

Ответ: $\left(2; -\frac{10}{3}\right); \left(12; \frac{40}{3}\right)$.

$$6) \begin{cases} 4x+5y=8\sqrt{4x+5y} \\ 4x-5y=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4x+5y}(\sqrt{4x+5y}-8)=0 \\ 4x-5y=16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+5y=0 \\ 4x-5y=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x=16 \\ 4x-5y=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, y=-\frac{8}{5} \\ x=10, y=\frac{24}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+5y=64 \\ 4x-5y=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x=80 \\ 4x-5y=16 \end{cases}$$

Ответ: $\left(2; -\frac{8}{5}\right); \left(10; \frac{24}{5}\right)$.

5.3.C06

$$a) \begin{cases} \sqrt{(7x-4y)^2}=28 \\ 7x+4y=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x-4y=28 \\ 7x-4y=-28 \\ 7x+4y=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x=42 \\ 14x=-14 \\ 7x+4y=14 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=3, y=-\frac{7}{4} \\ x=-1, \frac{21}{4}=y \end{cases} \text{ . Ответ: } \left(3; -\frac{7}{4}\right); \left(-1; \frac{21}{4}\right)$$

$$6) \begin{cases} \sqrt{(6x-7y)^2}=42 \\ 6x+7y=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-7y=42 \\ 6x-7y=-42 \\ 6x+7y=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x=60 \\ 12x=-24 \\ 6x+7y=18 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=5, y=-\frac{12}{7} \\ x=-2, y=\frac{30}{7} \end{cases} \text{ . Ответ: } \left(5; -\frac{12}{7}\right); \left(-2; \frac{30}{7}\right)$$

5.3.C07

$$a) \begin{cases} 5x + 7y = |y| + 20 \\ \sqrt{5x + 7y} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 7y = 25 \\ |y| = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5, x = -2 \\ y = -5, x = 12 \end{cases}$$

Ответ: $(-2; 5); (12; -5)$.

$$b) \begin{cases} |3x + 8y| = |y| + 33 \\ \sqrt{3x + 8y} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 8y = 36 \\ |y| = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3, x = 4 \\ y = -3, x = 20 \end{cases}$$

Ответ: $(4; 3); (20; -3)$.

5.3.C08

$$a) \begin{cases} |\sqrt{3x - 2y} - 8| = 10 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x - 2y} - 8 = 10 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 324 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 336 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 56 \\ y = -78 \end{cases}$$

Ответ: $(56; -78)$.

$$b) \begin{cases} |\sqrt{4x - 7y} - 6| = 13 \\ 4x + 7y = 39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4x - 7y} - 6 = 13 \\ 4x + 7y = 39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 7y = 361 \\ 4x + 7y = 39 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x = 400 \\ 4x + 7y = 39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = -23 \end{cases}$$

Ответ: $(50; -23)$.

5.3.C09

$$a) \begin{cases} y = 5\sqrt{x + 28} \\ y = 9\sqrt{x - 28} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25x + 25 \cdot 28 = 81x - 81 \cdot 28 \\ y = 5\sqrt{x + 28} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 53 \\ y = 45 \end{cases}$$

Ответ: $(53; 45)$.

$$b) \begin{cases} y = 3\sqrt{x + 20} \\ y = 7\sqrt{x - 20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x + 180 = 49x - 49 \cdot 20 \\ y = 7\sqrt{x - 20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 29 \\ y = 21 \end{cases}$$

Ответ: $(29; 21)$.

5.3.C10

$$a) \begin{cases} y = 12\sqrt{x} \\ 144x - 7y - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 12\sqrt{x} \\ 144x - 84\sqrt{x} - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 12\sqrt{x} \\ 24x - 14\sqrt{x} - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 12\sqrt{x} \\ (4\sqrt{x} - 3)(6\sqrt{x} + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 9 \\ \sqrt{x} = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 9 \\ x = \frac{9}{16} \end{cases} \text{ Ответ: } \left(\frac{9}{16}; 9 \right).$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad & \begin{cases} y = 11\sqrt{x} \\ 121x + y - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 11\sqrt{x} \\ 121x + 11\sqrt{x} - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} y = 11\sqrt{x} \\ (11\sqrt{x} + 5)(11\sqrt{x} - 4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 11\sqrt{x} \\ \sqrt{x} = \frac{4}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = \frac{16}{121} \end{cases} \cdot \text{Ответ: } \left(\frac{16}{121}; 4\right).
 \end{aligned}$$

Уровень D

5.3.D01

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \begin{cases} \frac{x}{y} + 6 = 5\sqrt{\frac{x}{y}} \\ x + y = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{\frac{x}{y}} - 3\right)\left(\sqrt{\frac{x}{y}} - 2\right) = 0 \\ x + y = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 9y \\ x = 4y \end{cases} \\ x + y = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4, x = 36 \\ y = 8, x = 32 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: (36; 4); (32; 8).

$$\begin{aligned}
 6) \quad & \begin{cases} \frac{x}{y} + 14 = 9\sqrt{\frac{x}{y}} \\ x + y = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{\frac{x}{y}} - 2\right)\left(\sqrt{\frac{x}{y}} - 7\right) = 0 \\ x + y = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 4y \\ x = 49y \end{cases} \\ x + y = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10, y = 40 \\ x = 1, y = 49 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: (40; 10); (49; 1).

5.3.D02

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \begin{cases} x + 2y - 24\sqrt{x + 2y} + 144 = 0 \\ x - 2y = 44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x + 2y} - 12)^2 = 0 \\ x - 2y = 44 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 144 \\ x - 2y = 44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 188 \\ x - 2y = 44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 94 \\ y = 25 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: (94; 25).

$$\begin{aligned}
 6) \quad & \begin{cases} 2x + y - 22\sqrt{2x + y} + 121 = 0 \\ 2x - y = -21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{2x + y} - 11)^2 = 0 \\ 2x - y = -21 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 121 \\ 2x - y = -21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 100 \\ 2x - y = -21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 25 \\ y = 71 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: (25; 71).

5.3.D03

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} = 12\sqrt{\frac{y}{x}} + 4 \\ x + y = 37 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} - 4\sqrt{\frac{x}{y}} - 12 = 0 \\ x + y = 37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{\frac{x}{y}} - 6\right)\left(\sqrt{\frac{x}{y}} + 2\right) = 0 \\ x + y = 37 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 36y \\ x + y = 37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 36 \\ y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: (36; 1).

$$\begin{aligned} \text{б) } \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} = 15\sqrt{\frac{y}{x}} + 2 \\ x + y = 26 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} - 2\sqrt{\frac{x}{y}} - 15 = 0 \\ x + y = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{\frac{x}{y}} - 5\right)\left(\sqrt{\frac{x}{y}} + 3\right) = 0 \\ x + y = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 25y \\ x + y = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 25 \\ y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: (25; 1).

5.3.D04

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{cases} 3x - y - 18\sqrt{3x - y} + 81 = 0 \\ 3x + y - 6\sqrt{3x + y} + 9 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{3x - y} - 9)^2 = 0 \\ (\sqrt{3x + y} - 3)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 81 \\ 3x + y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 90 \\ 3x + y = 9 \end{cases} \Rightarrow x = 15, y = -36 \end{aligned}$$

Ответ: (15; -36).

$$\begin{aligned} \text{б) } \begin{cases} x - 4y - 8\sqrt{x - 4y} + 16 = 0 \\ x + 4y - 16\sqrt{x + 4y} + 64 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x - 4y} - 4)^2 = 0 \\ (\sqrt{x + 4y} - 8)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 4y = 16 \\ x + 4y = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 80 \\ x + 4y = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 6 \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: (40; 6).

5.3.D05

а) ($x, y < 0$)

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{2}{3} \\ 3x + 7\sqrt{xy} + 4y + 6 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{9}y \\ \frac{4}{3}y - \frac{14}{3}y + 4y + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}y = -6 \\ x = \frac{4}{9}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -9 \\ x = -4 \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: (-4; -9).

6) $(x, y < 0)$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{2}{5} \\ 5x + 11\sqrt{xy} + 4y + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{25}y \\ \frac{4}{5}y - \frac{22}{5}y + 4y + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{25}y \\ \frac{2}{5}y = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -25 \end{cases} \cdot \text{Ответ: } (-4; -25).$$

5.3.D06

a) $\begin{cases} x\sqrt{\frac{y}{x}} = -\sqrt{10} \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y < 0 \\ xy = 10 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y < 0 \\ xy = 10 \\ (x+y)^2 = 49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 10 \\ x+y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y^2 - 7y - 10 = 0 \\ x+y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y+2)(y+5) = 0 \\ x+y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2, x = -5 \\ y = -5, x = -2 \end{cases}$$

Ответ: $(-5; -2); (-2; -5)$.

б) $\begin{cases} x\sqrt{\frac{y}{x}} = -\sqrt{15} \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y < 0 \\ xy = 15 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y < 0 \\ (x+y)^2 = 64 \\ xy = 15 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = -8 \\ -y^2 - 8y - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = -8 \\ (y+3)(y+5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3, y = -5 \\ x = -5, y = -3 \end{cases}$$

Ответ: $(-3; -5); (-5; -3)$.

5.3.D07

a) $\begin{cases} \sqrt{x-5} + \sqrt{y+4} = 8 \\ (x-5)\sqrt{y+4} + (y+4)\sqrt{x-5} = 96 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-5} + \sqrt{y+4} = 8 \\ \sqrt{x-5}\sqrt{y+4}(\sqrt{x-5} + \sqrt{y+4}) = 96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-5} + \sqrt{y+4} = 8 \\ \sqrt{x-5}\sqrt{y+4} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-5} + \sqrt{y+4} = 8 \\ (\sqrt{x-5})^2 + 8\sqrt{x-5} - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-5} + \sqrt{y+4} = 8 \\ (\sqrt{x-5} - 6)(\sqrt{x-5} - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-5} + \sqrt{y+4} = 8 \\ \begin{cases} \sqrt{x-5} = 6 \\ \sqrt{x-5} = 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 41, y = 0 \\ x = 9, y = 32 \end{cases}$$

Ответ: $(41; 0); (9; 32)$.

$$\begin{aligned}
& 6) \begin{cases} \sqrt{x+3} + \sqrt{y-6} = 9 \\ (x+3)\sqrt{y-6} + (y-6)\sqrt{x+3} = 72 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} + \sqrt{y-6} = 9 \\ \sqrt{x+3}\sqrt{y-6}(\sqrt{x+3} + \sqrt{y-6}) = 72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} + \sqrt{y-6} = 9 \\ \sqrt{x+3}\sqrt{y-6} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} + \sqrt{y-6} = 9 \\ -(\sqrt{y-6})^2 + 9\sqrt{y-6} - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} + \sqrt{y-6} = 9 \\ ((\sqrt{y-6}-1)(\sqrt{y-6}-8)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} + \sqrt{y-6} = 9 \\ -(\sqrt{y-6})^2 + 9\sqrt{y-6} - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} + \sqrt{y-6} = 9 \\ ((\sqrt{y-6}-1)(\sqrt{y-6}-8)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} = 9 - \sqrt{y-6} \\ \sqrt{y-6} = 1 \\ \sqrt{y-6} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7, 61 = x \\ y = 70, x = -2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ответ: (61; 7); (-2; 70).

5.3.D08

a) $(x, y < 0)$

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} x + \sqrt{xy} + 2y = -92 \\ \frac{x}{y} - 9\sqrt{\frac{x}{y}} - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{xy} + 2y = -92 \\ \left(\sqrt{\frac{x}{y}} - 10\right)\left(\sqrt{\frac{x}{y}} + 1\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x = 100y \\ 100y - 10y + 2y = -92 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -100 \\ y = -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ответ: (-100; -1).

б) $(x, y < 0)$

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} 2x + \sqrt{xy} + y = -121 \\ \frac{x}{y} - 7\sqrt{\frac{x}{y}} - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \sqrt{xy} + y = -121 \\ \left(\sqrt{\frac{x}{y}} - 8\right)\left(\sqrt{\frac{x}{y}} + 1\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x = 64y \\ 128y - 8y + y = -121 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -64 \\ y = -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ответ: (-64; -1).

5.3.D09

$$a) \begin{cases} |2x - 5z| + \sqrt{3y - 4z} = 0 \\ 2x + 3y + z = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 5z \\ 3y = 4z \\ 5z + 4z + z = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = \frac{4}{3} \\ z = 1 \end{cases}$$

Omgeem: $\left(\frac{5}{2}; \frac{4}{3}; 1\right)$.

$$b) \begin{cases} |4x - 7z| + \sqrt{2y - 3z} = 0 \\ 4x + 2y + z = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 7z \\ 2y = 3z \\ 7z + 3z + z = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{4} \\ y = \frac{3}{2} \\ z = 1 \end{cases}$$

Omgeem: $\left(\frac{7}{4}; \frac{3}{2}; 1\right)$.

5.3.D10

$$a) \begin{cases} \sqrt{(x-2y)^2 + 4} + \sqrt{(z-11y)^2 + 121} = 13 \\ x + y + z = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = 11y \\ 2y + y + 11y = 14 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 2, y = 1, z = 11$$

Omgeem: $(2; 1; 11)$.

$$b) \begin{cases} \sqrt{(x+3y)^2 + 9} + \sqrt{(z-12y)^2 + 144} = 15 \\ x + y + z = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 0 \\ z - 12y = 0 \\ -3y + 12y + y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = -3, y = 1, z = 12$$

Omgeem: $(-3; 1; 12)$.

Глава 6. Системы неравенств

§ 1. Системы целых алгебраических неравенств

Уровень А

6.1.A01

$$а) \begin{cases} 4x+9 \leq 9x+4 \\ 1,7x < 51 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x \geq 5 \\ x < 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x < 30 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1; 30)$$

Ответ: $[1; 30)$.

$$б) \begin{cases} 5x+8 \leq 8x+5 \\ 2,3x < 46 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \geq 3 \\ x < 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x < 20 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1; 20)$$

Ответ: $[1; 20)$.

6.1.A02

$$а) \begin{cases} 5(4x+3) - 4(5x+3) > 3x \\ \frac{2}{3}x < \frac{3}{2}x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 3x \\ \frac{5}{6}x > -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > -6 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-6; 1)$$

Ответ: $(-6; 1)$.

$$б) \begin{cases} 3(2x+5) - 2(3x+5) > 5x \\ \frac{4}{5}x < \frac{5}{4}x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 > 5x \\ \frac{9}{20}x > -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > -20 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-20; 1)$$

Ответ: $(-20; 1)$.

6.1.A03

$$а) \begin{cases} -0,7x \leq 2,1 \\ 2,1x < 0,7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x < \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-3; \frac{1}{3}\right). \text{ Ответ: } \left[-3; \frac{1}{3}\right).$$

$$б) \begin{cases} -0,6x \leq 2,4 \\ 2,4x < 0,6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x < \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-4; \frac{1}{4}\right). \text{ Ответ: } \left[-4; \frac{1}{4}\right).$$

6.1.A04

$$а) \begin{cases} \frac{2x+5}{5} > \frac{5x+2}{2} \\ \frac{x+2}{5} > \frac{x+5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x > 25x \\ 2x+4 < 5x+25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > -7 \end{cases} \Rightarrow x \in (-7; 0)$$

Ответ: $(-7; 0)$.

$$б) \begin{cases} \frac{3x+2}{2} > \frac{2x+3}{3} \\ \frac{x+2}{3} > \frac{x+3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x > 4x \\ 2x+4 < 3x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > -5 \end{cases} \Rightarrow x \in (0; +\infty)$$

Ответ: $(0; +\infty)$.

6.1.A05

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{cases} (x+6)^2 < (x+4)^2 \\ 6x+13 > 5x-7 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x+6)-(x+4)(x+6+x+4) < 0 \\ x > -20 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4(x+5) < 0 \\ x > -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -5 \\ x > -20 \end{cases}, x \in (-20; -5) \end{aligned}$$

Ответ: $(-20; -5)$.

$$\begin{aligned} \text{б) } \begin{cases} (x+5)^2 < (x+3)^2 \\ 5x+12 > 4x-9 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x+5-x-3)(x+5+x+3) < 0 \\ x > -21 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x < -4 \\ x > -21 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-21; -4). \end{aligned}$$

Ответ: $(-21; -4)$.

6.1.A06

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{5}{3}x < 0, 6x+16 \\ 0, 7x > -0, 56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{16}{15}x < 16 \\ x > 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 15 \\ x > -8 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-8; 15)$$

Ответ: $(-8; 15)$.

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{10}{3}x < 0, 3x+91 \\ 0, 9x > -0, 63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{91}{30}x < 91 \\ x > -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 30 \\ x > -7 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-7; 30)$$

Ответ: $(-7; 30)$.

6.1.A07

$$\begin{aligned} \text{a) } 2x-3 \leq 5x-2 \leq 3-2x &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3 \leq 5x-2 \\ 5x-2 \leq 3-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \geq -1 \\ 7x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ x \leq \frac{5}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{5}{7}\right]. \text{ Ответ: } \left[-\frac{1}{3}; \frac{5}{7}\right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } 3x-4 \leq 7x-2 \leq 4-3x &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4 \leq 7x-2 \\ 7x-2 \leq 4-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x \geq -2 \\ 10x \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \leq 0,6 \end{cases}, x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{5}\right]. \text{ Ответ: } \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{5}\right]. \end{aligned}$$

6.1.A08

$$\text{a) } \begin{cases} 6x-5 \leq 6-5x \\ 6-5x \leq 5-6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11x \leq 11 \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -1. \text{ Ответ: } (-\infty; -1].$$

$$6) \begin{cases} 5x-4 \leq 5-4x \\ 5-4x \leq 4-5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x \leq 9 \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -1. \text{ Ответ: } (-\infty; -1].$$

6.1.A09

$$a) \begin{cases} 1,7x-2,6 < 0,7x-0,6 \\ 0,7x-0,6 < 2,7x-1,6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ 2x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right). \text{ Ответ: } \left(\frac{1}{2}; 2\right).$$

$$6) \begin{cases} 2,3x-3,4 < 1,3x-1,4 \\ 1,3x-1,4 < 3,3x-2,4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ 2x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right). \text{ Ответ: } \left(\frac{1}{2}; 2\right).$$

6.1.A10

$$a) \begin{cases} 2 < 3 - \frac{2}{3}x \\ 3 - \frac{2}{3}x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}x < 1 \\ \frac{2}{3}x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ x > -\frac{3}{2} \end{cases}. \text{ Ответ: } \left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

$$6) \begin{cases} 3 < 4 - \frac{3}{4}x \\ 4 - \frac{3}{4}x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}x < 1 \\ \frac{3}{4}x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{4}{3} \\ x > -\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow x \in \left(-\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right). \text{ Ответ: } \left(-\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right).$$

Уровень В

6.1.B01

$$a) (\sqrt{5} < 3)$$

$$\begin{cases} (3-2x)(\sqrt{5}-3) > 0 \\ 0,3x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3 > 0 \\ x < 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x < 10 \end{cases}, x \in \left(\frac{3}{2}; 10\right). \text{ Ответ: } \left(\frac{3}{2}; 10\right).$$

$$6) (\sqrt{3} < 2)$$

$$\begin{cases} (4-3x)(\sqrt{3}-2) > 0 \\ 0,4x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4 > 0 \\ x < 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{4}{3} \\ x < 10 \end{cases}, x \in \left(\frac{4}{3}; 10\right). \text{ Ответ: } \left(\frac{4}{3}; 10\right).$$

6.1.B02

$$a) \begin{cases} (3-\sqrt{11})x < \frac{4}{3+\sqrt{11}} \\ x^2+25 > (x+5)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (9-11)x < 4 \\ x^2+25 > x^2+10x+25 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-2; 0)$$

Ответ: $(-2; 0)$.

$$\begin{aligned}
 6) \quad & \begin{cases} (2-\sqrt{7})x < \frac{6}{2+\sqrt{7}} \\ x^2+36 > (x+6)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4-7)x < 6 \\ x^2+36 > x^2+12x+36 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-2; 0)
 \end{aligned}$$

Омгем: $(-2; 0)$.

6.1.B03

$$\begin{aligned}
 а) \quad & \begin{cases} 7(3x+2) - 3(7x+2) > 2x \\ (x-4)(x+8) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14-6 > 2x \\ x \in (-8; 4) \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x \in (-8; 4) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-8; 4)
 \end{aligned}$$

Омгем: $(-8; 4)$.

$$\begin{aligned}
 6) \quad & \begin{cases} 7(5x+4) - 5(7x+4) > 4x \\ (x-2)(x+4) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 28-20 > 4x \\ x \in (-4; 2) \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \in (-4; 2) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-4; 2)
 \end{aligned}$$

Омгем: $(-4; 2)$.

6.1.B04

$$\begin{aligned}
 а) \quad & \begin{cases} (4x+3)^2 < 16x^2 \\ 16x^2 < (4x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ((4x+3)+4x)(4x+3-4x) < 0 \\ (4x-(4x-3))(4x+(4x-3)) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} 3(8x+3) < 0 \\ 3(8x-3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{3}{8} \\ x < \frac{3}{8} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Омгем: $\left(-\infty; -\frac{3}{8}\right)$.

$$\begin{aligned}
 6) \quad & \begin{cases} (2x+7)^2 < 4x^2 \\ 4x^2 < (2x-7)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+7-2x)(2x+7+2x) < 0 \\ (2x+2x-7)(2x-2x+7) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} 7(4x+7) < 0 \\ 7(4x-7) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{7}{4} \\ x < \frac{7}{4} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Омгем: $\left(-\infty; -\frac{7}{4}\right)$.

6.1.B05

$$a) \begin{cases} 3x^2 - 4x + 3 \leq 3x^2 - 5x + 5 \\ 3x^2 - 5x + 5 \leq 2x^2 - 3x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \leq 0 \\ x^2 - 2x + 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ (x-1)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x = 1$. Ответ: $\{1\}$.

$$b) \begin{cases} 5x^2 - 6x - 1 \leq 5x^2 - 7x + 2 \\ 5x^2 - 7x + 2 \leq 4x^2 - 3x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x^2 - 4x + 4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ (x-2)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x = 2$. Ответ: $\{2\}$

6.1.B06

$$a) \begin{cases} -9 < 7 - x^2 \\ 7 - x^2 < 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 < 16 \\ x^2 > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-4; 4).$$

Ответ: $(-4; 4)$,

$$b) \begin{cases} -8 < 17 - x^2 \\ 17 - x^2 < 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 < 25 \\ x^2 > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-5; 5).$$

Ответ: $(-5; 5)$.

6.1.B07

$$a) \begin{cases} x^2 + 9x + 8 \leq 0 \\ -0,3x \geq 2,4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x+8) \leq 0 \\ x \leq -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-8; -1] \\ x \leq -8 \end{cases} \Leftrightarrow x = -8$$

Ответ: $\{-8\}$.

$$b) \begin{cases} x^2 + 7x + 6 \leq 0 \\ -0,7x \geq 4,2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x+6) \leq 0 \\ x \leq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-6; -1] \\ x \leq -6 \end{cases} \Leftrightarrow x = -6$$

Ответ: $\{-6\}$

6.1.B08

$$a) \begin{cases} 3x^2 - 14x + 8 \leq 0 \\ 5x + 2 > 2x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x-2)(x-4) < 0 \\ 3x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(\frac{2}{3}; 4\right) \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1; 4)$$

Ответ: $(1; 4)$.

$$b) \begin{cases} 4x^2 - 11x + 6 < 0 \\ 4x + 3 > 3x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4x-3)(x-2) < 0 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(\frac{3}{4}; 2\right) \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1; 2)$$

Ответ: $(1; 2)$.

6.1.B09

$$a) \begin{cases} (x+2)^2 + (x-6)^2 \geq 40 \\ x^2 \leq 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + 4 + x^2 - 12x + 36 \geq 0 \\ x(x-4) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 8x \geq 0 \\ x(x-4) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-4) \geq 0 \\ x(x-4) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0, x = 4$$

Ответ: $\{0\}, \{4\}$.

$$\begin{aligned}
 6) \quad & \begin{cases} (x+3)^2 + (x-5)^2 \geq 34 \\ x^2 \leq 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 6x + 9 + x^2 - 10x + 25 \geq 34 \\ x(x-2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 4x \geq 0 \\ x(x-2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2) \geq 0 \\ x(x-2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0, x = 2
 \end{aligned}$$

Ответ: $\{0\}, \{2\}$.

6.1.B10

$$\text{a)} \quad \begin{cases} 9x^2 - 2 < (3x+2)^2 \\ (3x+2)^2 < 9x^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 - 2 < 9x^2 + 12x + 4 \\ 9x^2 + 12x + 4 < 9x^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x > -6 \\ 12x < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x < -\frac{1}{6} \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{6}\right)$.

$$\begin{aligned}
 6) \quad & \begin{cases} 4x^2 - 3 < (2x+3)^2 \\ (2x+3)^2 < 4x^2 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 3 < 4x^2 + 12x + 9 \\ 4x^2 + 12x + 9 < 4x^2 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} 12x > -12 \\ 12x > -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x < -\frac{1}{2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$.

Уровень С

6.1.C01

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \begin{cases} (x-7)(x^2-49) \geq 0 \\ (x-9)(x^2-81) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-7)^2(x+7) \geq 0 \\ (x-9)^2(x+9) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-7; +\infty) \\ x \in \{9\} \cup (-\infty; -9] \end{cases} \Leftrightarrow x = 9
 \end{aligned}$$

Ответ: 9.

$$\begin{aligned}
 6) \quad & \begin{cases} (x-6)(x^2-36) \geq 0 \\ (x-10)(x^2-100) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-6)^2(x+6) \geq 0 \\ (x-10)^2(x+10) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-6; +\infty) \\ x \in (-\infty; -10] \cup \{10\} \end{cases} \Leftrightarrow x = 10
 \end{aligned}$$

Ответ: 10.

6.1.C02

$$a) 3x^2 - 2x - 6 \leq 2x^2 - 2x + 3 \leq 3x^2 - 2x - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 2x - 6 \leq 2x^2 - 2x + 3 \\ 2x^2 - 2x + 3 \leq 3x^2 - 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 9 \leq 0 \\ x^2 - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-3; 3] \\ x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-3; -2] \cup [2; 3]$$

Омвем: $[-3; -2] \cup [2; 3]$.

$$b) \begin{cases} 4x^2 - 5x - 14 \leq 3x^2 - 5x + 2 \\ 3x^2 - 5x + 2 \leq 4x^2 - 5x - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 16 \leq 0 \\ x^2 - 9 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)(x+4) \leq 0 \\ (x-3)(x+3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-4; 4] \\ x \in (-\infty; -3] \cup [3; +\infty) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in [-4; -3] \cup [3; 4]$$

Омвем: $[-4; -3] \cup [3; 4]$.

6.1.C03

$$a) \begin{cases} 2x^2(4x-3) \geq 7(3-4x) \\ 3(2x-7) \leq 4x^2(7-2x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x^2+7)(4x-3) \geq 0 \\ (4x^2+3)(2x-7) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x \geq 3 \\ 2x \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{4} \\ x \leq \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow x \in \left[\frac{3}{4}; \frac{7}{2} \right]$$

Омвем: $\left[\frac{3}{4}; \frac{7}{2} \right]$.

$$b) \begin{cases} 3x^2(7x-2) \geq 4(2-7x) \\ 2(3x-4) \leq 7x^2(4-3x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x^2+4)(7x-2) \geq 0 \\ (2+7x^2)(3x-4) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x \geq 2 \\ 3x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{7} \\ x \leq \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow x \in \left[\frac{2}{7}; \frac{4}{3} \right]$$

Омвем: $\left[\frac{2}{7}; \frac{4}{3} \right]$.

6.1.C04

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} (x+4)^3(x+2)^2 \leq (x+4)^2(x+2)^3 \\ x^2 < 15 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)^2(x+2)^2(x+4-x-2) \leq 0 \\ x^2 < 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2; x = -4 \\ x^2 < 15 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dots \end{aligned}$$

Omgeem: -2.

$$\begin{aligned} \text{b) } & \begin{cases} (x+5)^3(x+3)^2 \leq (x+5)^2(x+3)^3 \\ x^2 < 24 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (x+5)^3(x+3)^2(x+5-x-3) \leq 0 \\ x^2 < 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+5)^2(x+3)^2 \leq 0 \\ x^2 < 24 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5, x = -3 \\ x^2 < 24 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3. \end{aligned}$$

Omgeem: -3.

6.1.C05

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} (x^2 - 64)(x - 6) < (x^2 - 36)(x - 8) \\ 0,6x > 4,2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (x-8)(x+8)(x-6) < (x-6)(x+6)(x-8) \\ x > 7 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (x-8)(x-6)(x+8-x-6) < 0 \\ x > 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (6; 8) \\ x > 7 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (7; 8) \end{aligned}$$

Omgeem: (7; 8).

$$\begin{aligned} \text{b) } & \begin{cases} (x^2 - 81)(x + 5) < (x^2 - 25)(x + 9) \\ 0,4x > -2,4 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (x-9)(x+9)(x+5) < (x-5)(x+5)(x+9) \\ x > -6 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (x+9)(x+5)(x-9-x+5) > 0 \\ x > -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+9)(x+5) < 0 \\ x > -6 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-9; -5) \\ x > -6 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-6; -5) \end{aligned}$$

Omgeem: (-6; -5).

6.1.C06

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & \begin{cases} (3x^2 - 11)^2 \leq (3x^2 - 13)^2 \\ (x + 7)^2 \leq (x - 7)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} (3x^2 - 11 + 3x^2 - 13)(3x^2 - 11 - 3x^2 + 13) \leq 0 \\ (x + 7 - x + 7)(x + 7 + x - 7) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} 2(6x^2 - 24) \leq 0 \\ 14(2x) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 2)(x - 2) \leq 0 \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-2; 2] \\ x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \\
 & \Leftrightarrow x \in [-2; 0]
 \end{aligned}$$

Ответ: $[-2; 0]$.

$$\begin{aligned}
 \text{б) } & \begin{cases} (2x^2 - 7)^2 \leq (2x^2 - 9)^2 \\ (x + 8)^2 \leq (x - 8)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} (2x^2 - 7 + 2x^2 - 9)(2x^2 - 7 - 2x^2 + 9) \leq 0 \\ (x + 8 + x - 8)(x + 8 - x + 8) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} (4x^2 - 16) \cdot 2 \leq 0 \\ 2x \cdot 16 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2)(x + 2) \leq 0 \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-2; 2] \\ x \leq 0 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow x \in [-2; 0]
 \end{aligned}$$

Ответ: $[-2; 0]$.

6.1.C07

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & \begin{cases} x^3(5x^2 + 4) > 4x^3 \\ x^2 - 8x - 20 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^5 > 0 \\ (x - 10)(x + 2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \in (-2; 10) \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow x \in (0; 10)
 \end{aligned}$$

Ответ: $(0; 10)$.

$$\begin{aligned}
 \text{б) } & \begin{cases} x^3(4x^2 + 5) > 5x^3 \\ x^2 + 10x - 24 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^5 > 0 \\ (x + 12)(x - 2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \in (-12; 2) \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow x \in (0; 2)
 \end{aligned}$$

Ответ: $(0; 2)$.

6.1.C08

$$\text{a) } \begin{cases} 3x(4x - 7)^2 \leq 2(4x - 7)^2 \\ 4x(3x - 2)^2 \geq 7(3x - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4x - 7)^2(3x - 2) \leq 0 \\ (3x - 2)^2(4x - 7) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left\{ \frac{7}{4} \right\} \cup \left(-\infty; \frac{2}{3} \right] \\ x \in \left\{ \frac{2}{3} \right\} \cup \left[\frac{7}{4}; +\infty \right) \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}; x = \frac{7}{4}$$

Ответ: $\frac{2}{3}; \frac{7}{4}$.

$$б) \begin{cases} 8x(2x-9)^2 \leq 3(2x-9)^2 \\ 2x(8x-3)^2 \geq 9(8x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-9)^2(8x-3) \leq 0 \\ (8x-3)^2(2x-9) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left\{ \frac{9}{2} \right\} \cup \left(-\infty; \frac{3}{8} \right] \\ x \in \left\{ \frac{3}{8} \right\} \cup \left[\frac{9}{2}; +\infty \right) \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{8}; x = \frac{9}{2}$$

Ответ: $\frac{3}{8}; \frac{9}{2}$.

6.1.C09

$$а) \begin{cases} (2x-5)^2 \geq (5x-2)^2 \\ (2x+5)^2 \leq (5x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-5-5x+2)(2x-5+5x-2) \geq 0 \\ (2x+5+5x+2)(2x+5-5x-2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-3x-3)(7x-7) \geq 0 \\ (7x-7)(-3x+3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x-1) \leq 0 \\ (x+1)(x-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Ответ: ± 1 .

$$б) \begin{cases} (3x-4)^2 \geq (4x-3)^2 \\ (3x+4)^2 \leq (4x+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 - 24x + 16 \geq 16x^2 - 24x + 9 \\ 9x^2 + 24x + 16 \leq 16x^2 + 24x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x^2 \leq 7 \\ 7x^2 \geq 7 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Ответ: ± 1 .

6.1.C10

$$а) \begin{cases} (x^2 - 4x + 3)^2 \leq 0 \\ x^3 + x^2 > 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ((x-3)(x-1))^2 \leq 0 \\ x^3 + x^2 > 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \\ x^3 + x^2 > 35 \end{cases} \Leftrightarrow x =$$

Ответ: 3.

$$6) \begin{cases} (x^2 - 3x - 4)^2 \leq 0 \\ x^3 + x^2 > 47 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ((x-4)(x+1))^2 \leq 0 \\ x^3 + x^2 > 47 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -1 \\ x^3 + x^2 > 47 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4$$

Ответ: 4.

Уровень D

6.1.D01

$$a) \begin{cases} 25x^4 + 21x^2 - 4 > 0 \\ x^2(9x + 11) < 11x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + 1)(25x^2 - 4) > 0 \\ 9x^3 + 11x^2 < 11x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (5x - 2)(5x + 2) > 0 \\ 9x^3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; -\frac{2}{5}\right) \cup \left(\frac{2}{5}; +\infty\right) \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{2}{5}\right)$$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{2}{5}\right)$.

$$6) \begin{cases} 16x^4 + 7x^2 - 9 > 0 \\ x^2(7x + 8) < 8x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + 1)(16x^2 - 9) > 0 \\ 7x^3 + 8x^2 < 8x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (4x - 3)(4x + 3) > 0 \\ 7x^3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; -\frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}; +\infty\right) \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{3}{4}\right)$$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{3}{4}\right)$.

6.1.D02

$$a) \begin{cases} (5x^2 - 4x - 1)^2 < (5x^2 - 4x + 3)^2 \\ (5x^2 - 4x + 3)^2 < (5x^2 + 4x + 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (5x^2 - 4x - 1 + 5x^2 - 4x + 3)(5x^2 - 4x - 1 - 5x^2 + 4x - 3) < 0 \\ (5x^2 - 4x + 3 + 5x^2 + 4x + 2)(5x^2 - 4x + 3 - 5x^2 - 4x - 2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (10x^2 - 8x + 2)(-4) < 0 \\ (10x^2 + 5)(-8x + 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 - 4x + 1 > 0 \\ -8x + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; +\infty), \text{ т.к. } D < 0 \\ x > \frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{8}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{8}; +\infty\right)$.

$$\begin{aligned}
 6) & \begin{cases} (4x^2 - 2x - 3)^2 < (4x^2 - 2x + 5)^2 \\ (4x^2 - 2x + 5)^2 < (4x^2 + 2x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} ((4x^2 - 2x - 3) + (4x^2 - 2x + 5))((4x^2 - 2x - 3) - (4x^2 - 2x + 5)) < 0 \\ ((4x^2 - 2x + 5) + (4x^2 + 2x + 1))((4x^2 - 2x + 5) - (4x^2 + 2x + 1)) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} (8x^2 - 4x + 2)(-8) < 0 \\ (8x^2 + 6)(-4x + 4) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 2x + 2 > 0 \\ -4x + 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; \infty) \text{ т.к. } D < 0 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x < 1
 \end{aligned}$$

Ответ: $(1; +\infty)$.

6.1.D03

$$\begin{aligned}
 a) \max(6x - 5; x^2 + 3) < 7 & \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 5 < 7 \\ x^2 + 3 < 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ (x+2)(x-2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \in (-2; 2) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-2; 2)
 \end{aligned}$$

Ответ: $(-2; 2)$.

$$\begin{aligned}
 б) \min(3x + 2; x^2 + 7) > 11 & \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2 > 11 \\ x^2 + 7 > 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ (x-2)(x+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty) \end{cases} \Rightarrow x \in (3; +\infty)
 \end{aligned}$$

Ответ: $(3; +\infty)$.

6.1.D04

$$\begin{aligned}
 a) & \begin{cases} (2x+3)^6 > (3x+2)^6 \\ 2x^3 < 3x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+3)^2 > (3x+2)^2 \\ x^2(2x-3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+3+3x+2)(2x+3-3x-2) > 0 \\ x^2 \left(x - \frac{3}{2}\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} (5x+5)(-x+1) > 0 \\ x \in (-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{3}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+1) < 0 \\ x \in (-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{3}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-1; 1) \\ x \in (-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{3}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-1; 0) \cup (0; 1)
 \end{aligned}$$

Ответ: $(-1; 0) \cup (0; 1)$.

$$\begin{aligned}
 6) \quad & \begin{cases} (3x-4)^6 > (4x-3)^6 \\ 4x^3 < 5x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 - 24x + 16 > 16x^2 - 24x + 9 \\ x^2(4x-5) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} 7x^2 < 7 \\ x \in (-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{5}{4}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 < 1 \\ x \in (-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{5}{4}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-1; 1) \\ x \in (-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{5}{4}\right) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-1; 0) \cup (0; 1)
 \end{aligned}$$

Ответ: $(-1; 0) \cup (0; 1)$

6.1.D05

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \begin{cases} (5x^2 - 12x + 4)^2 + (2x^2 - 7x + 6)^2 \leq 0 \\ x^5 - 2x^4 - x^2 + 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 - 12x + 4 = 0 \\ 2x^2 - 7x + 6 = 0 \\ x^5 - 2x^4 - x^2 + 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} (5x-2)(x-2) = 0 \\ (2x-3)(x-2) = 0 \\ x^5 - 2x^4 - x^2 + 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2
 \end{aligned}$$

Ответ: 2.

$$\begin{aligned}
 6) \quad & \begin{cases} (5x^2 - 17x + 6)^2 + (3x^2 - 13x + 12)^2 \leq 0 \\ x^5 - 3x^4 - x^2 + 10 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 - 17x + 6 = 0 \\ 3x^2 - 13x + 12 = 0 \\ x^5 - 3x^4 - x^2 + 10 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(5x-2) = 0 \\ (x-3)(3x-4) = 0 \\ x^5 - 3x^4 - x^2 + 10 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3
 \end{aligned}$$

Ответ: 3.

6.1.D06

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \begin{cases} |x^2 + 12| (16 - x^2) \geq 0 \\ x^2 + 15x + 44 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 11 \\ x^2 - 16 \leq 0, \\ (x+11)(x+4) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-4; 4] \cup \{11\} \cup \{-11\} \\ x \in [-11; -4] \end{cases} \Leftrightarrow x = -11, x = -4
 \end{aligned}$$

Ответ: -4; -11.

$$6) \begin{cases} |x^2 + 144| (9 - x^2) \geq 0 \\ x^2 + 15x + 36 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 12 \\ x^2 - 9 \leq 0 \\ (x+12)(x+3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-3; 3] \cup \{\pm 12\} \\ x \in [-12; -3] \end{cases} \Leftrightarrow x = -12, x = -3$$

Омвем: $-12; -3$.

6.1.D07

$$a) \begin{cases} (3x-4)^6 \leq (4x-3)^3 \\ 9x^2 - 28x + 19 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x-4)^2 \leq 4x-3 \\ (9x-19)(x-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 - 24x + 16 \leq 4x - 3 \\ (9x-19)(x-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 - 28x + 19 \leq 0 \\ (9x-19)(x-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (9x-19)(x-1) \leq 0 \\ (9x-19)(x-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1, x = \frac{19}{9}$$

Омвем: $1; \frac{19}{9}$.

$$6) \begin{cases} (2x-3)^6 \leq (3x-2)^3 \\ 4x^2 - 15x + 11 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-3)^2 \leq (3x-2) \\ 4x^2 - 15x + 11 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 12x + 9 \leq 3x - 2 \\ 4x^2 - 15x + 11 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 15x + 11 \leq 0 \\ 4x^2 - 15x + 11 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (4x-11)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{11}{4}; x = 1$$

Омвем: $\frac{11}{4}; 1$.

6.1.D08

$$a) \begin{cases} 2(2x+3)^4 \geq (2x+3)^3 + (2x+3)^5 \\ x^2 + 3x + 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+3)^3(1 - (2x+3))^2 \leq 0 \\ (x+1)(x+2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x+3)^3(2x+2)^2 \leq 0 \\ (x+1)(x+2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup \{-1\} \\ x \in [-2; -1] \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-2; -\frac{3}{2}\right] \cup \{-1\}$$

Омвем: $\left[-2; -\frac{3}{2}\right] \cup \{-1\}$

$$6) \begin{cases} 2(3x+7)^4 \geq (3x+7)^3 + (3x+7)^5 \\ x^2 + 5x + 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x+7)^3((3x+7)-1)^2 \leq 0 \\ (x+2)(x+3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3x+7)^3(x+2)^2 \leq 0 \\ (x+2)(x+3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; -\frac{7}{3}\right] \cup \{-2\} \\ x \in [-3; -2] \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-3; -\frac{7}{3}\right] \cup \{-2\}$$

Омвем: $\left[-3; -\frac{7}{3}\right] \cup \{-2\}$.

6.1.D09

$$\text{а) } \begin{cases} (m-3)(n-3) < 0 & (1) \\ (m-3)(k-3) > 0 & (2) \\ (m-3)(n-3)(k-3) < 0 & (3) \end{cases}$$

Если перемножить (1) и (3) получим $(m-3)^2(n-3)^2(k-3) > 0 \Rightarrow k > 3$. Теперь перемножим (2) и (3), получим $(m-3)^2(k-3)^2(n-3) < 0 \Rightarrow n < 3$. Тогда $m > 3$.

Ответ: $m > 3, k > 3, n < 3$

$$\text{б) } \begin{cases} (x-5)(y-5) > 0 & (1) \\ (x-5)(z-5) > 0 & (2) \\ (x-5)(y-5)(z-5) < 0 & (3) \end{cases}$$

Перемножив (1) и (3), получим $(x-5)^2(y-5)^2(z-5) < 0 \Rightarrow z < 5$.

Теперь (2) и (3) получим $(x-5)^2(z-5)^2(y-5) < 0 \Rightarrow y < 5$. Тогда $x < 5$.

Ответ: $x < 5, y < 5, z < 5$.

6.1.D10

$$\text{а) } \begin{cases} (a^2 - 5a + 6)(a^2 - 11a + 28) > 0 \\ (a^2 - 6a + 8)(a^2 - 11a + 24) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)(a-3)(a-4)(a-7) > 0 \\ (a-2)(a-4)(a-8)(a-3) < 0 \end{cases}$$

Перемножим $\Rightarrow (a-2)^2(a-3)^2(a-4)^2(a-7)(a-8) < 0 \Rightarrow a \in (7; 8) \Rightarrow a > 7$

Ответ: $a > 7$.

$$\text{б) } \begin{cases} (a^2 + 5a + 4)(a^2 + 7a + 10) > 0 \\ (a^2 + 10a + 24)(a^2 + 3a + 2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)(a+4)(a+2)(a+5) > 0 \\ (a+4)(a+6)(a+2)(a+1) < 0 \end{cases}$$

Перемножим $\Rightarrow (a+1)^2(a+2)^2(a+4)^2(a+5)(a+6) < 0 \Rightarrow a \in (-6; -5) \Rightarrow a > -5$

Ответ: $a < -5$.

§ 2. Системы дробно-рациональных неравенств

Уровень А

6.2.A01

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{3}{4x+5} > 0 \\ 3x-8 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+5 > 0 \\ 3x < 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{5}{4} \\ x < \frac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{5}{4}; \frac{8}{3}\right). \text{ Ответ: } \left(-\frac{5}{4}; \frac{8}{3}\right).$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{2}{3x+7} > 0 \\ 2x-5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+7 > 0 \\ 2x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{7}{3} \\ x < \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{7}{3}; \frac{5}{2}\right). \text{ Ответ: } \left(-\frac{7}{3}; \frac{5}{2}\right).$$

6.2.A02

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{2x-5}{5x^2+9} < 0 \\ 4x-1 > 2x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5 < 0 \\ 2x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{5}{2} \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(2; \frac{5}{2}\right). \text{ Ответ: } \left(2; \frac{5}{2}\right).$$

$$6) \begin{cases} \frac{3x-2}{9x^2+5} < 0 \\ 3x-2 > 2x-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2 < 0 \\ x > -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{2}{3} \\ x > -5 \end{cases} \Rightarrow x \in \left(-5; \frac{2}{3}\right). \text{ Ответ: } \left(-5; \frac{2}{3}\right).$$

6.2A03

$$a) \begin{cases} \frac{5}{5-3x} > 0 \\ \frac{5-6x}{3} \geq \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-3x > 0 \\ 25-30x \geq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x < 5 \\ 30x \leq 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{5}{3} \\ x \leq \frac{19}{30} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{19}{30}\right]$$

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; \frac{19}{30}\right].$$

$$6) \begin{cases} \frac{4}{4-5x} > 0 \\ \frac{4-3x}{2} \geq \frac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-5x > 0 \\ 20-15x \geq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x < 4 \\ 15x \leq 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{4}{5} \\ x \leq \frac{14}{15} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{4}{5}\right)$$

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; \frac{4}{5}\right).$$

6.2A04

$$a) \begin{cases} \frac{11}{5-6x} < 0 \\ 0,2x-0,1 > 0,3x-0,2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-6x < 0 \\ 0,1x < 0,1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{5}{6} \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{5}{6}; 1\right)$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{5}{6}; 1\right).$$

$$6) \begin{cases} \frac{5}{3-8x} < 0 \\ 0,3x-0,2 > 0,4x-0,3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-8x < 0 \\ 0,1x < 0,1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{8} \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{3}{8}; 1\right)$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{3}{8}; 1\right).$$

6.2A05

$$a) \begin{cases} \frac{8}{5x+4} > \frac{5}{5x+4} \\ 5x+4 < 4x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{5x+4} > 0 \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+4 > 0 \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{4}{5} \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{4}{5}; 1\right)$$

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{4}{5}; 1\right).$$

$$6) \begin{cases} \frac{7}{6x+5} > \frac{6}{6x+5} \\ 6x+5 < 5x+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{6x+5} > 0 \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+5 > 0 \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{5}{6} \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{5}{6}; 1\right)$$

Омгем: $\left(-\frac{5}{6}; 1\right)$.

6.2A06

$$a) \begin{cases} \frac{7}{6x-5} \geq \frac{8}{6x-5} \\ \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}x > -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{6x-5} \leq 0 \\ \frac{13}{6}x > -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-5 < 0 \\ x > -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{5}{6} \\ x > -6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-6; \frac{5}{6}\right).$$

Омгем: $\left(-6; \frac{5}{6}\right)$.

$$6) \begin{cases} \frac{8}{7x-6} \geq \frac{9}{7x-6} \\ \frac{4}{3}x + \frac{3}{4}x > -25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{7x-6} \leq 0 \\ \frac{25}{12}x > -25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x-6 < 0 \\ x > -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{6}{7} \\ x > -12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-12; \frac{6}{7}\right)$$

Омгем: $\left(-12; \frac{6}{7}\right)$.

6.2A07

$$a) \begin{cases} \frac{5}{3x-5} < \frac{3}{3x-5} \\ 0,4x \geq 0,3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3x-5} < 0 \\ x \geq \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-5 < 0 \\ x \geq \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{5}{3} \\ x \geq \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{3}{4}; \frac{5}{3}\right)$$

Омгем: $\left[\frac{3}{4}; \frac{5}{3}\right)$.

$$6) \left\{ \begin{array}{l} \frac{7}{2x-7} < \frac{2}{2x-7} \\ 0,6x \geq 0,5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{5}{2x-7} < 0 \\ x \geq \frac{5}{6} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x-7 < 0 \\ x \geq \frac{5}{6} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x < \frac{7}{2} \\ x \geq \frac{5}{6} \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in \left[\frac{5}{6}; \frac{7}{2} \right)$$

Ответ: $\left[\frac{5}{6}; \frac{7}{2} \right)$.

6.2A08

$$a) \left\{ \begin{array}{l} \frac{15}{3-5x} > \frac{17}{3-5x} \\ \frac{2+3x}{4} < 5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{3-5x} < 0 \\ 2+3x < 20 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > \frac{3}{5} \\ x < 6 \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in \left(\frac{3}{5}; 6 \right)$$

Ответ: $\left(\frac{3}{5}; 6 \right)$

$$6) \left\{ \begin{array}{l} \frac{12}{1-4x} > \frac{19}{1-4x} \\ \frac{3+4x}{3} < 5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{7}{1-4x} < 0 \\ 3+4x < 15 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > \frac{1}{4} \\ x < 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{4}; 3 \right)$$

Ответ: $\left(\frac{1}{4}; 3 \right)$.

6.2A09

$$a) \left\{ \begin{array}{l} \frac{11}{4-x} \geq 0 \\ \frac{2}{2-5x} < 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x < 4 \\ x > \frac{2}{5} \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in \left(\frac{2}{5}; 4 \right). \text{ Ответ: } \left(\frac{2}{5}; 4 \right)$$

$$6) \left\{ \begin{array}{l} \frac{9}{3-x} \geq 0 \\ \frac{3}{3-4x} < 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x < 3 \\ x > \frac{3}{4} \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in \left(\frac{3}{4}; 3 \right). \text{ Ответ: } \left(\frac{3}{4}; 3 \right).$$

6.2A10

$$a) \left\{ \begin{array}{l} \frac{3x-5}{4x-5} > \frac{3x-2}{4x-5} \\ \frac{2}{3x} < \frac{3}{2x} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{4x-5} < 0 \\ \frac{5}{6x} > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x < \frac{5}{4} \\ x > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in \left(0; \frac{5}{4} \right).$$

Ответ: $\left(0; \frac{5}{4} \right)$.

$$6) \begin{cases} \frac{4x-7}{3x-2} > \frac{4x-3}{3x-2} \\ \frac{3}{4x} < \frac{4}{3x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{3x-2} < 0 \\ \frac{7}{12x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{2}{3} \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \left(0; \frac{2}{3}\right).$$

Ответ: $\left(0; \frac{2}{3}\right)$.

Уровень В

6.2.B01

$$a) \begin{cases} \frac{14}{16x^2-9} > 0 \\ 4x-3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{14}{(4x-3)(4x+3)} > 0 \\ x < \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; -\frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}; +\infty\right) \\ x < \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{3}{4}\right). \text{ Ответ: } \left(-\infty; -\frac{3}{4}\right).$$

$$6) \begin{cases} \frac{19}{4x^2-25} > 0 \\ 2x-5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{19}{(2x-5)(2x+5)} > 0 \\ 2x-5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}; +\infty\right) \\ x < \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right). \text{ Ответ: } \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right).$$

6.2.B02

$$a) \begin{cases} \frac{25-36x^2}{3x^2+4} \leq 0 \\ \frac{5-6x}{7} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (6x-5)(6x+5) \geq 0 \\ 6x-5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; -\frac{5}{6}\right] \cup \left[\frac{5}{6}; +\infty\right) \\ x < \frac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{5}{6}\right]. \text{ Ответ: } \left(-\infty; -\frac{5}{6}\right].$$

$$6) \begin{cases} \frac{16-9x^2}{3x^2+4} \leq 0 \\ \frac{4-3x}{6} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x-4)(3x+4) \geq 0 \\ 3x-4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right] \cup \left[\frac{4}{3}; +\infty\right) \\ x < \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right]. \text{ Ответ: } \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right].$$

6.2.B03

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \begin{cases} \frac{7}{6x-7} > \frac{6x^2}{7-6x} \\ \frac{4x^2}{4x^2+9} < \frac{9}{4x^2+9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6x^2+7}{6x-7} > 0 \\ \frac{(2x-3)(2x+3)}{4x^2+9} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-7 > 0 \\ (2x-3)(2x+3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{7}{6} \\ x \in \left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{7}{6}; \frac{3}{2}\right). \text{ Ответ: } \left(\frac{7}{6}; \frac{3}{2}\right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{б)} \quad & \begin{cases} \frac{10}{9x-10} > \frac{9x^2}{10-9x} \\ \frac{9x^2}{9x^2+16} < \frac{16}{9x^2+16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{10+9x^2}{9x-10} > 0 \\ \frac{(3x-4)(3x+4)}{9x^2+16} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x-10 > 0 \\ (3x-4)(3x+4) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{10}{9} \\ x \in \left(-\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{10}{9}; \frac{4}{3}\right). \text{ Ответ: } \left(\frac{10}{9}; \frac{4}{3}\right).
 \end{aligned}$$

6.2.B04

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \begin{cases} \frac{2x^2+11}{11x^2+2} > \frac{2x^2+11x}{11x^2+2} \\ 0,2x-0,6 < 0,6x-0,2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11x-11 < 0 \\ 0,4x > -0,4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-1; 1)
 \end{aligned}$$

Ответ: $(-1; 1)$.

$$\begin{aligned}
 \text{б)} \quad & \begin{cases} \frac{3x^2+10}{10x^2+3} > \frac{3x^2+10x}{10x^2+3} \\ 0,4x-0,7 < 0,7x-0,4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{10(x-1)}{10x^2+3} < 0 \\ 0,3x > -0,3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-1; 1)
 \end{aligned}$$

Ответ: $(-1; 1)$.

6.2.B05

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \begin{cases} \frac{5}{25x^2-144} > \frac{12}{25x^2-144} \\ 12x > 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{(5x-12)(5x+12)} < 0 \\ x > \frac{5}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\frac{12}{5}; \frac{12}{5}\right) \\ x > \frac{5}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow x \in \left(\frac{5}{12}; \frac{12}{5}\right). \text{ Ответ: } \left(\frac{5}{12}; \frac{12}{5}\right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad & \begin{cases} \frac{6}{36x^2-121} > \frac{11}{36x^2-121} \\ 11x > 0,6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{(5x-11)(6x+11)} < 0 \\ x > \frac{6}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\frac{11}{6}; \frac{11}{6}\right) \\ x > \frac{6}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow x \in \left(\frac{6}{11}; \frac{11}{6}\right). \text{ Ответ: } \left(\frac{6}{11}; \frac{11}{6}\right).
 \end{aligned}$$

6.2.B06

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \begin{cases} \frac{7}{x(4-x)} > \frac{3}{x(x-4)} \\ 5x > x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{10}{x(4-x)} > 0 \\ 4x > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty) \\ x > \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow x \in (4; +\infty). \text{ Ответ: } (4; +\infty).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad & \begin{cases} \frac{5}{x(3-x)} > \frac{2}{x(x-3)} \\ 4x > x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{x(3-x)} > 0 \\ 3x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty) \\ x > \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow x \in (3; +\infty). \text{ Ответ: } (3; +\infty).
 \end{aligned}$$

6.2.B07

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \begin{cases} \frac{x^2-6x}{6x^2+5} \leq 0 \\ \frac{6}{5-x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-6) \leq 0 \\ 5-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0; 6] \\ x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0; 5) \\
 & \text{ Ответ: } [0; 5).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad & \begin{cases} \frac{x^2-8x}{8x^2+7} \leq 0 \\ \frac{7}{7-x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-8) \leq 0 \\ 7-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0; 8] \\ x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0; 7) \\
 & \text{ Ответ: } [0; 7).
 \end{aligned}$$

6.2.B08

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \begin{cases} \frac{1}{x^2-x-12} < \frac{12}{x^2-x-12} \\ 12x > 0,12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{11}{(x-4)(x+3)} > 0 \\ x > \frac{1}{100} \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -3) \cup (4; +\infty) \\ x > 0,01 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (4; +\infty). \text{ Ответ: } (4; +\infty).
 \end{aligned}$$

$$6) \begin{cases} \frac{3}{x^2-3x-10} < \frac{10}{x^2-3x-10} \\ 10x > 0,1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{(x-5)(x+2)} > 0 \\ x > \frac{1}{100} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -2) \cup (5; +\infty) \\ x > \frac{1}{100} \end{cases} \Leftrightarrow x \in (5; +\infty). \text{ Ответ: } (5; +\infty).$$

6.2.B09

$$a) \begin{cases} \frac{x^2+40}{x^2+4} < \frac{x+40}{x^2+4} \\ \frac{4}{3x-2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-x}{x^2+4} < 0 \\ x > \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) < 0 \\ x > \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0; 1) \\ x > \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(\frac{2}{3}; 1\right). \text{ Ответ: } \left(\frac{2}{3}; 1\right).$$

$$6) \begin{cases} \frac{x^2+50}{x^2+5} < \frac{x+50}{x^2+5} \\ \frac{5}{4x-3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-x}{x^2+5} < 0 \\ x > \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) < 0 \\ x > \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0; 1) \\ x > \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(\frac{3}{4}; 1\right). \text{ Ответ: } \left(\frac{3}{4}; 1\right).$$

6.2.B10

$$a) \begin{cases} \frac{(x+4)^2}{5x^2+4} > \frac{(x+5)^2}{5x^2+4} \\ 0,9x > -8,1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+5+x+4)(x+5-x-4)}{5x^2+4} < 0 \\ x > -9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+9 < 0 \\ x > -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{9}{2} \\ x > -9 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-9; -\frac{9}{2}\right). \text{ Ответ: } \left(-9; -\frac{9}{2}\right).$$

$$6) \begin{cases} \frac{(x+6)^2}{7x^2+6} > \frac{(x+7)^2}{7x^2+6} \\ 0,13x > -1,69 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+7+x+6)(x+7-x-6)}{7x^2+6} < 0 \\ x > -13 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+13 < 0 \\ x > -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{13}{2} \\ x > -13 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-13; -\frac{13}{2}\right). \text{ Ответ: } \left(-13; -\frac{13}{2}\right).$$

6.2.C01

$$a) \frac{1}{7} < \frac{1}{3-2x} < \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5 < 3-2x < 7 \Leftrightarrow 2 < -2x < 4 \Leftrightarrow -2 < x < -1.$$

Ответ: $(-2; -1)$.

$$б) \frac{1}{11} < \frac{1}{2-3x} < \frac{1}{8} \Leftrightarrow 8 < 2-3x < 11 \Leftrightarrow 6 < -3x < 9 \Leftrightarrow -3 < x < -2.$$

Ответ: $(-3; -2)$.

6.2.C02

$$a) \begin{cases} \frac{4}{x-4} - \frac{6}{x+2} < \frac{4}{x-4} - \frac{5}{x+2} \\ \frac{4}{x-4} - \frac{5}{x+2} < \frac{3}{x-4} - \frac{5}{x-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+2} > 0 \\ \frac{1}{x-4} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-2; 4).$$

Ответ: $(-2; 4)$.

$$б) \begin{cases} \frac{3}{x-3} - \frac{7}{x+4} < \frac{3}{x-3} - \frac{6}{x+4} \\ \frac{3}{x-3} - \frac{6}{x+4} < \frac{2}{x-3} - \frac{6}{x+4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+4} > 0 \\ \frac{1}{x-3} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -4 \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-4; 3).$$

Ответ: $(-4; 3)$.

6.2.C03

$$a) \begin{cases} \frac{5x^2}{6+11x} \leq 0 \\ 17x+x^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x < -\frac{6}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; -\frac{6}{11}\right) \cup \{0\} \\ x \in [-17; 0] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[-17; -\frac{6}{11}\right) \cup \{0\}.$$

Ответ: $\left[-17; -\frac{6}{11}\right) \cup \{0\}.$

$$б) \begin{cases} \frac{4x^2}{9+13x} \leq 0 \\ 22x+x^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x < -\frac{9}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; -\frac{9}{13}\right) \cup \{0\} \\ x \in [-22; 0] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[-22; -\frac{9}{13}\right) \cup \{0\}$$

Ответ: $\left[-22; -\frac{9}{13}\right) \cup \{0\}.$

6.2.C04

$$a) \begin{cases} \frac{(x-5)^2}{16-x^2} \geq 0 \\ 5x-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-5)^2}{(x-4)(x+4)} \leq 0 \\ x(x-5) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-4; 4) \cup \{5\} \\ x \in [0; 5] \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0; 4) \cup \{5\}$$

Омгем: $[0; 4) \cup \{5\}$

$$б) \begin{cases} \frac{(x-6)^2}{25-x^2} \geq 0 \\ 6x-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-6)^2}{(x-5)(x+5)} \leq 0 \\ x(x-6) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-5; 5) \cup \{6\} \\ x \in [0; 6] \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0; 5) \cup \{6\}$$

Омгем: $[0; 5) \cup \{6\}$.

6.2.C05

$$a) \begin{cases} \frac{17}{17x-x^2} > \frac{1}{17-x} \\ x^2-19x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{17-x}{x(17-x)} > 0 \\ x(x-19) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 17 \\ x \in (0; 19) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (0; 17) \cup (17; 19)$$

Омгем: $(0; 17) \cup (17; 19)$.

$$б) \begin{cases} \frac{11}{11x-x^2} > \frac{1}{11-x} \\ x^2-13x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{11-x}{x(11-x)} > 0 \\ x(x-13) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 11 \\ x \in (0; 13) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (0; 11) \cup (11; 13)$$

Омгем: $(0; 11) \cup (11; 13)$.

6.2.C06

$$a) \begin{cases} \frac{1}{x-4} < \frac{1}{x+8} \\ \frac{1}{x+6} > \frac{1}{x-5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{12}{(x-4)(x+8)} < 0 \\ \frac{11}{(x-5)(x+6)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-8; 4) \\ x \in (-6; 5) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-6; 4)$$

Омгем: $(-6; 4)$.

$$б) \begin{cases} \frac{1}{x-6} < \frac{1}{x+9} \\ \frac{1}{x+7} > \frac{1}{x-7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{15}{(x-6)(x+9)} < 0 \\ \frac{14}{(x+7)(x-7)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-9; 6) \\ x \in (-7; 7) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-7; 6)$$

Омгем: $(-7; 6)$.

6.2.C07

$$a) \begin{cases} \frac{1}{3x^2 - 2x} > \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3x^2 - 2x} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 3x^2 - 2x < 5 \\ 3x^2 - 2x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 2x - 5 < 0 \\ 3x^2 - 2x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(3x-5) < 0 \\ (x-1)(3x+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-1; \frac{5}{3}\right) \\ x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-1; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(1; \frac{5}{3}\right)$$

Омвем: $\left(-1; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(1; \frac{5}{3}\right)$.

$$b) \begin{cases} \frac{1}{4x^2 - 3x} > \frac{1}{7} \\ \frac{1}{4x^2 - 3x} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 4x^2 - 3x < 7 \\ 4x^2 - 3x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 3x < 7 \\ 4x^2 - 3x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(4x-7) < 0 \\ (x-1)(4x+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-1; \frac{7}{4}\right) \\ x \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right) \cup (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-1; -\frac{1}{4}\right) \cup \left(1; \frac{7}{4}\right)$$

Омвем: $\left(-1; -\frac{1}{4}\right) \cup \left(1; \frac{7}{4}\right)$.

6.2.C08

$$a) \begin{cases} \frac{3}{x^2 - 3x} \leq \frac{1}{x-3} \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3-x}{x(x-3)} \leq 0 \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-3}{x(x-3)} \geq 0 \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, x \neq 3 \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 3) \cup (3; 4)$$

Омвем: $(0; 3) \cup (3; 4)$.

$$\begin{aligned}
 \text{б) } \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{x^2 - 2x} \leq \frac{1}{x-2} \\ x < 3 \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{2-x}{x(x-2)} \leq 0 \\ x < 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-2}{x(x-2)} \geq 0 \\ x < 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > 0, x \neq 2 \\ x < 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in (0; 2) \cup (2; 3)
 \end{aligned}$$

Ответ: $(0; 2) \cup (2; 3)$.

6.2.C09

$$\text{а) } \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{x} < \frac{3}{x^2} \\ x^2 \leq 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{2x-3}{x^2} < 0 \\ x \in [-2; 2] \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x < \frac{3}{2}, x \neq 0 \\ x \in [-2; 2] \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in [-2; 0) \cup \left(0; \frac{3}{2}\right)$$

Ответ: $[-2; 0) \cup \left(0; \frac{3}{2}\right)$.

$$\text{б) } \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{x} < \frac{7}{x^2} \\ x^2 \leq 9 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{3x-7}{x^2} < 0 \\ x \in [-3; 3] \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x < \frac{7}{3}, x \neq 0 \\ x \in [-3; 3] \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in [-3; 0) \cup \left(0; \frac{7}{3}\right)$$

Ответ: $[-3; 0) \cup \left(0; \frac{7}{3}\right)$.

6.2.C10

$$\begin{aligned}
 \text{а) } \frac{1}{(b+1)(b+4)(b-5)} &> 0, \frac{1}{(b+3)(b+4)(b-5)} < 0 \\
 \Rightarrow \frac{1}{(b+1)(b+3)(b+4)(b-5)^2} &< 0 \Rightarrow b \in (-3; -1) \Rightarrow b < 0
 \end{aligned}$$

Ответ: отрицательное.

$$\begin{aligned}
 \text{б) } \frac{1}{(b+5)(b-7)(b-15)} &> 0, \frac{1}{(b+5)(b-7)(b-15)} < 0 \\
 \Rightarrow \frac{1}{(b+4)(b+5)(b-7)^2(b-15)^2} &< 0 \Rightarrow b \in (-5; -4) \Rightarrow b < 0
 \end{aligned}$$

Ответ: отрицательное.

Уровень D

6.2.D01

$$\begin{aligned}
 \text{а) } x-2 \leq \frac{x^3 - 8x^2 + 12x}{x-6} \leq 6x &\Leftrightarrow x-2 \leq \frac{x(x-2)(x-6)}{x-6} \leq 6x \\
 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x(x-2) \geq x-2 \\ x(x-2) \leq 6x \\ x \neq 6 \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x-1)(x-2) \geq 0 \\ x(x-8) \leq 0 \\ x \neq 6 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty) \\ x \in [0; 8] \\ x \neq 6 \end{array} \right. \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x \in [0; 1] \cup [2; 8] \cup (6; 8].$$

Ответ: $[0; 1] \cup [2; 8] \cup (6; 8]$.

$$\begin{aligned} 6) \quad x-3 \leq \frac{x^3-7x^2+12x}{x-4} \leq 4x &\Leftrightarrow x-3 \leq \frac{x(x-4)(x-3)}{x-4} \leq 4x \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-3) \geq x-3 \\ x(x-3) \leq 4x \\ x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x-1) \geq 0 \\ x(x-7) \leq 0 \\ x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty) \\ x \in [0; 7] \\ x \neq 4 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x \in [0; 1] \cup [3; 4) \cup (4; 7]$$

Ответ: $[0; 1] \cup [3; 4) \cup (4; 7]$

6.2.D02

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \begin{cases} \frac{x-5}{x-6} < \frac{x+7}{x+6} \\ \frac{x+4}{x+8} > \frac{x-7}{x-3} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-5)(x+6)-(x-6)(x+7)}{(x-6)(x+6)} < 0 \\ \frac{(x+4)(x-3)-(x-7)(x+8)}{(x+8)(x-3)} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+x-30-(x^2+x-42)}{(x-6)(x+6)} < 0 \\ \frac{x^2+x-12-(x^2+x-56)}{(x+8)(x-3)} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{12}{(x-6)(x+6)} < 0 \\ \frac{44}{(x+8)(x-3)} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-6; 6) \\ x \in (-\infty; -8) \cup (3; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (3; 6) \end{aligned}$$

Ответ: $(3; 6)$.

$$\begin{aligned} 6) \quad \begin{cases} \frac{x-4}{x-5} < \frac{x+6}{x+5} \\ \frac{x+3}{x+7} > \frac{x-6}{x-2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-4)(x+5)-(x+6)(x-5)}{(x-5)(x+5)} < 0 \\ \frac{(x+3)(x-2)-(x-6)(x+7)}{(x-2)(x+7)} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+x-20-x^2-x+30}{(x-5)(x+5)} < 0 \\ \frac{x^2+x-6-x^2-x+42}{(x-2)(x+7)} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{10}{(x-5)(x+5)} < 0 \\ \frac{36}{(x-2)(x+7)} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-5; 5) \\ x \in (-\infty; -7) \cup (2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (2; 5) \end{aligned}$$

Ответ: $(2; 5)$.

6.2.D03

$$a) \frac{4}{x} - 3 < \frac{1}{x^2} < \frac{5}{x} + 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{x} - 3 < \frac{1}{x^2} \\ \frac{5}{x} + 6 < \frac{1}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2} > 0 \\ \frac{6x^2 + 5x - 1}{x^2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x-1)(x-1) > 0 \\ (6x-1)(x+1) > 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty) \\ x \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{6}; +\infty\right) \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$$

Ответ: $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$.

$$6) \frac{3}{x} - 2 < \frac{1}{x^2} < \frac{6}{x} + 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{x} - 2 < \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{x^2} < \frac{6}{x} + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2} > 0 \\ \frac{7x^2 + 6x - 1}{x^2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-1)(x-1) > 0 \\ (7x-1)(x+1) > 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty) \\ x \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{7}; +\infty\right) \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{7}; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$$

Ответ: $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{7}; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

6.2.D04

$$a) \begin{cases} \frac{1}{|x|-5} > \frac{1}{|x|+9} \\ \frac{5}{|x|+9} > \frac{4}{|x|+10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|x|+9-|x|+5}{(|x|-5)(|x|+9)} > 0 \\ \frac{5|x|+50-4|x|-36}{(|x|+9)(|x|+10)} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{14}{|x|-5} > 0 \\ \frac{|x|+14}{(|x|+9)(|x|+10)} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| > 5 \\ x - \text{любое} \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$$

Ответ: $(-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$

$$б) \begin{cases} \frac{1}{|x|-6} > \frac{1}{|x|+10} \\ \frac{6}{|x|+10} > \frac{5}{|x|+11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|x|+10-|x|+6}{(|x|-6)(|x|+10)} > 0 \\ \frac{6|x|+66-5|x|-50}{(|x|+10)(|x|+11)} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{16}{|x|-6} > 0 \\ \frac{16+|x|}{(|x|+10)(|x|+11)} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| > 6 \\ x \in (-\infty; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -6) \cup (6; +\infty)$$

Ответ: $(-\infty; -6) \cup (6; +\infty)$.

6.2.D05

$$а) \begin{cases} \frac{5}{7x^2+6} < \frac{7}{6x^2+5} \\ \frac{5x^2-7}{x^2(121x^2-16)} < \frac{7}{x^2(16-121x^2)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{30x^2+25-49x^2-42}{(7x^2+6)(6x^2+5)} < 0 \\ \frac{5x^2}{x^2(11x-4)(11x+4)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-(19x^2+17)}{(7x^2+6)(6x^2+5)} < 0 \\ x \in \left(-\frac{4}{11}; 0\right) \cup \left(0; \frac{4}{11}\right) \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{4}{11}; 0\right) \cup \left(0; \frac{4}{11}\right)$$

Ответ: $\left(-\frac{4}{11}; 0\right) \cup \left(0; \frac{4}{11}\right)$

$$б) \begin{cases} \frac{7}{9x^2+8} < \frac{9}{8x^2+7} \\ \frac{7x^2-9}{x^2(36x^2-81)} < \frac{9}{x^2(81-36x^2)} \end{cases}, \text{ т.к. } 9x^2+8 > 8x^2+7 > 0 \text{ при всех } x, \text{ то эт}$$

неравенство верно при любом x

$$\Leftrightarrow \frac{7x^2}{x^2(6x-9)(6x+9)} < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{9}{6}; 0\right) \cup \left(0; \frac{9}{6}\right)$$

Ответ: $\left(-\frac{9}{6}; 0\right) \cup \left(0; \frac{9}{6}\right)$.

6.2.D06

$$a) \begin{cases} \frac{1}{5(x-2)^2 + 6(y-4)^2} \geq \frac{1}{7} & (1) \\ \frac{1}{8(x-3)^2 + 7(y-5)^2} \geq \frac{1}{9} & (2) \end{cases}$$

(1) т.к. x, y – целые, то $5(x-2)^2 > 7$ при $x \neq 1, 2, 3$. $6(y-4)^2 > 7$ при $y \neq 3, 4, 5$, т.е. неравенство (1) верно, только при $(x, y) = (1; 4); (3; 4); (2; 3); (2; 5)$

(2) т.к. x, y – целые, то $8(x-3)^2 > 9$ при $x \neq 2, 3, 4$, $7(y-5)^2 > 9$ при $y \neq 4, 5, 6$, т.е. (2) верно при $(x, y) = (2; 5); (4; 5); (3; 4); (3; 6)$

$\Rightarrow$ решение системы: $(x, y) = (2; 5); (3; 4)$.

Ответ: (2; 5); (3; 4).

$$б) \begin{cases} \frac{1}{4(x-1)^2 + 5(y-3)^2} \geq \frac{1}{6} & (1) \\ \frac{1}{7(x-2)^2 + 6(y-4)^2} \geq \frac{1}{8} & (2) \end{cases}$$

Т.к. x, y – целые, то $4(x-1)^2 > 6$ при $x \neq 0, 1, 2$. $5(y-3)^2 > 6$ при $y \neq 2, 3, 4$. $7(x-2)^2 > 8$ при $x \neq 1, 2, 3$. $6(y-4)^2 > 8$ при $y \neq 3, 4, 5$, т.е. система не имеет решений при $x \neq 1, 2$ и $y \neq (3, 4) \Rightarrow$ решение системы $(x, y) = (1; 4); (2; 3)$.

Ответ: (1; 4); (2; 3).

6.2.D07

$$a) \begin{cases} \frac{1}{x^2 - 8x} < 0 \\ \frac{1}{x^2 - 25} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x(x-8)} < 0 \\ \frac{1}{(x-5)(x+5)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0; 8) \\ x \in (-5; 5) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 5)$$

Ответ: (0; 5).

$$б) \begin{cases} \frac{1}{x^2 - 6x} < 0 \\ \frac{1}{x^2 - 16} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x(x-6)} < 0 \\ \frac{1}{(x-4)(x+4)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0; 6) \\ x \in (-4; 4) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 4)$$

Ответ: (0; 4).

6.2.D08

$$a) \begin{cases} \frac{1}{x^2 - 49} > 0 \\ \frac{1}{x^2 + 9x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{(x-7)(x+7)} > 0 \\ \frac{1}{x(x+9)} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -7) \cup (7; +\infty) \\ x \in (-\infty; -9) \cup (0; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty; -9) \cup (7; +\infty)$. Ответ: $(-\infty; -9) \cup (7; +\infty)$.

$$6) \begin{cases} \frac{1}{x^2 - 36} > 0 \\ \frac{1}{x^2 + 8x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{(x-6)(x+6)} > 0 \\ \frac{1}{x(x+8)} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -6) \cup (6; +\infty) \\ x \in (-\infty; -8) \cup (0; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty; -8) \cup (6; +\infty). \text{ Ответ: } (-\infty; -8) \cup (6; +\infty).$$

6.2.D09

$$a) \frac{1}{(m-7)(m+8)(m-1)} < 0, \frac{1}{(m-7)(m+8)(m-2)} < 0,$$

$$\frac{1}{(m-2)(m+9)(m-1)} < 0. \text{ Перемножим все 3 выражения, получим}$$

$$\frac{1}{(m-7)^2(m+8)^2(m-1)^2(m+9)} < 0 \Rightarrow m < -9$$

$$\text{Ответ: } m < -9.$$

б) Также перемножим 3 выражения, получим

$$\frac{1}{(m+6)^2(m-5)^2(m+3)^2(m-8)} > 0 \Rightarrow m > 8$$

$$\text{Ответ: } m > 8.$$

6.2.D10

$$a) \frac{k-m}{km} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{m} - \frac{k}{m} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{m} > \frac{k}{m};$$

$$\frac{k-m}{k} > 0 \Leftrightarrow \frac{m}{k} < 1$$

$$\frac{k-m}{m} < 0 \Leftrightarrow \frac{k}{m} < 1 \text{ (Возможно при } m > 0, k > 0)$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{m} > \frac{1}{k}.$$

$$6) \frac{x+y}{x} < 0, \frac{x+y}{y} > 0, \frac{x+y}{xy} < 0$$

разделим 3-е на 1-е, получим $\frac{1}{y} > 0$, теперь 3-е на 2-е, полу

$$\frac{1}{x} < 0 \Rightarrow \frac{1}{y} > \frac{1}{x}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{y} > \frac{1}{x}.$$

§ 3. Системы иррациональных неравенств

Уровень А

6.3.A01

$$a) \begin{cases} (5x-2)\sqrt{2x^2+5} > 0 \\ (2x-5)\sqrt{5x^2+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{2}{5} \\ x > \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{5}{2}; +\infty\right). \text{ Ответ: } \left(\frac{5}{2}; +\infty\right).$$

$$b) \begin{cases} (7x-3)\sqrt{3x^2+7} > 0 \\ (3x-7)\sqrt{7x^2+3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{7} \\ x > \frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{7}{3}. \text{ Ответ: } \left(\frac{7}{3}; +\infty\right).$$

6.3.A02

$$a) \begin{cases} \frac{6x+5}{\sqrt{6x^2+5}} < 0 \\ \frac{5x+6}{\sqrt{5x^2+6}} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+5 < 0 \\ 5x+6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{5}{6} \\ x > -\frac{6}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{6}{5}; -\frac{5}{6}\right)$$

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{6}{5}; -\frac{5}{6}\right).$$

$$b) \begin{cases} \frac{4x+3}{\sqrt{4x^2+3}} < 0 \\ \frac{3x+4}{\sqrt{3x^2+4}} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+3 < 0 \\ 3x+4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{3}{4} \\ x > -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{4}{3}; -\frac{3}{4}\right)$$

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{4}{3}; -\frac{3}{4}\right).$$

6.3.A03

$$a) \begin{cases} x\sqrt{3x^2+7} < (2x-1)\sqrt{3x^2+7} \\ 0,7x-0,5 < 0,3x+0,7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)\sqrt{3x^2+7} > 0 \\ 0,4x < 1,2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1; 3)$$

$$\text{Ответ: } (1; 3).$$

$$b) \begin{cases} x\sqrt{2x^2+9} < (3x-2)\sqrt{2x^2+9} \\ 0,6x-0,7 < 0,2x+0,9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-2)\sqrt{2x^2+9} > 0 \\ 0,4x < 1,6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1; 4)$$

$$\text{Ответ: } (1; 4).$$

6.3.A04

$$a) \begin{cases} \frac{\sqrt{13x^2+17}}{13-17x} \leq 0 \\ 3x+7 > 7x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13-17x < 0 \\ 4x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{13}{17} \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{13}{17}; 1\right).$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{13}{17}; 1\right).$$

$$b) \begin{cases} \frac{\sqrt{11x^2+15}}{11-15x} \leq 0 \\ 2x+9 > 9x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11-15x < 0 \\ 7x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{11}{15} \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{11}{15}; 1\right).$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{11}{15}; 1\right).$$

6.3.A05

$$a) \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{7-4x}} < \frac{7}{\sqrt{7-4x}} \\ \frac{7}{\sqrt{7x+4}} > \frac{4}{\sqrt{7x+4}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{\sqrt{7-4x}} > 0 \\ \frac{3}{\sqrt{7x+4}} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7-4x > 0 \\ 7x+4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{7}{4} \\ x > -\frac{4}{7} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\frac{4}{7}; \frac{7}{4}\right). \text{ Ответ: } \left(-\frac{4}{7}; \frac{7}{4}\right).$$

$$b) \begin{cases} \frac{3}{\sqrt{8-3x}} < \frac{8}{\sqrt{8-3x}} \\ \frac{8}{\sqrt{8x+3}} > \frac{3}{\sqrt{8x+3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{\sqrt{8-3x}} > 0 \\ \frac{5}{\sqrt{8x+3}} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8-3x > 0 \\ 8x+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{8}{3} \\ x > -\frac{3}{8} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\frac{3}{8}; \frac{8}{3}\right). \text{ Ответ: } \left(-\frac{3}{8}; \frac{8}{3}\right).$$

6.3.A06

$$a) \begin{cases} \frac{4x}{\sqrt{4x^2+9}} \leq \frac{9}{\sqrt{4x^2+9}} \\ \frac{9x}{\sqrt{9x^2+4}} \geq \frac{4}{\sqrt{9x^2+4}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x \leq 9 \\ 9x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{9}{4} \\ x \geq \frac{4}{9} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{4}{9}; \frac{9}{4}\right]. \text{ Ответ: } \left[\frac{4}{9}; \frac{9}{4}\right].$$

$$b) \begin{cases} \frac{2x}{\sqrt{2x^2+5}} \leq \frac{5}{\sqrt{2x^2+5}} \\ \frac{5x}{\sqrt{5x^2+2}} \geq \frac{2}{\sqrt{5x^2+2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \leq 5 \\ 5x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{5}{2} \\ x \geq \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{2}{5}; \frac{5}{2}\right]. \text{ Ответ: } \left[\frac{2}{5}; \frac{5}{2}\right]$$

6.3.A07

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \begin{cases} \frac{\sqrt{6x^2+17}}{17x-6} \geq \frac{17}{6-17x} \\ \frac{3x}{2} < \frac{2x}{3} + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{6x^2+17}+17}{17x-6} \geq 0 \\ \frac{5}{6}x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17x-6 > 0 \\ x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{6}{17} \\ x < 6 \end{cases}, x \in \left(\frac{6}{17}, 6\right)
 \end{aligned}$$

Ответ: $\left(\frac{6}{17}, 6\right)$.

$$\begin{aligned}
 \text{б)} \quad & \begin{cases} \frac{\sqrt{5x^2+12}}{12x-5} \geq \frac{12}{5-12x} \\ \frac{4x}{3} < \frac{3x}{4} + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{5x^2+12}+12}{12x-5} \geq 0 \\ \frac{7}{12}x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x-5 > 0 \\ x < 12 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{5}{12} \\ x < 12 \end{cases}, x \in \left(\frac{5}{12}, 12\right)
 \end{aligned}$$

Ответ: $\left(\frac{5}{12}, 12\right)$.

6.3.A08

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \begin{cases} \frac{7x^2+x-5}{\sqrt{7x^2+5}} < \frac{7x^2}{\sqrt{7x^2+5}} \\ 2,7x+7,9 > 2,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x^2+x-5 < 7x^2 \\ 2,7x > -5,4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 5 \\ x > -2 \end{cases}, x \in (-2; 5)
 \end{aligned}$$

Ответ: $(-2; 5)$.

$$\begin{aligned}
 \text{б)} \quad & \begin{cases} \frac{4x^2+x-7}{\sqrt{4x^2+7}} < \frac{4x^2}{\sqrt{4x^2+7}} \\ 2,4x+9,9 > 2,7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+x-7 < 4x^2 \\ 2,4x > -7,2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 7 \\ x > -3 \end{cases}, x \in (-3; 7)
 \end{aligned}$$

Ответ: $(-3; 7)$.

6.3.A09

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \begin{cases} (3x-8)\sqrt{8x^2+3} < 0 \\ \frac{3x+8}{\sqrt{3x^2+8}} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-8 < 0 \\ 3x+8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{8}{3} \\ x > -\frac{8}{3} \end{cases}, x \in \left(-\frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right).
 \end{aligned}$$

Ответ: $\left(-\frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

$$6) \begin{cases} (4x-7)\sqrt{7x^2+4} < 0 \\ \frac{4x+7}{\sqrt{4x^2+7}} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-7 < 0 \\ 4x+7 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{7}{4} \\ x > -\frac{7}{4} \end{cases}, x \in \left(-\frac{7}{4}; \frac{7}{4}\right)$$

Ответ: $\left(-\frac{7}{4}; \frac{7}{4}\right)$.

6.3.A10

$$a) 0 < \frac{5x-4}{\sqrt{16x^2+25}} < \frac{4x+5}{\sqrt{16x^2+25}} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-4 > 0 \\ 4x+5 > 5x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{4}{5} \\ x < 9 \end{cases}, x \in \left(\frac{4}{5}; 9\right)$$

Ответ: $\left(\frac{4}{5}; 9\right)$.

$$6) 0 < \frac{4x-3}{\sqrt{9x^2+16}} < \frac{3x+4}{\sqrt{9x^2+16}} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3 > 0 \\ 4x-3 < 3x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{4} \\ x < 7 \end{cases}, x \in \left(\frac{3}{4}; 7\right)$$

Ответ: $\left(\frac{3}{4}; 7\right)$.

Уровень В

6.3.B01

$$a) (x-2)\sqrt{x^2+5} < (3x-4)\sqrt{x^2+5} < (2x-1)\sqrt{x^2+5} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 < 3x-4 \\ 3x-4 < 2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x > 2 \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1; 3).$$

Ответ: $(1; 3)$.

$$6) (x-3)\sqrt{x^2+6} < (3x-5)\sqrt{x^2+6} < (2x-3)\sqrt{x^2+6} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 < 3x-5 \\ 3x-5 < 2x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x > 2 \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1; 2).$$

Ответ: $(1; 2)$.

6.3.B02

$$a) \begin{cases} \frac{36x^2-49}{\sqrt{x^2+85}} < 0 \\ 6x-7 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (6x-7)(6x+7) < 0 \\ 6x-7 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\frac{7}{6}; \frac{7}{6}\right) \\ x < \frac{7}{6} \end{cases}, x \in \left(-\frac{7}{6}; \frac{7}{6}\right)$$

Ответ: $\left(-\frac{7}{6}; \frac{7}{6}\right)$.

$$6) \begin{cases} \frac{25x^2 - 64}{\sqrt{x^2 + 89}} < 0 \\ 5x - 8 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (5x - 8)(5x + 8) < 0 \\ 5x - 8 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\frac{8}{5}; \frac{8}{5}\right) \\ x < \frac{8}{5} \end{cases}, x \in \left(-\frac{8}{5}; \frac{8}{5}\right)$$

Ответ: $\left(-\frac{8}{5}; \frac{8}{5}\right)$.

6.3.B03

$$a) \begin{cases} (144 - x^2)\sqrt{x^2 + 12} \geq 0 \\ \frac{x - 6}{6} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 12)(x + 12) \leq 0 \\ x - 6 \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-12; 12] \\ x \leq 12 \end{cases},$$

$$x \in [-12; 12]$$

Ответ: $[-12; 12]$.

$$6) \begin{cases} (196 - x^2)\sqrt{x^2 + 14} \geq 0 \\ \frac{x - 7}{7} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 14)(x + 14) \leq 0 \\ x - 7 \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-14; 14] \\ x \leq 14 \end{cases},$$

$$x \in [-14; 14]$$

Ответ: $[-14; 14]$.

6.3.B04

$$a) \begin{cases} \frac{3\sqrt{x^4 + 6}}{2x - 7} < \frac{2\sqrt{x^4 + 6}}{2x - 7} \\ 4x^2 < 49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{x^4 + 6}}{2x - 7} < 0 \\ (2x - 7)(2x + 7) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{7}{2} \\ x \in \left(-\frac{7}{2}; \frac{7}{2}\right) \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\frac{7}{2}; \frac{7}{2}\right)$.

$$6) \begin{cases} \frac{5\sqrt{x^4 + 6}}{3x - 8} < \frac{4\sqrt{x^4 + 6}}{3x - 8} \\ 9x^2 < 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{x^4 + 6}}{3x - 8} < 0 \\ (3x - 8)(3x + 8) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{8}{3} \\ x \in \left(-\frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right) \end{cases},$$

$$x \in \left(-\frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right).$$

Ответ: $\left(-\frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

6.3.B05

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & \begin{cases} \frac{13x^2}{\sqrt{169x^2-49}} > -\frac{7}{\sqrt{169x^2-49}} \\ 1,3x > 0,7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{13x^2+7}{\sqrt{169x^2-49}} > 0 \\ x > \frac{7}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} (13x-7)(13x+7) > 0 \\ x > \frac{7}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; -\frac{7}{13}\right) \cup \left(\frac{7}{13}; +\infty\right) \\ x > \frac{7}{13} \end{cases}, x \in \left(\frac{7}{13}; +\infty\right).
 \end{aligned}$$

Ответ: $\left(\frac{7}{13}; +\infty\right)$.

$$\begin{aligned}
 \text{б) } & \begin{cases} \frac{12x^2}{\sqrt{144x^2-25}} > -\frac{5}{\sqrt{144x^2-25}} \\ 1,2x > 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{12x^2+5}{\sqrt{144x^2-25}} > 0 \\ x > \frac{5}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} (12x-5)(12x+5) > 0 \\ x > \frac{5}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; -\frac{5}{12}\right) \cup \left(\frac{5}{12}; +\infty\right) \\ x > \frac{5}{12} \end{cases}, x \in \left(\frac{5}{12}; +\infty\right).
 \end{aligned}$$

Ответ: $\left(\frac{5}{12}; +\infty\right)$.

6.3.B06

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & \begin{cases} 9x^2\sqrt{25x^2+9} < 25\sqrt{25x^2+9} \\ 5\sqrt{5x^2+3} > 3x\sqrt{5x^2+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 < 25 \\ 5 > 3x \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} (3x-5)(3x+5) < 0 \\ 3x-5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right) \\ x < \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right).
 \end{aligned}$$

Ответ: $\left(-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right)$.

$$\text{б) } \begin{cases} 16x^2\sqrt{9x^2+16} < 9\sqrt{9x^2+16} \\ 3\sqrt{3x^2+4} > 4x\sqrt{3x^2+4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x^2 < 9 \\ 3 > 4x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (4x-3)(4x+3) < 0 \\ x < \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right) \\ x < \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right).$$

Ответ: $\left(-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right)$.

6.3.B07

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{x^2 - 8x + 15}{\sqrt{3x^2 + 5}} < 0 \\ (x-1)^2 > (x-5)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 8x + 15 < 0 \\ ((x-1+x-5)(x-1-x+5)) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)(x-3) < 0 \\ 4(2x-6) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (3; 5) \\ x > 3 \end{cases}, x \in (3; 5).$$

Ответ: $(3; 5)$.

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{x^2 - 7x + 10}{\sqrt{2x^2 + 5}} < 0 \\ (x-1)^2 > (x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 7x + 10 < 0 \\ ((x-1+x-3)(x-1-x+3)) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-5) < 0 \\ 2(2x-4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (2; 5) \\ x > 2 \end{cases}, x \in (2; 5).$$

Ответ: $(2; 5)$.

6.3.B08

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{5}{\sqrt{14-5x-x^2}} < \frac{14}{\sqrt{14-5x-x^2}} \\ \frac{7}{2x} < \frac{2}{7x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9}{\sqrt{14-5x-x^2}} > 0 \\ \frac{45}{14}x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -(x+7)(x-2) > 0 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-7; 2) \\ x < 0 \end{cases}, x \in (-7; 0)$$

Ответ: $(-7; 0)$.

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{3}{\sqrt{28-3x-x^2}} < \frac{28}{\sqrt{28-3x-x^2}} \\ \frac{7}{4x} < \frac{4}{7x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{25}{\sqrt{28-3x-x^2}} > 0 \\ \left(\frac{7}{4} - \frac{4}{7}\right)x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -(x+7)(x-4) > 0 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-7; 4) \\ x < 0 \end{cases}, x \in (-7; 0)$$

Ответ: $(-7; 0)$.

6.3.B09

$$a) \begin{cases} \frac{15x}{\sqrt{x^2+56}} > \frac{x^2+56}{\sqrt{x^2+56}} \\ \frac{x-8}{8} < \frac{x-7}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+56 < 15x \\ \frac{x}{8} < \frac{x}{7} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-7)(x-8) < 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (7; 8) \\ x \in (7; 8) \end{cases}$$

Ответ: (7; 8).

$$b) \begin{cases} \frac{15x}{\sqrt{x^2+54}} > \frac{x^2+54}{\sqrt{x^2+54}} \\ \frac{x-9}{9} < \frac{x-6}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+54 < 15x \\ 6x-54 < 9x-54 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-6)(x-9) < 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (6; 9) \\ x \in (6; 9) \end{cases}$$

Ответ: (6; 9).

6.3.B10

$$a) \begin{cases} \frac{(x-4)^2}{\sqrt{x^2+12}} \geq \frac{(x-8)^2}{\sqrt{x^2+12}} \\ x^2 \leq 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4+x-8)(x-4-x+8) \geq 0 \\ (x-6)(x+6) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(2x-12) \geq 0 \\ x \in [-6; 6] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ x \in [-6; 6] \end{cases} \Leftrightarrow x = 6$$

Ответ: 6.

$$b) \begin{cases} \frac{(x-3)^2}{\sqrt{x^2+10}} \geq \frac{(x-7)^2}{\sqrt{x^2+10}} \\ x^2 \leq 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3+x-7)(x-3-x+7) \geq 0 \\ (x-5)(x+5) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(2x-10) \geq 0 \\ x \in [-5; 5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x \in [-5; 5] \end{cases}; x = 5$$

Ответ: 5.

Уровень С

6.3.C01

$$a) \begin{cases} (x-2)\sqrt{4-x} \geq 0 \\ (x-3)\sqrt{4-x} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-3 \leq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 3 \\ x \leq 4 \\ x=4 \end{cases} \Rightarrow x \in [2; 3] \cup \{4\}$$

Ответ: $[2; 3] \cup \{4\}$.

$$6) \begin{cases} (x-1)\sqrt{5-x} \geq 0 \\ (x-4)\sqrt{5-x} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ (x-4) \leq 0 \\ 5-x \geq 0 \\ x=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 4 \\ x \leq 5 \\ x=5 \end{cases} \Rightarrow x \in [1; 4] \cup \{5\}$$

Ответ: $[1; 4] \cup \{5\}$.

6.3.C02

$$a) \begin{cases} \frac{\sqrt{x+8}}{x-5} \leq 0 \\ \frac{\sqrt{x+8}}{x+4} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-5 < 0 \\ x+4 > 0 \\ x+8 \geq 0 \\ x=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 5 \\ x > -4 \\ x \geq -8 \\ x=-8 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-4; 5) \cup \{-8\}$$

Ответ: $(-4; 5) \cup \{-8\}$.

$$6) \begin{cases} \frac{\sqrt{x+14}}{x-8} \leq 0 \\ \frac{\sqrt{x+14}}{x+7} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+14 \geq 0 \\ x+7 > 0 \\ x-8 < 0 \\ x=-14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -14 \\ x > -7 \\ x < 8 \\ x=-14 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-7; 8) \cup \{-14\}$$

Ответ: $(-7; 8) \cup \{-14\}$.

6.3.C03

$$a) \begin{cases} (4x^2-9)\sqrt{3-2x} \geq 0 \\ (4x+9)\sqrt{3-2x} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-3)(2x+3) \geq 0 \\ 4x+9 \leq 0 \\ 3-2x \geq 0 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right) \\ x \leq -\frac{9}{4} \\ x \leq \frac{3}{2} \\ x = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{9}{4}\right] \cup \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{9}{4}\right] \cup \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

$$6) \begin{cases} (16x^2 - 25)\sqrt{5-4x} \geq 0 \\ (16x+25)\sqrt{5-4x} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4x-5)(4x+5) \geq 0 \\ 16x+25 \leq 0 \\ 5-4x \geq 0 \\ x = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; -\frac{5}{4}\right] \cup \left[\frac{5}{4}; +\infty\right) \\ x \leq -\frac{25}{16} \\ x \leq \frac{5}{4} \\ x = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{25}{16}\right] \cup \left\{\frac{5}{4}\right\}$$

Omgeem: $\left(-\infty; -\frac{25}{16}\right] \cup \left\{\frac{5}{4}\right\}$,

6.3.C04

$$a) \begin{cases} (x^2 - 5x + 4)\sqrt{4-x} \geq 0 \\ (3-x)|x-4| \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 4 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ 3-x \leq 0 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-4) \geq 0 \\ x \leq 4 \\ x \geq 3 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x = 4$.

Omgeem: 4.

$$6) \begin{cases} (x^2 - 4x + 3)\sqrt{3-x} \geq 0 \\ (2-x)|x-3| \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \\ 2-x \leq 0 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-3) \geq 0 \\ x \leq 3 \\ x \geq 2 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x = 3$.

Omgeem: 3.

6.3.C05

$$a) \begin{cases} 5x(3x-5)\sqrt{x} < 3x(5-3x) \\ 0,3x < 1,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(5\sqrt{x}+3)(3x-5) < 0 \\ x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 3x - 5 < 0 \\ x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < \frac{5}{3} \\ x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(0; \frac{5}{3}\right). \text{ Ответ: } \left(0; \frac{5}{3}\right).$$

$$6) \begin{cases} 7x(4x-7)\sqrt{x} < 4x(7-4x) \\ 0,4x < 2,8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(7\sqrt{x}+4)(4x-7) < 0 \\ x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 4x - 7 < 0 \\ x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < \frac{7}{4} \\ x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(0; \frac{7}{4}\right). \text{ Ответ: } \left(0; \frac{7}{4}\right).$$

6.3.C06

$$a) \begin{cases} 5x\sqrt{35-x} \leq 2\sqrt{35-x} \\ 7x\sqrt{35-x} \geq 2\sqrt{35-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{35-x}(5x-2) \leq 0 \\ \sqrt{35-x}(7x-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 35-x \geq 0 \\ 5x-2 \leq 0 \\ 7x-2 \geq 0 \\ x=35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 35 \\ x \leq \frac{2}{5} \\ x \geq \frac{2}{7} \\ x=35 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{2}{7}; \frac{2}{5}\right] \cup \{35\}$$

$$\text{Ответ: } \left[\frac{2}{7}; \frac{2}{5}\right] \cup \{35\}.$$

$$6) \begin{cases} 4x\sqrt{44-x} \leq 7\sqrt{44-x} \\ 11x\sqrt{44-x} \geq 7\sqrt{44-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4x-7)\sqrt{44-x} \leq 0 \\ (11x-7)\sqrt{44-x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 4x-7 \leq 0 \\ 11x-7 \geq 0 \\ 44-x \geq 0 \\ x=44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{7}{4} \\ x \geq \frac{7}{11} \\ x \leq 44 \\ x=44 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{7}{11}; \frac{7}{4}\right] \cup \{44\}$$

$$\text{Ответ: } \left[\frac{7}{11}; \frac{7}{4}\right] \cup \{44\}.$$

6.3.C07

$$a) \begin{cases} \frac{3x-2}{\sqrt{x-5}} \leq \frac{2x+5}{\sqrt{x-5}} \\ \frac{5x-7}{\sqrt{x-5}} \geq \frac{2x+5}{\sqrt{x-5}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2 \leq 2x+5 \\ 5x-7 \geq 2x+5 \\ x > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 7 \\ x \geq 4 \\ x > 5 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (5; 7]$$

Омвем: $(5; 7]$.

$$b) \begin{cases} \frac{4x-3}{\sqrt{x-7}} \leq \frac{3x+7}{\sqrt{x-7}} \\ \frac{7x-9}{\sqrt{x-7}} \leq \frac{3x+7}{\sqrt{x-7}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3 \leq 3x+7 \\ 7x-9 \geq 3x+7 \\ x > 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 10 \\ x \geq 4 \\ x > 7 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (7; 10]$$

Омвем: $(7; 10]$.

6.3.C08

$$a) \begin{cases} \frac{\sqrt{x+6}}{x-5} \geq 0 \\ x^2 \leq 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -6 \\ x > 5 \\ x \in [-6; 6] \\ x = -6 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (5; 6] \cup \{-6\}$$

Омвем: $(5; 6] \cup \{-6\}$.

$$b) \begin{cases} \frac{\sqrt{x+7}}{x-6} \geq 0 \\ x^2 \leq 49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -7 \\ x > 6 \\ x \in [-7; 7] \\ x = -7 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (6; 7] \cup \{-7\}$$

Омвем: $(6; 7] \cup \{-7\}$.

6.3.C09

$$a) \begin{cases} \frac{\sqrt{x+17}}{x-12} \leq \frac{\sqrt{x+17}}{x+12} \\ x^2 + 17x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+12)\sqrt{x+17} - (x-12)\sqrt{x+17}}{(x-12)(x+12)} \leq 0 \\ x(x+17) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{24\sqrt{x+17}}{(x-12)(x+12)} \leq 0 \\ x \in [-17; 0] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -17 \\ x \in (-12; 12) \\ x \in [-17; 0] \\ x = -17 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-12; 0] \cup \{-17\}$$

Омвем: $(-12; 0] \cup \{-17\}$

$$\begin{aligned}
 6) \quad & \begin{cases} \frac{\sqrt{x+15}}{x-11} \leq \frac{\sqrt{x+15}}{x+11} \\ x^2 + 15x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+11-x+11)\sqrt{x+15}}{(x-11)(x+11)} \leq 0 \\ x(x+15) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{22\sqrt{x+15}}{(x-11)(x+11)} \leq 0 \\ x(x+15) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -15 \\ x \in (-11; 11) \\ x \in [-15; 0] \\ x = -15 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-11; 0] \cup \{-15\}
 \end{aligned}$$

Ответ: $(-11; 0] \cup \{-15\}$.

6.3.C10

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \begin{cases} \frac{18}{4-x} < \frac{\sqrt{196-x^2}}{x-4} \\ 1,4x + 1,8 < 1,8x - 1,4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{196-x^2} + 18}{x-4} > 0 \\ 0,4x > 3,2 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} 196 - x^2 \geq 0 \\ x > 4 \\ x < 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-14; 14] \\ x > 4 \\ x > 8 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (8; 14]
 \end{aligned}$$

Ответ: $(8; 14]$.

$$\begin{aligned}
 6) \quad & \begin{cases} \frac{20}{5-x} < \frac{\sqrt{225-x^2}}{x-5} \\ 1,5x + 2 < 2x - 1,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{(15-x)(15+x)} + 20}{x-5} > 0 \\ 0,5x > 3,5 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} (x-15)(x+15) \leq 0 \\ x > 5 \\ x > 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-15; 15] \\ x > 5 \\ x > 7 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (7; 15]
 \end{aligned}$$

Ответ: $(7; 15]$.

Уровень D

6.3.D01

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \begin{cases} x - 21\sqrt{x} + 110 > 30 \\ x - 21\sqrt{x} + 110 < 42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 21\sqrt{x} + 80 > 0 \\ x - 21\sqrt{x} + 68 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x} - 16)(\sqrt{x} - 5) > 0 \\ (\sqrt{x} - 17)(\sqrt{x} - 4) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \in (-\infty; 5) \cup (16; +\infty) \\ \sqrt{x} \in (4; 17) \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \sqrt{x} \in (4; 5) \cup (16; 17) \Leftrightarrow x \in (16; 25) \cup (16^2, 17^2)
 \end{aligned}$$

Ответ: $(16; 25) \cup (16^2, 17^2)$.

$$\begin{aligned}
 6) \quad & \begin{cases} x - 20\sqrt{x} + 96 > 12 \\ x - 20\sqrt{x} + 96 < 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 20\sqrt{x} + 84 > 0 \\ x - 20\sqrt{x} + 64 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x} - 6)(\sqrt{x} - 14) > 0 \\ (\sqrt{x} - 4)(\sqrt{x} - 16) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \in (-\infty; 6) \cup (14; +\infty) \\ \sqrt{x} \in (4; 16) \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \sqrt{x} \in (4; 6) \cup (14; 16) \Leftrightarrow x \in (16; 36) \cup (14^2, 16^2)
 \end{aligned}$$

Омгем: $(16; 36) \cup (14^2, 16^2)$.

6.3.D02

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \begin{cases} \frac{\sqrt{18-3x-x^2}}{x+4} \geq 0 \\ 4x \leq x^2 - 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{-(x+6)(x-3)}}{x+4} \geq 0 \\ x^2 - 4x - 12 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(x+6)(x-3) \geq 0 \\ x > -4 \\ (x-6)(x+2) \geq 0 \\ x = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-6; 3] \\ x > -4 \\ x \in (-\infty; -2] \cup [6; +\infty) \\ x = -6 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-4; -2] \cup \{-6\}
 \end{aligned}$$

Омгем: $(-4; -2] \cup \{-6\}$.

$$\begin{aligned}
 6) \quad & \begin{cases} \frac{\sqrt{28-3x-x^2}}{x+5} \geq 0 \\ 4x \leq x^2 - 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{-(x+7)(x-4)}}{x+5} \geq 0 \\ x^2 - 4x - 21 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+7)(x-4) \geq 0 \\ x > -5, x = -7 \\ (x-7)(x+3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-7; 4] \\ x > -5, x = -7 \\ x \in (-\infty; -3] \cup [7; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-5; -3] \cup \{-7\}
 \end{aligned}$$

Омгем: $(-5; -3] \cup \{-7\}$.

6.3.D03

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \begin{cases} \frac{2x^2 - 15x + 7}{\sqrt{14+5x-x^2}} \geq 0 \\ \frac{5\sqrt{x+2} + 6}{11} < \frac{6\sqrt{x+2} + 7}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-7)(2x-1)}{\sqrt{-(x-7)(x+2)}} \geq 0 \\ \frac{16\sqrt{x+2} + 17}{110} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} (x-7)(2x+1) \geq 0 \\ (x-7)(x+2) < 0 \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [7; +\infty) \\ x \in (-2; 7) \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-2; \frac{1}{2}\right).
 \end{aligned}$$

Ответ: $\left[-2; \frac{1}{2}\right)$.

$$\begin{aligned}
 6) \quad & \begin{cases} \frac{3x^2 - 19x + 6}{\sqrt{18 + 3x - x^2}} \geq 0 \\ \frac{7\sqrt{x+3} + 8}{15} < \frac{8\sqrt{x+3} + 9}{14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(3x-1)(x-6)}{\sqrt{-(x+3)(x-6)}} \geq 0 \\ \frac{22\sqrt{x+3} + 23}{15 \cdot 14} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} (3x-1)(x-6) \geq 0 \\ (x+3)(x-6) < 0 \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup [6; +\infty) \\ x \in (-3; 6) \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-3; \frac{1}{3}\right]
 \end{aligned}$$

Ответ: $\left(-3; \frac{1}{3}\right]$.

6.3.D04

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \begin{cases} (x^2 + 2x - 35)\sqrt{144 - x^2} \leq 0 \\ (x^2 + x - 30)\sqrt{x + 12} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} (x+7)(x-5)\sqrt{-(x-12)(x+12)} \leq 0 \\ (x+6)(x-5)\sqrt{x+12} \leq 0 \\ x \geq -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-12; 12] \\ (x+7)(x-5) \leq 0 \text{ или } x = \pm 12 \\ (x+6)(x-5) \leq 0 \text{ или } x = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-12; 12] \\ x \in [-7; 5] \text{ или } x = \pm 12 \\ x \in [-6; 5] \text{ или } x = -12 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: $[-6; 5] \cup \{-12\}$

$$\begin{aligned}
 б) \quad & \begin{cases} (x^2 + 4x - 32)\sqrt{121 - x^2} \leq 0 \\ (x^2 + 3x - 28)\sqrt{x + 11} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} (x+8)(x-4)\sqrt{-(x-11)(x+11)} \leq 0 \\ (x+7)(x-4)\sqrt{x+11} \leq 0 \\ x \in [-11; 11] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+8)(x-4) \leq 0 \text{ или } x = \pm 11 \\ (x+7)(x-4) \leq 0 \text{ или } x = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-8; 4] \\ x \in [-7; 4] \text{ или } x = \pm 11 \\ x \in [-11; 11] \text{ или } x = -11 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: $[-7; 4] \cup \{-11\}$.

6.3.D05

$$a) \begin{cases} \frac{10}{\sqrt{x+13}+13} < \frac{13}{\sqrt{x+10}+10} \\ x+18+\sqrt{-x-9} > \frac{\sqrt{x^2-81}}{\sqrt{9-x}} \end{cases} - \text{ несложно видеть, что первое}$$

неравенство верно при любом допустимом x .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -10 \\ x+18+\sqrt{-x-9} > \frac{\sqrt{(-x-9)(9-x)}}{\sqrt{9-x}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 9 \\ x \geq -10 \\ x \leq -9 \\ x+18 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-10; -9]$$

Ответ: $[-10; -9]$.

$$б) \begin{cases} \frac{11}{\sqrt{x+12}+12} < \frac{12}{\sqrt{x+11}+11} \\ x+16+\sqrt{-x-8} > \frac{\sqrt{x^2-64}}{\sqrt{8-x}} \end{cases} - \text{ несложно видеть, что первое}$$

неравенство верно при любом допустимом x ($x \geq -11$).

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -11 \\ x+16+\sqrt{-x-8} > \frac{\sqrt{(8-x)(-x-8)}}{\sqrt{8-x}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -11 \\ x \leq -8 \\ x \neq 8 \\ x+16 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-11; -8]$$

Ответ: $[-11; -8]$.

6.3.D06

$$a) \begin{cases} \sqrt{5x-6y-4} \leq 0,564 \\ \sqrt{6x-5y-7} \leq 0,657 \end{cases} . \text{ Т.к. } x, y \text{ целые, то эта система эквивалентна}$$

$$\text{следующей: } \begin{cases} 5x-6y=4 \\ 6x-5y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11x=22 \\ 5x-6y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

Ответ: $(2; 1)$.

$$б) \begin{cases} \sqrt{4x-3y-6} \leq 0,436 \\ \sqrt{3x-4y-1} \leq 0,341 \end{cases} . \text{ Т.к. } x, y \text{ целые, то система эквивалентна}$$

$$\text{следующей: } \begin{cases} 4x-3y-6=0 \\ 3x-4y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x=21 \\ 3x-4y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

Ответ: $(3; 2)$.

6.3.D07

$$a) \begin{cases} 11\sqrt{x}-3 > 0 \\ 11-3\sqrt{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} > \frac{3}{11} \\ \sqrt{x} < \frac{11}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x} \in \left(\frac{3}{11}; \frac{11}{3}\right) \Leftrightarrow x \in \left(\left(\frac{3}{11}\right)^2; \left(\frac{11}{3}\right)^2\right)$$

Ответ: $\left(\frac{9}{121}; \frac{121}{9}\right)$

$$б) \begin{cases} 12\sqrt{x} - 5 > 0 \\ 12 - 5\sqrt{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} > \frac{5}{12} \\ \sqrt{x} < \frac{12}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x} \in \left(\frac{5}{12}; \frac{12}{5}\right) \Leftrightarrow x \in \left(\frac{25}{144}; \frac{144}{25}\right)$$

Ответ: $\left(\frac{25}{144}; \frac{144}{25}\right)$.

6.3.D08

$$а) \begin{cases} x - 10\sqrt{x} < 0 \\ x - 14\sqrt{x} + 24 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} < 10 \\ (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 12) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} < 10 \\ \sqrt{x} \in (2; 12) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} \in (2; 10). \text{ Ответ: } (4; 100).$$

$$б) \begin{cases} x - 8\sqrt{x} < 0 \\ x - 14\sqrt{x} + 33 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} < 8 \\ (\sqrt{x} - 11)(\sqrt{x} - 3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} < 8 \\ \sqrt{x} \in (3; 11) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} \in (3; 8) \quad x \in (9; 64). \text{ Ответ: } (9; 64).$$

6.3.D09

а) Перемножим все 3 выражения, получим

$$(\sqrt{m} - 7)^2 (\sqrt{m} - 9)^2 (\sqrt{m} - 15)^2 (\sqrt{m} - 17)^2 (\sqrt{m} - 13) < 0 \Rightarrow \sqrt{m} < 13$$

Ответ: $\sqrt{m} < 13$.

б) Аналогично, перемножив, получим

$$(\sqrt{m} - 3)^2 (\sqrt{m} - 5)^2 (\sqrt{m} - 11)^2 (\sqrt{m} - 9)^2 (\sqrt{m} - 7) > 0 \Rightarrow \sqrt{m} > 7$$

Ответ: $\sqrt{m} > 7$.

6.3.D10

а) Перемножив 2 выражения, получим

$$(\sqrt{a} - 6)^2 (\sqrt{a} - 5)^2 (\sqrt{a} - 3)(\sqrt{a} - 4) < 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} \in (3; 4)$$

Ответ: 3 и 4.

б) Аналогично, перемножив, получим

$$(\sqrt{a} - 9)^2 (\sqrt{a} - 10)^2 (\sqrt{a} - 7)(\sqrt{a} - 8) < 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} \in (7; 8)$$

Ответ: 7 и 8.

Глава 7. Функции и графики

§ 1. Чтение графиков

Уровень А

7.1.A01

а) 1) $x = 3, x = -5$

2) $\min(f(x)) = -2$

б) 1) $x = 5, x = -3$

2) $\min(f(x)) = -2$

7.1.A02

а) 1) $y = 4$

2) $x = 2, x = 4$

б) 1) $y = 4$

2) $x = -2, x = -4$

7.1.A03

а) 1) $y = 4$

2) $x = 3$

б) 1) $y = 6$

2) $x = 4$

7.1.A04

а) 1) $y_{\text{наиб}} = 6$

2) $x = \pm 1$

б) 1) $y_{\text{наиб}} = 5$

2) $x = \pm 2$

7.1.A05

а) 1) $x = -6, x = 0, x = 6$

2) $x \in [-3; 3]$

б) 1) $x = -6, x = 0, x = 6$

2) $x \in [-3; 3]$.

7.1.A06

а) 1) $D(f) = [-4; 4]$

2) $E(f) = [-4; 4]$

б) 1) $D(f) = [-4; 4]$

2) $E(f) = [-4; 4]$.

7.1.A07

а) 1) $x = 4, x = 0, x = -4$

2) наиб. $f(x) = 5$

б) 1) $x = -4, x = 0, x = 4$

2) наим. $f(x) = -5$

7.1.A08

а) 1) $x = -3, x = 1, x = 3$

2) $[-4; 0]$ и $[2; 4]$

б) 1) $x = -3, x = -1, x = 3$

2) $[-4; -2]$ и $[0; 4]$.

7.1.A09

а) 1) $x = 0, x = 3$

2) $[-6; 2]$

б) 1) $x = -3, x = 0$

2) $[-2; 6]$.

7.1.A10

а) 1) $x = -3, x = 1$

2) $[-5; 1]$

б) 1) $x = -1, x = 3$

2) $[-1; 5]$.

Уровень В

7.1.B01

а) 1) $y = -5$

2) $x = 1, x = 5$

3) $y_{\text{наим}} = -6$

4) y возрастает на $[3; +\infty)$, убывает на $[-\infty; 3]$.

6) 1) $y = 5$

2) $x = -7, x = -3$

3) $y_{\text{наиб.}} = 6$

4) y возрастает на $(-\infty; -5]$, убывает на $[-5; +\infty)$

7.1.B02

а) 1) $x = -5, x = -1, x = 3$

2) y возрастает на $[-3; 1]$

3) $x \in (-\infty; -5) \cup (-1; 3)$

4) $y = -2$

6) 1) $x = -3, x = -1, x = 5$

2) y возрастает на $[-2; 2]$

3) $x \in (-\infty; -3) \cup (-1; 5)$

4) $y = 3$

7.1.B03

а) 1) $x = -6, x = -4, x = 8$

2) y убывает на $[-5; 2]$

3) $y > 0$ при $x \in (-6; -4) \cup (8; +\infty)$

4) $y = 1$

6) 1) $x = -7, x = -1, x = 5$

2) y убывает на $[-4; 2]$

3) $y > 0$ при $x \in (-7; -1) \cup (5; +\infty)$

4) $y = -3$

7.1.B04

а) 1) $D(f) = [-4; 7]$

2) $x = -3, x = 1, x = 7$

3) $f(x)$ наибольшее равно 4

4) $f(x)$ возрастает на $[-4; -1]$ и на $[2; 7]$

6) 1) $D(f) = [-4; 7]$

2) $x = -3, x = 1, x = 7$

3) $f(x)$ наименьшее равно -4

4) $f(x)$ убывает на $[-4; -1]$ и на $[2; 7]$

7.1.B05

а) 1) $D(f) = [-4; 6]$

2) $E(f) = [-3; 4]$

3) $x = -1$

4) $f(x)$ возрастает на $[-1; 6]$, убывает на $[-4; -1]$

6) 1) $D(f) = [-4; 6]$

2) $E(f) = [0; 4]$

3) $y = 3$ при $x = -1, x = 5$

4) $f(x)$ возрастает на $[-4; -1]$ и на $[2; 6]$ убывает на $[-1; 2]$.

7.1.B06

а) 1) $D(f) = [0; 11]$

2) $y = 4$ при $x = 1, x = 6$

3) при $x = 3, y = 2$

4) $y < 4$ при $x \in (1; 6)$

6) 1) $D(f) = [0; 10]$

2) $y = 6$ при $x = 1, x = 7$

3) при $x = 4, y = 3$

4) $y < 6$ при $x \in (1; 7)$.

7.1.B07

а) 1) $D(f) = [-4; 4]$

2) $E(f) = [-2; 6]$

3) $y = 0$ при $x = -3, x = -1; x = 1, x = 3$

4) $y < 0$ при $x \in (-3; -1) \cup (1; 3)$.

6) 1) $D(f) = [-4; 4]$

2) $E(f) = [-6; 2]$

3) $y = 0$ при $x = -3, x = -1; x = 1, x = 3$

4) $y > 0$ при $x \in (-3; -1) \cup (1; 3)$.

7.1.B08

- а) 1) $y_{\text{наим}} = -2$
 3) $y = 0$ при $x = -3, x = -1, x = 1, x = 3$
 б) 1) $y_{\text{наим}} = -6$
 3) $y = 0$ при $x = -3, x = -1, x = 1, x = 3$

- 2) $y_{\text{наиб}} = 6$
 4) y убывает на $[-4; -2]$ и на $[0; 2]$.
 2) $y_{\text{наиб}} = 2$
 4) y возрастает на $[-4; -2]$ и на $[0; 2]$.

7.1.B09

- а) 1) $D(f) = [-4; 4]$
 2) $E(f) = [-4; 2]$
 3) $y = -1$ при $x = -3, x = -1, x = 2$
 4) y возрастает на $[-4; -2]$ и на $[0; 4]$.
 б) 1) $D(f) = [-4; 4]$
 2) $E(f) = [-2; 4]$
 3) $y = 1$ при $x = -3, x = -1, x = 2$
 4) y убывает на $[-4; -2]$ и на $[0; 4]$.

7.1.B10

- а) Цена акции 3 ноября – 1504 руб. 13 ноября – 1512 руб. Сделка принесла предпринимателю прибыль $60 \cdot (1512 - 1504) = 60 \cdot 8 = 480$ рублей.
 б) Цена акции 5 декабря – 3508 руб. 17 декабря – 3514 руб. Сделка принесла предпринимателю прибыль $90 \cdot (3514 - 3508) = 6 \cdot 90 = 540$ рублей.

Уровень С**7.1.C01**

- а) 1) при $x = 4, y = 8$
 2) y возрастает на $[-4; 4]$ и на $[12; +\infty)$
 3) $c \in [8; +\infty) \cup (-\infty; 0]$
 б) 1) при $x = -1, y = 5$
 2) y возрастает на $[-6; -1]$ и на $[4; +\infty)$
 3) $c \geq 0$.

7.1.C02

- а) 1) при $x = 5, y = -7$
 2) $y_{\text{макс}}$ на $[4; 10]$ равно -2
 3) $c \in (-\infty; -7) \cup [1; +\infty)$
 б) 1) при $x = -7, y = -2$
 2) $y_{\text{наим}}$ на $[-13; -10]$ равно 1
 3) $c \in [-2; 3)$

7.1.C03

- а) 1) $f(x) = -3$ при $x = -6, x = -4, x = 0, x = 4$
 2) $c \in (-\infty; -5) \cup (3; +\infty)$ – нет корней
 $c \in \{-5\} \cup (0; 3]$ – 1 корень
 $c \in (-5; -4) \cup \{0\}$ – 2 корня
 $c \in \{-4\} \cup (-3; 0)$ – 3 корня
 $c \in (-4; -3]$ – 4 корня.

б) 1) $f(x) = 3$ при $x = -6, x = -4, x = 0, x = 4$

2) $c \in (-\infty; -3) \cup (5; +\infty)$ – нет корней

$c \in [-3; 0) \cup \{5\}$ – 1 корень

$c \in \{0\} \cup (4; 5)$ – 2 корня

$c \in (0; 3) \cup \{4\}$ – 3 корня

$c \in [3; 4)$ – 4 корня.

7.1.C04

а) ветви параболы вверх $\Rightarrow a > 0$

б) ветви параболы вниз $\Rightarrow a < 0$

$$x_b < 0 \Rightarrow -\frac{b}{2a} < 0 \Rightarrow b > 0, y(0) = c > 0$$

$$x_b < 0 \Rightarrow -\frac{b}{2a} < 0 \Rightarrow b < 0, y(0) = c < 0$$

итак, $a > 0, b > 0, c > 0$.

итак, $a < 0, b < 0, c < 0$.

7.1.C05

а) 1) $7 \text{ ч} - 3 \text{ ч} = 4 \text{ ч}$

2) 9 км.

3) От дома к озеру, т.к. время движения меньше.

б) 1) $10 \text{ ч} - 4 \text{ ч} = 6 \text{ ч}$

2) 11 км.

3) От дома к озеру, т.к. время движения меньше.

7.1.C06

а) 1) $1 \text{ ч} + 2 \text{ ч} = 3 \text{ ч}$

2) $(16 \text{ км} - 6 \text{ км}) : (6 \text{ ч} - 4 \text{ ч}) = 5 \text{ км/ч}$

3) $(16 \text{ км} + 16 \text{ км}) : (13 \text{ ч} - 3 \text{ ч}) = 3,2 \text{ км/ч}$

б) 1) $3 \text{ ч} + 2 \text{ ч} = 5 \text{ ч}$

2) $(16 \text{ км} - 8 \text{ км}) : (10 \text{ ч} - 7 \text{ ч}) = \frac{8}{3} \text{ км/ч}$

3) $(16 \text{ км} + 16 \text{ км}) : (15 \text{ ч} - 5 \text{ ч}) = 3,2 \text{ км/ч.}$

7.1.C07

а) 1) 8 м

2) 2 мин.

3) 16 м

4) $16 \text{ м} : (19 \text{ мин} - 11 \text{ мин}) = 2 \text{ м/мин.}$

б) 1) 8 м

2) 1 мин.

3) 16 м

4) $16 \text{ м} : (17 \text{ мин} - 9 \text{ мин}) = 2 \text{ м/мин.}$

7.1.C08

а) Цена акции 1 февраля – 1020 рублей; 3 февраля – 1020 рублей;
17 февраля – 1008 рублей.

Убыток брокера в этой сделке:

$$50 \cdot 1020 - 20 \cdot 1020 - 30 \cdot 1008 = 30 \cdot (1020 - 1008) = 30 \cdot 12 = 360 \text{ (рублей).}$$

б) Цена акции 1 марта – 500 рублей; 5 марта – 500 рублей;
15 марта – 496 рублей.

Убыток брокера в этой сделке:

$$90 \cdot 500 - 10 \cdot 500 - 80 \cdot 496 = 80(500 - 496) = 80 \cdot 4 = 320 \text{ (рублей).}$$

7.1.C09

а) Цена акции 6 февраля – 4000 рублей; 14 февраля – 4016 рублей; 24 февраля – 4012 рублей.

Первый брокер получит прибыль:

$$80 \cdot 4016 + 20 \cdot 4012 - 100 \cdot 4000 = 1520 \text{ (рублей)}$$

А второй: $45 \cdot 4016 + 55 \cdot 4012 - 100 \cdot 4000 = 1380$ (рублей).

Первый получит прибыль больше на $1520 - 1380 = 140$ (рублей)

б) Цена акции 7 марта – 1010 рублей; 11 марта – 1006 рублей; 30 марта – 1023 рублей.

Убыток 1-го: $1010 \cdot 80 - 1006 \cdot 20 - 1023 \cdot 60 = -700$ рублей – (это прибыль

2-го: $1010 \cdot 80 - 1006 \cdot 25 - 1023 \cdot 55 = -65$ рублей – (тоже прибыль)

1 получил прибыли на 85 рублей больше.

7.1.C10

а) Цена акции 3 августа – 1496 рублей; 17 августа – 1504 рублей; 23 августа – 1516 рублей.

Доход Ивана: $50 \cdot 1504 - 50 \cdot 1496 = 50 \cdot 8 = 400$ (рублей)

Леонида: $30 \cdot 1516 - 30 \cdot 1496 = 30 \cdot 20 = 600$ (рублей).

Доход Леонида больше на 200 рублей.

б) Цена акции 5 мая – 492 рублей; 19 мая – 512 рублей; 25 мая – 516 рублей.

Доход Бориса: $50 \cdot 512 - 50 \cdot 492 = 20 \cdot 50 = 1000$ (рублей)

Андрея: $10 \cdot 516 - 10 \cdot 492 = 10 \cdot 24 = 240$ (рублей).

Доход Бориса больше дохода Андрея на 760 рублей.

Уровень D

7.1.D01

а) 1) $y = -(x-2)^2 + 4$

2) $y(-2) = -(-2-2)^2 + 4 = -12$

б) 1) $y = (x+2)^2 - 4$

2) $y(-7) = (-7+2)^2 - 4 = 21$

7.1.D02

а) Уравнение этой окружности: $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 2^2$

нижняя часть задается уравнением: $y = -2 - \sqrt{4 - (x-5)^2}$

б) Уравнение окружности: $(x+5)^2 + (y-1)^2 = 3^2$

верхняя часть задается уравнением: $y = 1 + \sqrt{9 - (x+5)^2}$.

7.1.D03

а) $y = |ax^2 + bx + c|$

$$y(1) = y(3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a + 2b = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ c = 3a \end{cases}$$

$\Rightarrow y = |ax^2 - 4ax + 3a| = a|x^2 - 4x + 3|$, осталось найти a .

$$x_a = \frac{4}{2} = 2, y(x_a) = a|4 - 8 + 3| = 2 \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow y = |2x^2 - 8x + 6|, a = 2, b = -8, c = 6, y(0) = 6.$$

$$6) y = ax^2 + b|x| + c$$

$$y(2) = y(4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4a + 2b + c = 0 \\ 16a + 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12a + 2b = 0 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -6a \\ c = 8a \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = a(x^2 - 6|x| + 8), x_a = \frac{6}{2} = 3; y = a(9 - 18 + 8) = 1 \Rightarrow a = -1$$

$$\Rightarrow y = -x^2 + 6|x| - 8, y(0) = -8, a = -1, b = 6, c = -8.$$

7.1.D04

$$a) y = ax + b, y(\sqrt{3} + 1) = a(\sqrt{3} + 1) + b = \sqrt{3} - 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow y = x - 3, y(3) = 0.$$

$$6) y = ax + b, y(-3 - \sqrt{2}) = a(-3 - \sqrt{2}) + b = -\sqrt{2} + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3a + b = 1 \\ -a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow y = -x - 2, y(3) = -5.$$

7.1.D05

$$a) y = x^2 + px + q$$

$$y(\sqrt{2}) = 2 + \sqrt{2}p + q = 7 - 6\sqrt{2} \Leftrightarrow p = -6, q = 5 \Leftrightarrow y = x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5)$$

Нули функции $x = 1, x = 5$.

$$6) y = x^2 + px + q; y(-\sqrt{3}) = 3 - \sqrt{3}p + q = 6 - 4\sqrt{3} \Leftrightarrow p = 4, q = 3$$

Тогда $y = x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3)$. Нули функции $x = -1, x = -3$

7.1.D06

$$a) y = \frac{a}{x-b}; y(\sqrt{5}) = \frac{a}{\sqrt{5}-b} = \sqrt{5} + 2 \Leftrightarrow a = 5 - \sqrt{5}b + 2\sqrt{5} - 2b$$

$$\Rightarrow b = 2, a = 1; y = \frac{1}{x-2} \Rightarrow y(1) = \frac{1}{1-2} = -1.$$

$$6) y = \frac{a}{x-b}; y(-\sqrt{3}) = \frac{a}{-\sqrt{3}-b} = \sqrt{3} + 2 \Leftrightarrow a = -(\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} + b)$$

$$\Rightarrow b = -2, a = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x+2} \Rightarrow y(-1) = \frac{1}{-1+2} = 1.$$

7.1.D07

a) Пусть он купил x акций. Цена акции 1 сентября – 1000 рублей; 9 сентября – 984 рубля; 15 сентября – 996 рублей.

Тогда его убыток составит $\frac{1000x - 984 \cdot 0,2x - 996 \cdot 0,8x}{1000x} \cdot 100\% = 0,64\%$

Ответ: 0,64%.

б) Пусть он купил x акций. Цена акции 1 октября – 1000 рублей;
5 октября – 1004 рубля; 17 октября – 998 рублей. Убыток составил:

$$\frac{1000x - 1004 \cdot 0,1x - 998 \cdot 0,9x}{1000x} \cdot 100\% = 0,14\% .$$

Ответ: 0,14%.

7.1.D08

а) Пусть он приобрел x акций. Цена акции 1 июня – 1000 рублей;
5 июня – 1008 рублей; 13 июня – 1012 рублей. Прибыль составила:

$$\frac{1008x \cdot 0,6 + 1012 \cdot 0,4x - 1000x}{1000x} \cdot 100\% = 0,96\% .$$

Ответ: 0,96%.

б) Пусть он приобрел x акций. Цена акции 1 июля – 1000 рублей;
9 июля – 1008 рублей; 13 июля – 1004 рубля. Прибыль составила:

$$\frac{1008x \cdot 0,4 + 1004 \cdot 0,6x - 1000x}{1000x} \cdot 100\% = 0,56\% .$$

Ответ: 0,56%.

7.1.D09

а) Акция принесла бы максимальный доход, если ее купить 21 июля за 1980 руб. (тогда ее цена минимальна) и продать 31 июля за 2020 руб. (тогда ее цена максимальна), доход составил бы 40 руб. с акции.

Ответ: 40 руб.

б) Рост цены на акции был с 1-го по 11 августа и составил 10 руб., с 21 по 31 августа и составил также 10 руб., т.е. максимальный доход с акции составил 10 руб.

Ответ: 10 руб.

7.1.D10

а) Цена акции 3 августа – 996 рублей; 15 августа – 992 рубля;
27 августа – 1016 рублей.

Убыток 1-го равен $30 \cdot 996 - 30 \cdot 992 = 30 \cdot 4 = 120$ руб.

доход 2-го $60 \cdot 1016 - 30 \cdot 996 - 30 \cdot 992 = 1320$ руб.

б) Цена акции 7 апреля – 1488 рублей; 17 апреля – 1498 рублей;
23 апреля – 1512 рублей.

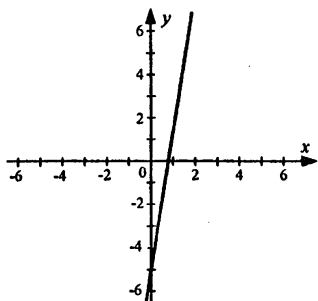
Доход 1-го равен: $50 \cdot 1498 - 50 \cdot 1488 = 500$ руб.

Доход 2-го: $100 \cdot 1512 - 50 \cdot 1498 - 50 \cdot 1488 = 1900$ руб.

§ 2. Построение графиков

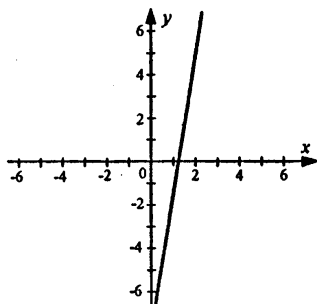
Уровень А

7.2.A01



а)

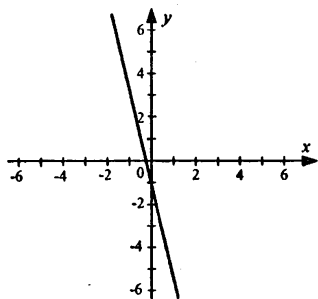
$$y \geq -40 \Leftrightarrow 7x - 5 \geq -40 \Leftrightarrow 7x \geq -35 \Leftrightarrow x \geq -5$$



б)

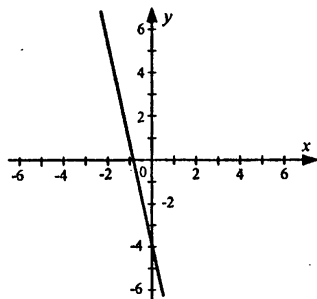
$$y \leq -49, 6x - 7 \leq -49 \Leftrightarrow 6x \leq -42 \Leftrightarrow x \leq -7.$$

7.2.A02



а)

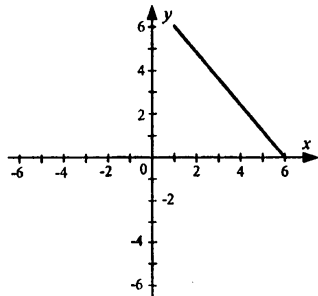
$$y \leq 2, -3x - 1 \leq 2 \Leftrightarrow 3x \geq -3 \Leftrightarrow x \geq -1$$



б)

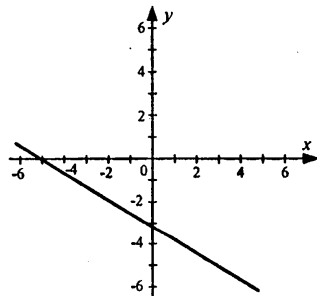
$$y \geq 16, -5x - 4 \geq 16 \Leftrightarrow 5x \leq -20 \Leftrightarrow x \leq -4$$

7.2.A03



а)

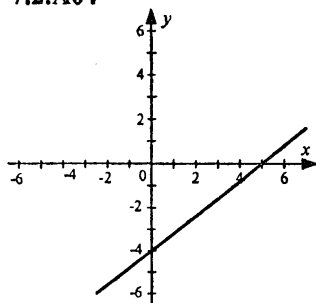
$$-\frac{7}{6}x + 7 > -7, -\frac{7}{6}x > -14, x < 12.$$



б)

$$y < 3, -\frac{3}{5}x - 3 < 3, -\frac{3}{5}x < -6, x > 10.$$

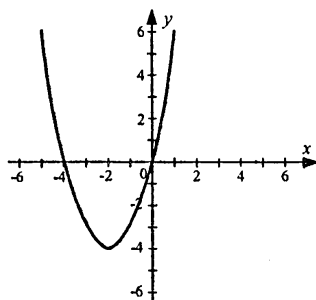
7.2.A04



а)

$$y < 4, \frac{4}{5}x - 4 < 4, x < 10$$

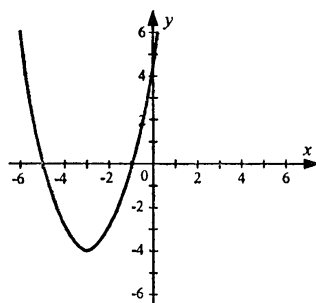
7.2.A05



а)

$$y = x^2 + 4x = (x+2)^2 - 4$$

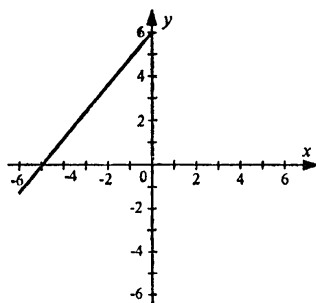
7.2.A06



а)

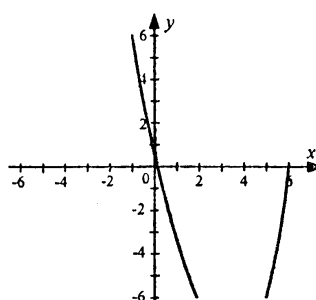
$$y = x^2 + 6x + 5 = (x^2 + 6x + 9) - 4 = (x+3)^2 - 4$$

График симметричен
относительно прямой $x = -3$.



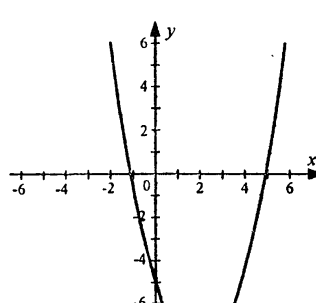
б)

$$y > -6, \frac{6}{5}x + 6 > -6, x > -10.$$



б)

$$y = x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9.$$

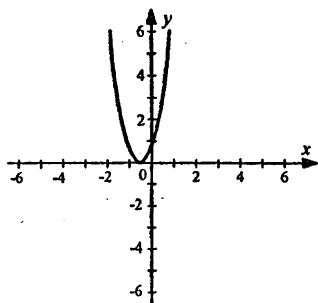


б)

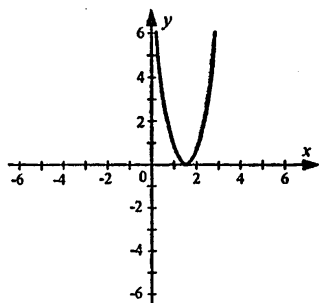
$$y = x^2 - 4x - 5 = (x^2 - 4x + 4) - 9 = (x-2)^2 - 9.$$

График симметричен
относительно прямой $x = 2$.

7.2.A07

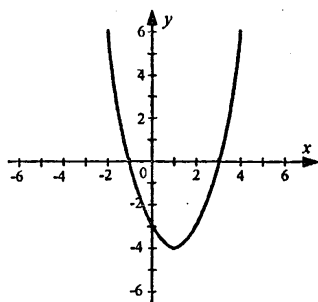


а)



б)

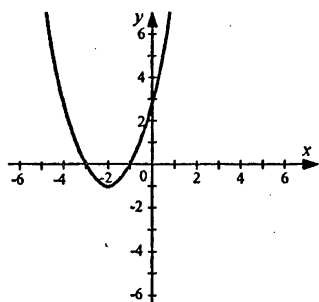
7.2.A08



а)

$$y = x^2 - 2x - 3 = (x^2 - 2x + 1) - 4 = (x - 1)^2 - 4$$

Прямая $y = -4$, пересекает график в одной точке.

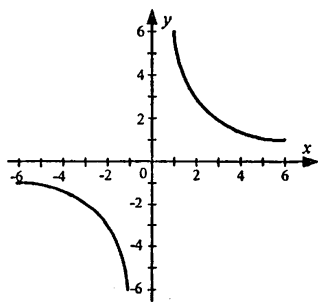


б)

$$y = x^2 + 4x + 3 = (x^2 + 4x + 4) - 1 = (x + 2)^2 - 1$$

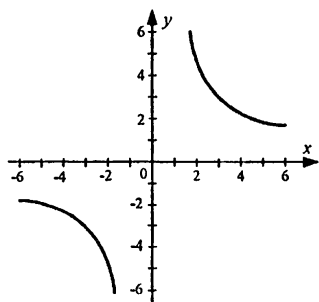
Прямая $y = -1$, пересекает график в одной точке.

7.2.A09



а)

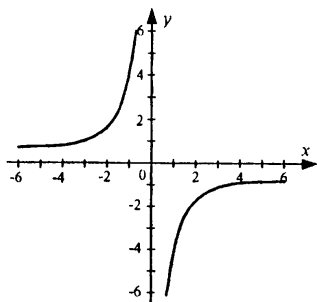
(0; 0)



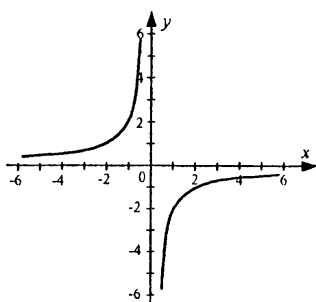
б)

(0; 0)

7.2.A10



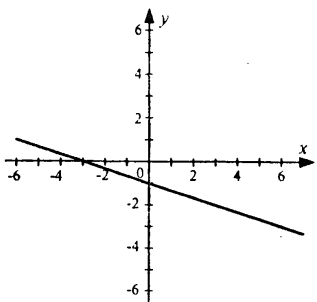
a)
(0; 0)



б)
(0; 0)

Уровень В

7.2.B01

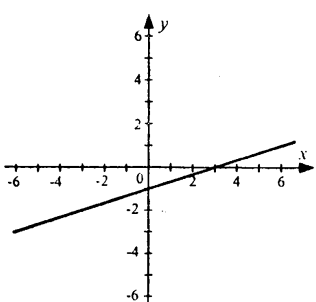


a)

$$A(-3; 0), B(0; -1), y = ax + b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3a + b = 0 \\ b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = -1 \end{cases}$$

$$y = -\frac{1}{3}x - 1$$



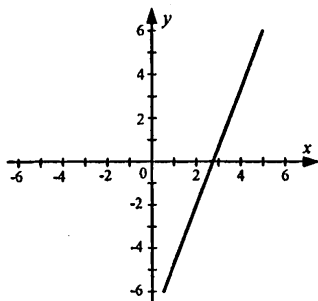
б)

$$A(3; 0), B(0; -1), y = ax + b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a + b = 0 \\ b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -1 \end{cases}$$

$$y = \frac{1}{3}x - 1$$

7.2.B02

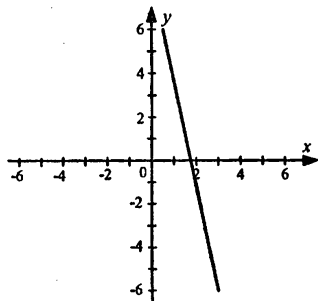


a)

$$A(3; 1), B(2; -2), y = ax + b$$

$$\begin{cases} 3a + b = 1 \\ 2a + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -8 \end{cases}$$

$$y = 3x - 8$$



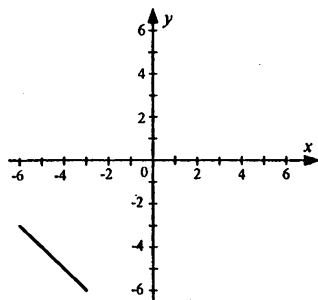
б)

$$A(2; -1), B(1; 3), y = ax + b$$

$$\begin{cases} 2a + b = -1 \\ a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 7 \end{cases}$$

$$y = -4x + 7$$

7.2.B03



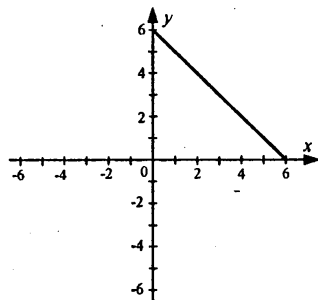
a)

$$\begin{cases} y = x - 7 \\ y = 8x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -8 \end{cases}, A(9; -18)$$

$$y = ax + b$$

$$\begin{cases} -a + b = -8 \\ 9a + b = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -9 \end{cases}$$

$$y = -x - 9$$



б)

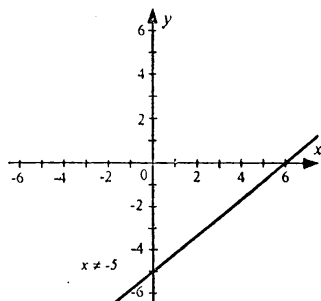
$$A(-6; 12), \begin{cases} y = -3x \\ y = x + 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 9 \end{cases},$$

$$y = ax + b$$

$$\begin{cases} -6a + b = 12 \\ -3a + b = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 6 \end{cases}$$

$$y = -x + 6.$$

7.2.B04

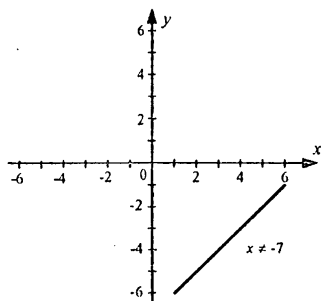


a)

$$y > -13, \frac{x^2 - 25}{x + 5} > -13 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 > -13 \\ x \neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -8 \\ x \neq -5 \end{cases}$$

$$x \in (-8; -5) \cup (-5; +\infty).$$



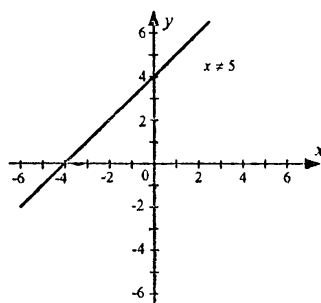
б)

$$y = \frac{x^2 - 49}{x + 7} = x - 7, x \neq -7$$

$$y > -15, \begin{cases} x - 7 > -15 \\ x \neq -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -8 \\ x \neq -7 \end{cases}$$

$$x \in (-8; -7) \cup (-7; +\infty).$$

7.2.B05

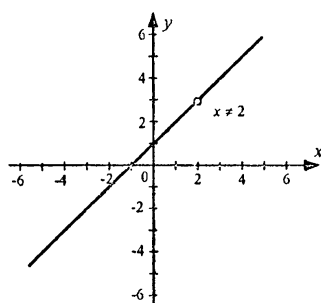


a)

$$y = \frac{x^2 - x - 20}{x - 5} = \frac{(x - 5)(x + 4)}{x - 5} = x + 4, x \neq 5$$

$$y \geq \frac{9}{2}, \begin{cases} x + 4 \geq \frac{9}{2} \\ x \neq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x \neq 5 \end{cases}$$

$$x \in \left[\frac{1}{2}; 5\right) \cup (5; +\infty).$$



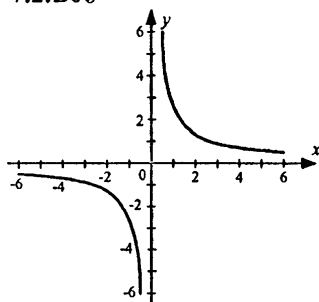
б)

$$y = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} = x + 1, x \neq 2$$

$$y \geq \frac{3}{2}, \begin{cases} x + 1 \geq \frac{3}{2} \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x \neq 2 \end{cases}$$

$$x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right) \cup (2; +\infty)$$

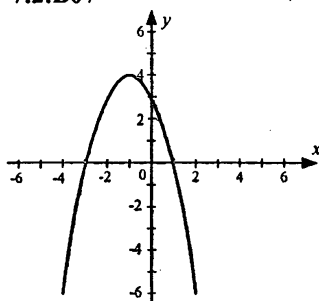
7.2.B06



a)

$$y = \frac{k}{x}, -2 = \frac{k}{-1} \Rightarrow k = 2, y = \frac{2}{x}$$

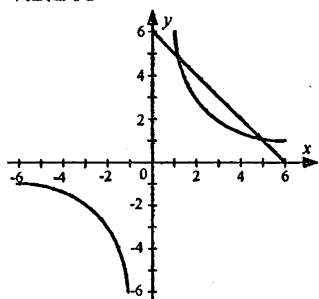
7.2.B07



a)

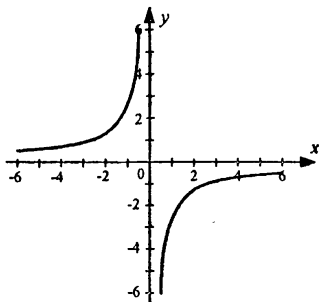
$$y = -x^2 + px + 3, -5 = -4 + 2p + 3, \\ p = -2, y = -x^2 - 2x + 3$$

7.2.B08



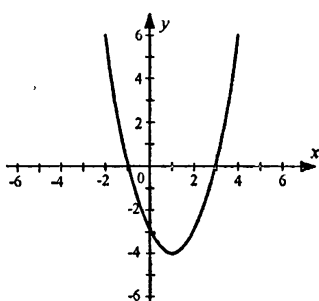
a)

$$\frac{5}{x} = 6 - x; \frac{x^2 - 6x + 5}{x} = 0; \\ \frac{(x-1)(x-5)}{x} = 0 \Rightarrow x = 1, x = 5.$$



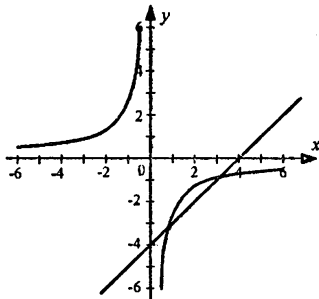
б)

$$y = \frac{k}{x}, 1 = \frac{k}{-2} \Rightarrow k = -2, y = -\frac{2}{x}.$$



б)

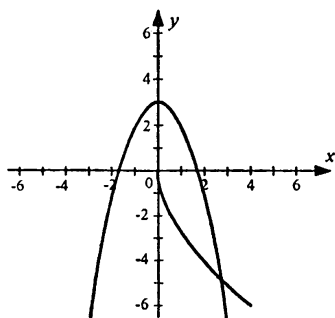
$$y = x^2 + px - 3, 5 = 4 - 2p - 3, \\ p = -2, y = x^2 - 2x - 3$$



б)

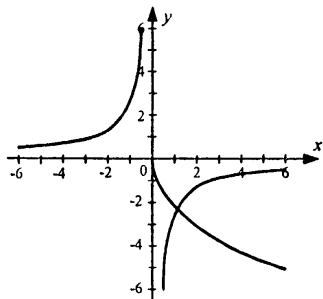
$$-\frac{3}{x} = x - 4; \frac{x^2 - 4x + 3}{x} = 0; \\ \frac{(x-1)(x-3)}{x} = 0 \Rightarrow x = 1, x = 3.$$

7.2.B09

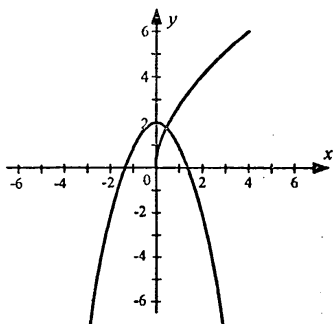


а)
$$\begin{cases} y + 3\sqrt{x} = 0 \\ y + x^2 = 3 \end{cases}$$
 одно решение.

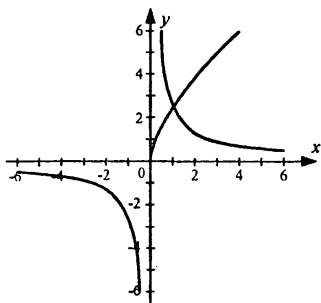
7.2.B10



а)
$$\begin{cases} xy = -3 \\ y = -2\sqrt{x} \end{cases}$$
 одно решение.



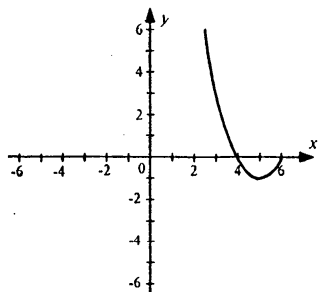
б)
$$\begin{cases} y - 3\sqrt{x} = 0 \\ y + x^2 = 2 \end{cases}$$
 одно решение.



б)
$$\begin{cases} xy = 2 \\ y = 3\sqrt{x} \end{cases}$$
 одно решение.

Уровень С

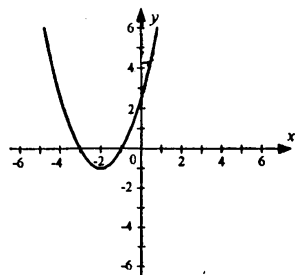
7.2.C01



а) $A(4; 0), B(6; 0), C(5; -1)$ $y = ax^2 + bx + c$

$$\begin{cases} 16a + 4b + c = 0 \\ 36a + 6b + c = 0 \\ 25a + 5b + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20a + 2b = 0 \\ 36a + 6b + c = 0 \\ 25a + 5b + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -10a \\ -24a + c = 0 \\ -25a + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -10 \\ c = 24 \end{cases} \Leftrightarrow y = x^2 - 10x + 24$$

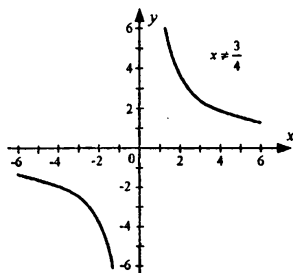


6) $A(-3; 0), B(-1; 0), C(-2; -1)$ $y = ax^2 + bx + c$

$$\begin{cases} 9a + 3b + c = 0 \\ a - b + c = 0 \\ 4a - 2b + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a - 2b = 0 \\ a - b + c = 0 \\ 4a - 2b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 4a \\ -3a + c = 0 \\ -4a + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow y = x^2 + 4x + 3$$

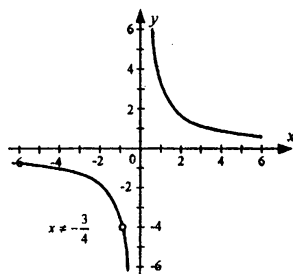
7.2.C02



$$a) y = 6 \cdot \frac{4x^2 - 3x}{4x^3 - 3x^2} = 6 \cdot \frac{4x \left(x - \frac{3}{4} \right)}{\left(4x \left(x - \frac{3}{4} \right) \right) \cdot x} = \frac{6}{x},$$

$$x \neq \frac{3}{4}.$$

$y = 8, y = 0$ – прямые, не имеющие общих точек с графиком.

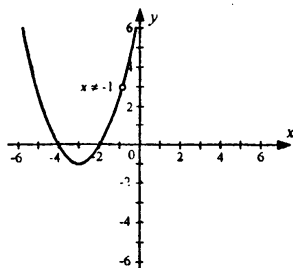


$$b) y = 3 \cdot \frac{4x^2 + 3x}{4x^3 + 3x^2} = 3 \cdot \frac{4 \left(x + \frac{3}{4} \right)}{4x \left(x + \frac{3}{4} \right)} = \frac{3}{x},$$

$$x \neq -\frac{3}{4}$$

$y = 0, y = -4$ – прямые, не имеющие общих точек с графиком.

7.2.C03

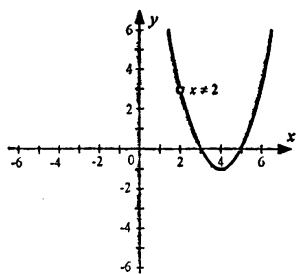


a)

$$y = \frac{(x+4)(x^2+3x+2)}{x+1} =$$

$$= \frac{(x+4)(x+1)(x+2)}{x+1} =$$

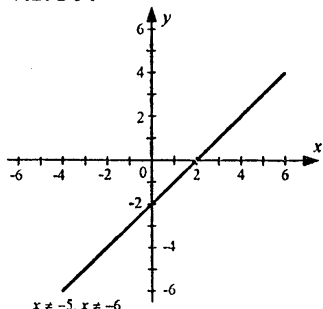
$$= (x+4)(x+2), x \neq -1, m = 3, m = -1.$$



6)

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{(x-3)(x^2-7x+10)}{x-2} = \\
 &= \frac{(x-3)(x-2)(x-5)}{x-2} = \\
 &= (x-3)(x-5), x \neq 2, m = 3, m = -1.
 \end{aligned}$$

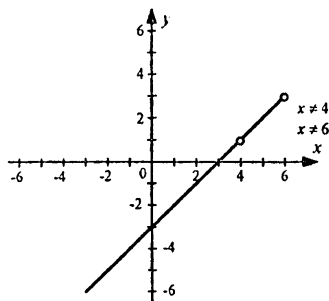
7.2.C04



a)

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{(x+5)(x^2+4x-12)}{x^2+11x+30} = \\
 &= \frac{(x+6)(x+6)(x-2)}{(x+5)(x+6)} = x-2,
 \end{aligned}$$

$x \neq -5, x \neq -6$

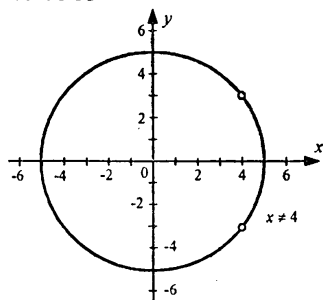


б)

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{(x-4)(x^2-9x+18)}{x^2-10x+24} = \\
 &= \frac{(x-4)(x-6)(x-3)}{(x-4)(x-6)} = x-3,
 \end{aligned}$$

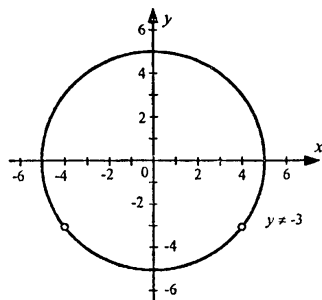
$x \neq 4, x \neq 6$

7.2.C05



a)

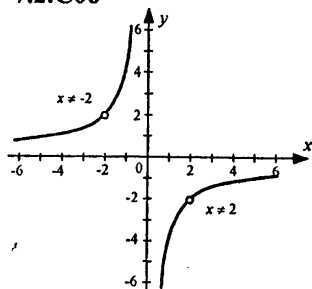
$$\frac{x^2 + y^2 - 25}{x-4} = 0$$



б)

$$\frac{25 - x^2 - y^2}{y+3} = 0$$

7.2.C06

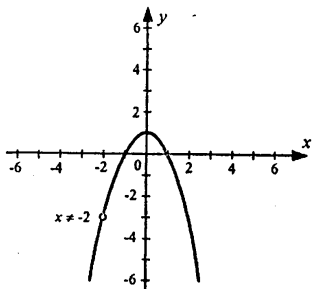


a)

$$\frac{xy+4}{x+y}=0 \Leftrightarrow y=-\frac{4}{x}, y \neq -x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=-\frac{4}{x}, x \neq \pm 2$$

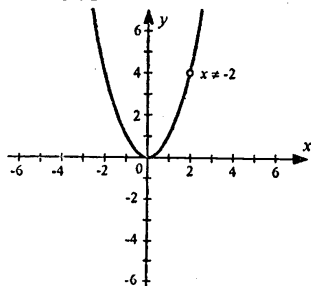
7.2.C07



a)

$$\frac{x^2+y-1}{x+2}=0 \Leftrightarrow y=1-x^2, x \neq -2$$

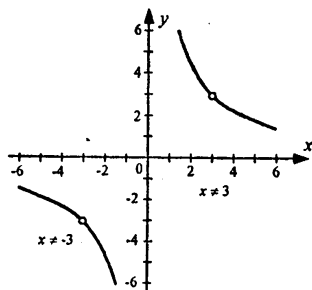
7.2.C08



a)

$$y = \frac{x^3 - 2x^2}{x-2} = x^2 \frac{(x-2)}{(x-2)} = x^2, x \neq 2$$

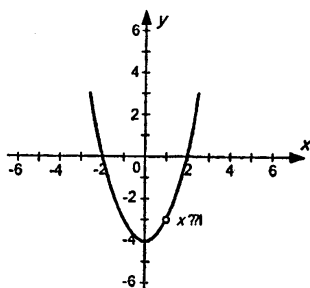
$$c=0, c=4.$$



б)

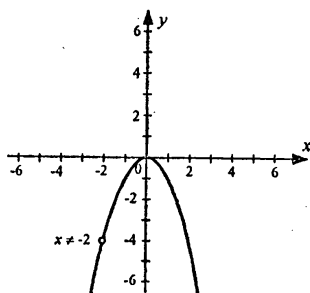
$$\frac{9-xy}{y-x}=0 \Leftrightarrow y=\frac{9}{x}, x \neq y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{9}{x}, x \neq \pm 3$$



б)

$$\frac{y-x^2+4}{x-1}=0 \Leftrightarrow y=x^2-4, x \neq 1$$

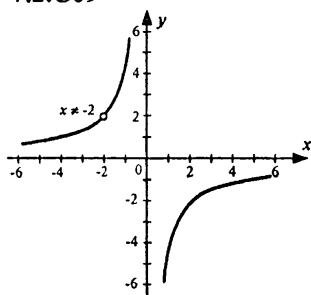


б)

$$y = -\frac{2x^2+x^3}{x+2} = -x^2, x \neq -2$$

$$c=0, c=-4.$$

7.2.C09

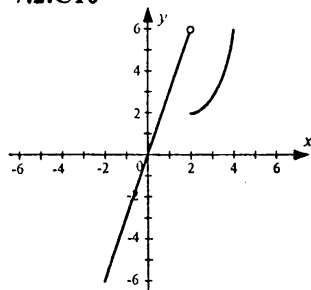


а)

$$y = -\frac{4(x+2)}{x^2+2x} = -\frac{4}{x}, x \neq -2$$

$$l = 2, l = 0.$$

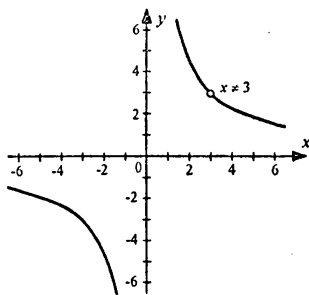
7.2.C10



а)

$$y = \begin{cases} x^2 - 4x + 6, & x \geq 2 \\ 3x, & x < 2 \end{cases}$$

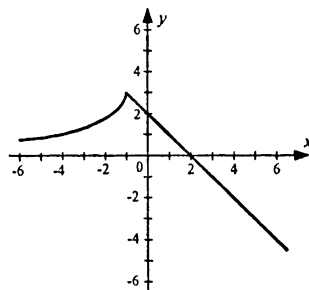
$$m \in [2; 6)$$



б)

$$y = -\frac{6(x-3)}{x^2-3x} = \frac{6(x-3)}{x(x-3)} = \frac{6}{x}, x \neq 3$$

$$l = 0, l = 2.$$



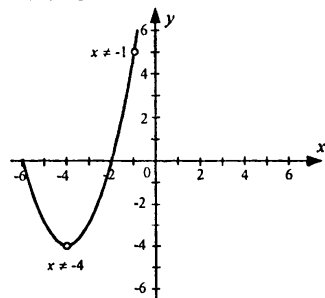
б)

$$y = \begin{cases} -\frac{3}{x}, & x \leq -1 \\ 2 - x, & x > -1 \end{cases}$$

$$m \in (0; 3).$$

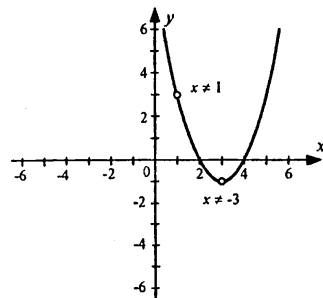
Уровень D

7.2.D01



а)

222



б)

$$y = \frac{(x^2 + 7x + 6)(x^2 + 6x + 8)}{x^2 + 5x + 4} =$$

$$= \frac{(x+1)(x+6)(x+2)(x+4)}{(x+1)(x+4)} =$$

$$= (x+6)(x+2), x \neq -1, x \neq -4.$$

$$c = 5$$

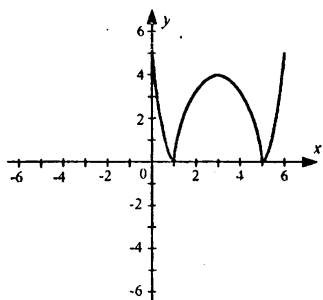
$$y = \frac{(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 7x + 12)}{x^2 - 4x + 3} =$$

$$= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(x-1)(x-3)} =$$

$$= (x-2)(x-4), x \neq 1, x \neq 3.$$

$$c = 3.$$

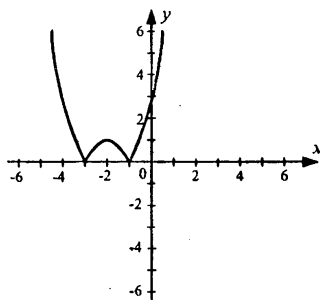
7.2.D02



a)

$$y = |x^2 - 6x + 5| = |(x-1)(x-5)|$$

$$c = 3.$$

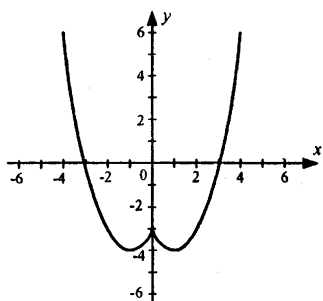


б)

$$y = |x^2 - 4x + 3| = |(x+1)(x+3)|$$

$$c = 1.$$

7.2.D03



a)

$$y = x^2 - 2|x| - 3$$

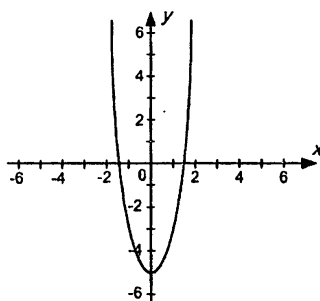
$$x^2 - 2|x| - 3 = K$$

$K \in (-\infty; -4)$ – решений нет

$K \in \{-4\} \cup (-3; +\infty)$ – 2 решения

$K \in (-4; -3)$ – 4 решения

$K \in \{-3\}$ – 3 решения.



б)

$$y = x^2 + 4|x| - 5$$

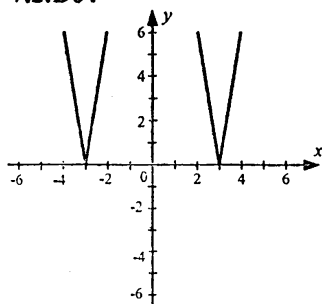
$$x^2 + 4|x| - 5 = K$$

$K = -5$ – одно решение

$K \in (-\infty; -5)$ – нет решений

$K \in (-5; +\infty)$ – 2 решения

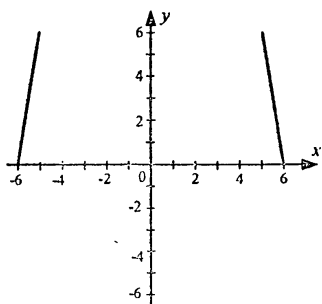
7.2.D04



а)

$$y = |x^2 + 2|x| - 15|$$

Наибольшее число
общих точек графика
и прямой $y = c$ равно 4.

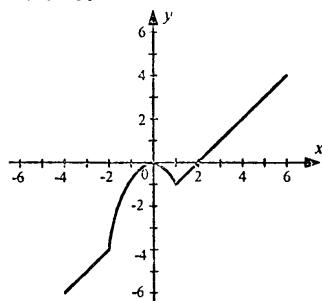


б)

$$y = |x^2 - 4|x| - 12|$$

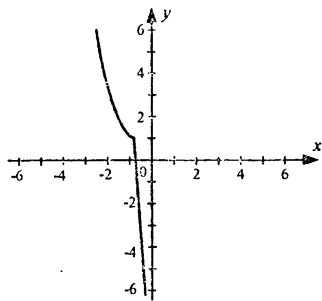
Наибольшее число
общих точек графика
и прямой $y = c$ равно 6.

7.2.D05



а)

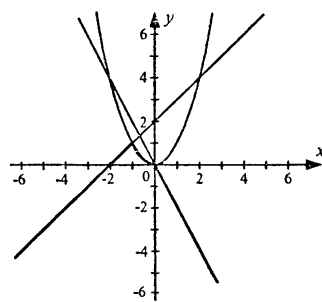
$$y = \max(x-2, -x^2)$$



б)

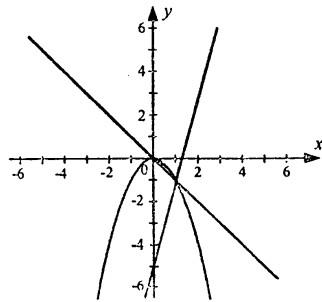
$$y = \min(-5x-4, x^2)$$

7.2.D06



а)

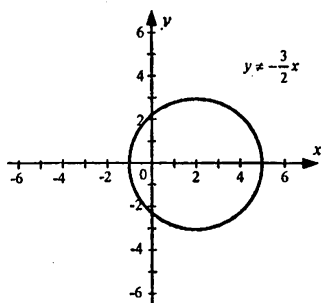
$$y = \min(x+2, x^2, -2x)$$



б)

$$y = \max(4x-5, -x^2, -x)$$

7.2.D07

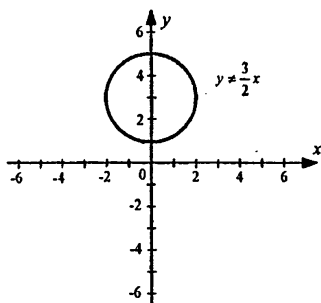


а)

$$\frac{x^2 - 4x + y^2 - 5}{3x + 2y} = 0;$$

$$\frac{(x^2 - 4x + 4) + y^2 - 9}{3x + 2y} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 3^2 - \text{окружность с центром в } (2; 0) \\ \text{и радиусом } 3 \\ 3x + 2y \neq 0, \Rightarrow y \neq -\frac{3}{2}x \end{cases}$$



б)

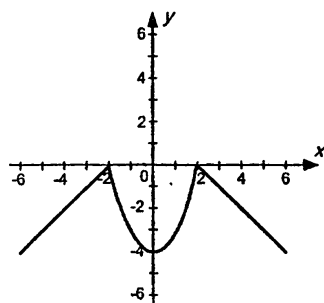
$$\frac{y^2 - 6y + x^2 + 5}{2y - 3x} = 0;$$

$$\frac{(y^2 - 6y + 9) + x^2 - 4}{2y - 3x} = 0$$

$$\frac{(y-3)^2 + x^2 - 4}{2y - 3x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-3)^2 + x^2 - 4 = 0 \\ y \neq \frac{3}{2}x \end{cases}$$

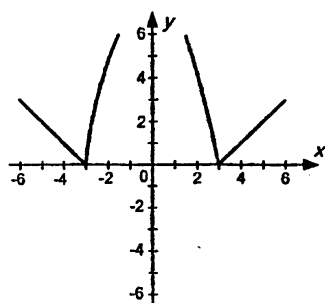
7.2.D08



а)

$$\begin{cases} y = 2 - |x|, |x| \geq 2 \\ y = x^2 - 4, |x| < 2 \end{cases}$$

$$c = 0, c \in (-\infty; -4)$$

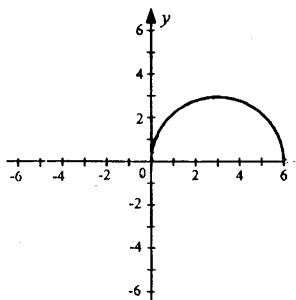


б)

$$\begin{cases} y = |x| - 3, |x| \geq 3 \\ y = 9 - x^2, |x| < 3 \end{cases}$$

$$c = 0, c \in (9; +\infty).$$

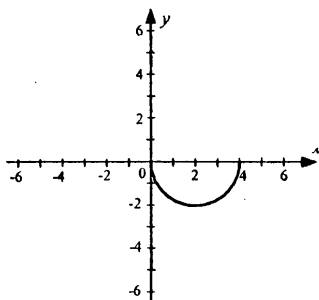
7.2.D09



a)

$$y = \sqrt{6x - x^2} = \sqrt{9 - (x - 3)^2}$$

$$c = 3$$

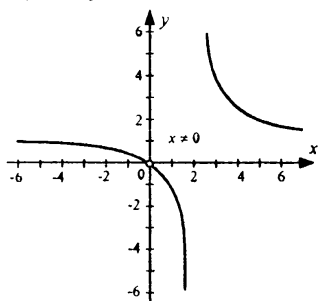


б)

$$y = -\sqrt{4x - x^2} = -\sqrt{4 - (x - 2)^2}$$

$$c = -2.$$

7.2.D10



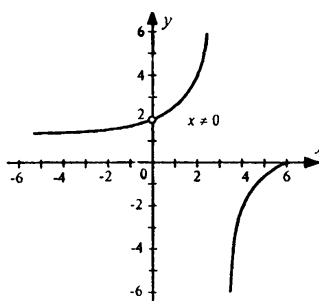
a)

$$y = \frac{x+2}{x - \frac{4}{x}} = \frac{x(x+2)}{(x-2)(x+2)},$$

$$= \frac{x}{x-2}, x \neq 0$$

$$y = 1 + \frac{2}{x-2}, x \neq 0$$

$$c = 0, c = 1.$$



б)

$$y = \frac{x-3}{x - \frac{9}{x}} = \frac{x(x-3)}{(x-3)(x+3)} =$$

$$= \frac{x}{x+3}, x \neq 0$$

$$y = 1 - \frac{3}{x+3}, x \neq 0$$

$$c = 1, c = 2.$$

§ 3. Исследование функций

Уровень А

7.3.A01

$$\text{а) } y = x^2 - 4x - 5 = (x^2 - 4x + 4) - 9 = (x - 2)^2 - 9 \Rightarrow y_{\text{наим}} = -9$$

$$\text{б) } y = x^2 + 6x - 7 = (x^2 + 6x + 9) - 16 = (x + 3)^2 - 16 \Rightarrow y_{\text{наим}} = -16$$

7.3.A02

$$\text{а) } y = 7 - 6x - x^2 = 16 - (9 + 6x + x^2) = 16 - (x + 3)^2 \Rightarrow y_{\text{наиб}} = 16$$

$$\text{б) } y = 3 - 2x - x^2 = 4 - (1 + 2x + x^2) = 4 - (x + 1)^2 \Rightarrow y_{\text{наиб}} = 4.$$

7.3.A03

$$\text{а) } y = 2x^2 - 4x + 7 = 2(x^2 - 2x + 1) + 5 = 2(x - 1)^2 + 5 \Rightarrow y_{\text{наим}} = 5$$

$$\text{б) } y = 3x^2 + 6x + 1 = 3(x^2 + 2x + 1) - 2 = 3(x + 1)^2 - 2 \Rightarrow y_{\text{наим}} = -2.$$

7.3.A04

$$\text{а) } y = -5x^2 - 10x - 7 = -5(x^2 + 2x + 1) - 2 = -5(x + 1)^2 - 2 \Rightarrow y_{\text{наиб}} = -2$$

$$\text{б) } y = -4x^2 + 8x + 3 = -4(x^2 - 2x + 1) + 7 = -4(x - 1)^2 + 7 \Rightarrow y_{\text{наиб}} = 7.$$

7.3.A05

$$\text{а) } y = x^2 - 3x + 2, x_{\text{верш}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow y \text{ убывает при } x \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right].$$

$$\text{б) } y = x^2 - 5x + 4, x_{\text{верш}} = -\frac{-5}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow y \text{ убывает при } x \in \left(-\infty; \frac{5}{2}\right].$$

7.3.A06

$$\text{а) } y = -4 + 7x - 3x^2, x_{\text{верш}} = -\frac{7}{-6} = \frac{7}{6} \Rightarrow y \text{ убывает при } \left[\frac{7}{6}; +\infty\right).$$

$$\text{б) } y = 7 - 3x - 4x^2, x_{\text{верш}} = -\frac{-3}{-8} = -\frac{3}{8} \Rightarrow y \text{ убывает при } \left[-\frac{3}{8}; +\infty\right).$$

7.3.A07

$$\text{а) } y = 2x^2 + 5x + 3, x_{\text{верш}} = -\frac{5}{4} \Rightarrow y \text{ возрастает на } \left[-\frac{5}{4}; +\infty\right).$$

$$\text{б) } y = 3x^2 - 5x + 2, x_{\text{верш}} = -\frac{-5}{6} = \frac{5}{6} \Rightarrow y \text{ возрастает на } \left[\frac{5}{6}; +\infty\right).$$

7.3.A08

$$\text{а) } y = 4 - x - 3x^2, x_{\text{верш}} = -\frac{-1}{-6} = -\frac{1}{6} \Rightarrow y \text{ возрастает на } \left(-\infty; -\frac{1}{6}\right].$$

$$\text{б) } y = 5 - x - 4x^2, x_{\text{верш}} = -\frac{-1}{-8} = -\frac{1}{8} \Rightarrow y \text{ возрастает на } \left(-\infty; -\frac{1}{8}\right].$$

7.3.A09

а) $y = -\frac{5}{x}$ – возрастает при $x > 0$

б) $y = \frac{4}{x}$ – убывает при $x < 0$.

7.3.A10

а) $y = \frac{2}{x}$ – убывает при $x > 0$.

б) $y = -\frac{3}{x}$ – возрастает при $x > 0$.

Уровень В**7.3.B01**

а) $y = 2 - x$ – убывает при $x > 0$.

б) $y = \frac{3}{x}$ – убывает при $x < 0$.

7.3.B02

а) $y = -\frac{7}{x}$ – возрастает при $x < 0$.

б) Никакая из функций $y = -5x^2$, $y = \frac{5}{x}$, $y = 5 - x$ не возрастает при $x > 0$.

7.3.B03

а) $y = (x+4)^2$ – возрастает на $[-4; +\infty)$. $y = \frac{4}{x}$ – убывает на всей области определения $\Rightarrow$ такого промежутка нет.

б) т.к. $y = \frac{7}{x}$ – убывает на всей области определения, такого промежутка нет.

7.3.B04

а) $y = -(x+8)^2$ – возрастает на $(-\infty; -8]$. $y = -\frac{8}{x}$ – возрастает на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty) \Rightarrow$ обе функции возрастают на $(-\infty; -8]$.

б) $y = (x-3)^2$ – возрастает на $[3; +\infty)$. $y = -\frac{3}{x}$ – возрастает на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty) \Rightarrow$ обе функции возрастают на $[3; +\infty)$.

7.3.B05

а) $y = 5\sqrt{x^2 + 4}$, $y_{\text{наим}} = 5\sqrt{4} = 10$

б) $y = -2\sqrt{x^2 + 9}$, $y_{\text{наиб}} = -2\sqrt{9} = -6$.

7.3.B06

а) $y = \sqrt{16 - 5x^2}$, $y_{\text{наиб}} = \sqrt{16} = 4$

б) $y = -\sqrt{25 - 3x^2}$, $y_{\text{наим}} = -\sqrt{25} = -5$.

7.3.B07

а) $y = 3 + 2\sqrt{x}$, $y_{\text{наим}} = 3$

б) $y = 2 - 3\sqrt{x}$, $y_{\text{наиб}} = 2$.

7.3.B08

$$а) y = \frac{8}{\sqrt{x^2 + 4}}, y_{\text{наиб}} = \frac{8}{\sqrt{4}} = \frac{8}{2} = 4.$$

$$б) y = -\frac{6}{\sqrt{x^2 + 9}}, y_{\text{наим}} = -\frac{6}{\sqrt{9}} = -\frac{6}{3} = -2.$$

7.3.B09

$$а) y = -\frac{12}{x^2 + 3}, y_{\text{наим}} = -\frac{12}{3} = -4.$$

$$б) y = \frac{10}{x^2 + 2}, y_{\text{наиб}} = \frac{10}{2} = 5.$$

7.3.B10

$$а) y = 5 + \frac{6}{x^2 + 6}, y_{\text{наиб}} = 5 + \frac{6}{6} = 6.$$

$$б) y = 3 - \frac{4}{x^2 + 4}, y_{\text{наим}} = 3 - \frac{4}{4} = 2.$$

Уровень С**7.3.C01**

а) все функции возрастают при $x > 5$.

б) все функции убывают при $x < 2$.

7.3.C02

а) функция всюду возрастает.

б) y возрастает при $x \geq 3$, т.к. $x = 3$ – вершина параболы $y = x^2 - 6x + 2$.

7.3.C03

а) (2; 8); (-8; -32); (6; 24) – все 3 точки лежат на прямой $y = 4x$, т.е. параболу провести нельзя.

б) (-9; 3); (12; -4); (-3; 1) – все 3 точки лежат на прямой $y = -\frac{1}{3}x$, т.е. параболу провести нельзя.

7.3.C04

$$а) y = \frac{x^2 + 7}{x^2 + 6} = 1 + \frac{1}{x^2 + 6}, y_{\text{наиб}} = 1 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$$

$$б) y = \frac{x^2 + 4}{x^2 + 5} = 1 - \frac{1}{x^2 + 5}, y_{\text{наим}} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

7.3.C05

а) Т.к. $f(x)$ возрастает и $f(2) = 5$, то $f(x) > 5$ при $x > 2$.

б) Т.к. $g(x)$ убывает и $g(5) = 2$, то $g(x) < 2$ при $x > 5$.

7.3.C06

$$а) x < 7$$

$$б) x > -4.$$

7.3.C07

$$а) y = \sqrt{x^2 + 36} + \sqrt{x^2 + 49}; y_{\text{наим}} = \sqrt{36} + \sqrt{49} = 6 + 7 = 13, x = 0$$

$$6) y = \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 + 64}; y_{\text{наим}} = \sqrt{4} + \sqrt{64} = 2 + 8 = 10, x = 0.$$

7.3.C08

$$a) y = 7 - \sqrt{3x^2 + 4x - 4}; 3x^2 + 4x - 4 = 0, \frac{D}{4} = 4 + 12 = 4^2; x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{3};$$

$$x_1 = \frac{2}{3}; x_2 = -2; y_{\text{наиб}} = 7 \text{ при } x = \frac{2}{3}, x = -2$$

$$6) y = 6 + \sqrt{4x^2 - 4x - 3}; 4x^2 - 4x - 3 = 0, \frac{D}{4} = 4 + 12 = 4^2; x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{4};$$

$$x_1 = \frac{3}{2}; x_2 = -\frac{1}{2}; y_{\text{наим}} = 6 \text{ при } x = \frac{3}{2}, x = -\frac{1}{2}.$$

7.3.C09

a) $y = -5x - 24$. Точки, равноудаленные от осей координат лежат на прямых $y = x, y = -x$. При $y = x, x = -5x - 24 \Rightarrow x = -4, y = -4, y = -x, -x = -5x - 24 \Rightarrow x = -6, y = 6$.

Т.е. эти точки $(-4; -4); (-6; 6)$.

6) $y = 6x - 35$. Точки, равноудаленные от осей координат лежат на прямых $y = x, y = -x$. $y = x, x = 6x - 35 \Rightarrow x = 7, y = 7, y = -x, -x = -6x - 35 \Rightarrow x = 5, y = -5$. Т.е. эти точки $(7; 7); (5; -5)$.

7.3.C10

$$a) y = 5 - 4|x^2 - 7x + 6| = 5 - 4|(x-1)(x-6)|; y_{\text{наиб}} = 5 \text{ при } x = 1, x = 6$$

$$6) y = 6 + 5|x^2 - 4x + 3| = 6 + 5|(x-3)(x-1)|; y_{\text{наим}} = 6 \text{ при } x = 3, x = 1$$

Уровень D

7.3.D01

$$a) y = ax^2 + bx + c, (-3; 33); (1; -3); (0; -6)$$

$$\begin{cases} 9a - 3b + c = 33 \\ a + b + c = -3 \\ c = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a - 3b = 39 \\ a + b = 3 \\ c = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - b = 13 \\ a + b = 3 \\ c = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a = 16 \\ a + b = 3 \\ c = -6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \\ c = -6 \end{cases} \Rightarrow y = 4x^2 - x - 6, x_{\text{в}} = \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow x_{\text{наим}} = \frac{1}{16} - \frac{1}{8} - 6 = -6 - \frac{1}{16} = -6\frac{1}{16} \Rightarrow E(y) = \left[-6\frac{1}{16}; +\infty\right)$$

$$\text{Ответ: } a = 4, b = -1, c = -6, E(y) = \left[-6\frac{1}{16}; +\infty\right).$$

$$6) y = ax^2 + bx + c, (-3; 23); (1; 3); (0; -1)$$

$$\begin{cases} 9a - 3b + c = 23 \\ a + b + c = 3 \\ c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a - 3b = 24 \\ a + b = 4 \\ c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12a = 36 \\ a + b = 4 \\ c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$y = 3x^2 - x - 1, x_0 = -\frac{1}{6}; x_{\text{наим}} = \frac{1}{12} - \frac{1}{6} - 1 = -1\frac{1}{12} \Rightarrow E(y) = \left[-1\frac{1}{12}; +\infty\right)$$

$$\text{Ответ: } a = 3, b = 1, c = -1, E(y) = \left[-1\frac{1}{12}; +\infty\right).$$

7.3.D02

а) $g(-3) - f(-3) = -6$, т.к. g убывает, а f возрастает, то $g(x) - f(x) > -6$ при $x < -3$

Ответ: $(-\infty; -3)$.

б) $f(4) - g(4) = -8$, т.к. f возрастает, а g убывает, то $f(x) - g(x)$ — возрастает и $f(x) - g(x) < -8$, при $x < -8$.

Ответ: $(-\infty; -8)$.

7.3.D03

$$а) y = 7x - |x| - 5|x - 2| \Leftrightarrow y = \begin{cases} 7x + x - 5(2 - x) = 13x - 10, x \leq 0 \\ 7x - x - 5(2 - x) = 11x - 10, x \in [0; 2] \\ 7x - x - 5x + 10 = x + 10, x \in [2; +\infty) \end{cases}$$

Отсюда видно, что y возрастает на всей прямой.

$$б) y = |x| + 4|x + 2| - 6x \Leftrightarrow y = \begin{cases} -x - 4(x + 2) - 6x = -11x - 8, x \leq -2 \\ -x + 4x + 8 - 6x = -3x + 8, x \in [-2; 0] \\ x + 4x + 8 - 6x = -x + 8, x \geq 0 \end{cases}$$

Отсюда видно, что y убывает на всей прямой.

7.3.D04

$$а) y = 2\sqrt{x+2} - x - 1; y = -(x + 2 - 2\sqrt{x+2} + 1) + 2 = -(\sqrt{x+2} - 1)^2 + 2 \\ \Rightarrow y_{\text{наиб}} = 2$$

$$б) y = x + 2 - 4\sqrt{x-3} = ((x-3) - 4\sqrt{x-3} + 4) + 1 = (\sqrt{x-3} - 2)^2 + 1 \\ \Rightarrow y_{\text{наим}} = 1.$$

7.3.D05

$$а) y = \sqrt{x^2 + 225} - \sqrt{x^2 + 16} = \frac{(\sqrt{x^2 + 225} - \sqrt{x^2 + 16})(\sqrt{x^2 + 225} + \sqrt{x^2 + 16})}{\sqrt{x^2 + 225} + \sqrt{x^2 + 16}}$$

$$\Rightarrow y = \frac{209}{\sqrt{x^2 + 225} + \sqrt{x^2 + 16}}; \min(\sqrt{x^2 + 225} + \sqrt{x^2 + 16}) = 15 + 4 = 19$$

$$\Rightarrow y_{\text{наиб}} = \frac{209}{19} = 11, x = 0;$$

б)

$$y = \sqrt{x^2 + 169} - \sqrt{x^2 + 16} = \frac{(\sqrt{x^2 + 169} - \sqrt{x^2 + 16})(\sqrt{x^2 + 169} + \sqrt{x^2 + 16})}{\sqrt{x^2 + 169} + \sqrt{x^2 + 16}} =$$

$$= \frac{153}{\sqrt{x^2 + 169} + \sqrt{x^2 + 16}};$$

$$\min(\sqrt{x^2 + 169} + \sqrt{x^2 + 16}) = \sqrt{169} + \sqrt{16} = 13 + 4 = 17 \Rightarrow y_{\text{наиб}} = \frac{153}{17} = 9, x = 0.$$

7.3.D06

$$\text{а) } y = \frac{5x^2 + 10x + 14}{x^2 + 2x + 4} = \frac{5(x^2 + 2x + 4) - 6}{x^2 + 2x + 4} = 5 - \frac{6}{(x+1)^2 + 3}$$

$$\Rightarrow y_{\text{наим}} = 5 - \frac{6}{3} = 3, x = -1$$

$$\text{б) } y = \frac{3x^2 - 6x + 23}{x^2 - 2x + 5} = \frac{3(x^2 - 2x + 5) + 8}{x^2 - 2x + 5} = 3 + \frac{8}{(x-1)^2 + 4}$$

$$\Rightarrow y_{\text{наиб}} = 3 + \frac{8}{4} = 5, \text{ при } x = 1.$$

7.3.D07

$$\text{а) } y = \sqrt{2x^2 - 7x + 3} + \sqrt{x^2 + 2x - 15} = \sqrt{(2x-1)(x-3)} + \sqrt{(x+5)(x-3)}$$

$$\Rightarrow y_{\text{наим}} = 0 \text{ при } x = 3.$$

$$\text{б) } y = \sqrt{x^2 - 4x + 5} + \sqrt{2x^2 - 8x + 17} = \sqrt{(x-2)^2 + 1} + \sqrt{2(x-2)^2 + 9}$$

$$\Rightarrow y_{\text{наим}} = \sqrt{1} + \sqrt{9} = 1 + 3 = 4, \text{ при } x = 2.$$

7.3.D08

$$\text{а) } y = \sqrt{x^2 - 2x - 8} + \sqrt{3x^2 + 12x + 28}$$

$$y = \sqrt{(x-4)(x+2)} + \sqrt{3(x+2)^2 + 16}$$

$$\Rightarrow y_{\text{наим}} = \sqrt{16} = 4 \text{ при } x = -2.$$

$$\text{б) } y = \sqrt{2x^2 + 12x + 27} + \sqrt{x^2 - 2x - 15} = \sqrt{2(x+3)^2 + 9} + \sqrt{(x-5)(x+3)}$$

$$\Rightarrow y_{\text{наим}} = \sqrt{9} = 3 \text{ при } x = -3.$$

7.3.D09

а) $y = \frac{3x^2 + 2x}{4x - 3}$. Нужно посмотреть, при каких t уравнение $\frac{3x^2 + 2x}{4x - 3} = t$

имеет решение. $3x^2 + 2x = 4xt - 3t \Rightarrow 3x^2 + 2x(1 - 2t) + 3t = 0$. $\frac{D}{4} = (1 - 2t)^2 - 9t$

уравнение имеет решение при $D \geq 0$, т.е. $(1 - 2t)^2 - 9t \geq 0$, $4t^2 - 13t + 1 \geq 0$.

$$4t^2 - 13t + 1 = 0, D = 169 - 16 = 153$$

$$t = \frac{13 \pm \sqrt{153}}{8} \Rightarrow D \geq 0 \text{ при } t \in \left(-\infty; \frac{13 - \sqrt{153}}{8}\right] \cup \left[\frac{13 + \sqrt{153}}{8}; +\infty\right).$$

$$\text{Итак, } E(y) = \left(-\infty; \frac{13 - \sqrt{153}}{8}\right] \cup \left[\frac{13 + \sqrt{153}}{8}; +\infty\right).$$

б) $y = \frac{4x^2 - 4}{3x - 1}$. Посмотрим, при каких t уравнение $\frac{4x^2 - 4}{3x - 1} = 6$ имеет

решение, $4x^2 - 4 = 3xt - t$, $4x^2 - x(1 - 3t) + t = 0$, $D = (1 - 3t)^2 - 16t = 1 - 6t + 9t^2 - 16t =$

$$= 9t^2 - 22t + 1. \text{ Уравнение имеет решение, если } D \geq 0, \text{ т.е. } 9t^2 - 22t + 1 \geq 0,$$

$$9t^2 - 22t + 1 = 0, D = 121 - 9 = 112 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{112}}{9}$$

$$\text{т.е. } t \in \left(-\infty; \frac{11 - \sqrt{112}}{9}\right] \cup \left[\frac{11 + \sqrt{112}}{9}; +\infty\right)$$

$$\text{Итак, } E(y) = \left(-\infty; \frac{11 - \sqrt{112}}{9}\right] \cup \left[\frac{11 + \sqrt{112}}{9}; +\infty\right).$$

7.3.D10

а) $y = \frac{4}{x}$, указанные точки находятся на прямых $y = 25x$ и $y = -25x$,

$$1) x^2 = \frac{4}{25} \Rightarrow x = \pm \frac{2}{5}; y = \pm 10$$

$$2) x^2 = -\frac{4}{25} - \text{решений нет.}$$

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{2}{5}; -10\right); \left(\frac{2}{5}; 10\right).$$

б) $y = \frac{9}{x}$, указанные точки лежат на прямых $y = 16x$ и $y = -16x$.

$$1) x^2 = \frac{9}{16}, y = \pm \frac{3}{4}, x = \pm 12,$$

$$x = -\frac{9}{16} - \text{решений нет.}$$

$$\text{Ответ: } \left(12; \frac{3}{4}\right); \left(-\frac{3}{4}; -12\right).$$

Глава 8. Текстовые задачи

§ 1. Задачи на движение и работу

Уровень А

8.1.A01

а) Скорость сближения автомобилей: $57+64 = 121$ (км/ч), т.е. они встретятся через $363:121 = 3$ (ч).

Ответ: 3 часа.

б) Скорость сближения велосипедистов: $15+12 = 27$ (км/ч), тогда они встретятся через $108:27 = 4$ (ч).

Ответ: 4 часа.

8.1.A02

а) Скорость сближения грузовика и автомобиля равна 23 км/ч, т.е. они встретятся через $92:23 = 4$ (ч)

Ответ: 4 часа.

б) Скорость сближения 17 км/ч, тогда автомобиль догонит грузовик через $102:17 = 6$ (ч)

Ответ: 6 часов.

8.1.A03

а) Средняя скорость $\frac{52+62}{2} = 57$ (км/ч).

Ответ: 57 км/ч.

б) Средняя скорость $\frac{48+68}{2} = 58$ (км/ч).

Ответ: 58 км/ч.

8.1.A04

а) Пусть S – половина пути, тогда время на первом участке $\frac{S}{42}$ (ч), на

втором $\frac{S}{63}$ ч. $v_{\text{ср}} = \frac{2S}{\frac{S}{42} + \frac{S}{63}} = \frac{2 \cdot 42 \cdot 63}{42 + 63} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 21 \cdot 3 \cdot 21}{21(2+3)} = \frac{252}{5}$ (км/ч)

Ответ: $50\frac{2}{5}$ км/ч.

б) Пусть S – половина пути, тогда время на первом участке $\frac{S}{46}$ (ч), на

втором $\frac{S}{69}$ ч. $v_{\text{ср}} = \frac{2S}{\frac{S}{46} + \frac{S}{69}} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 23 \cdot 3 \cdot 23}{23(2+3)} = \frac{276}{5}$ (км/ч)

Ответ: 55,2 км/ч.

8.1.A05

а) Пусть S – половина всего пути. Время движения на яхте – $\frac{S}{17}$ (ч) на самолете – $\frac{S}{561}$ (ч). $v_{\text{ср}} = \frac{2S}{\frac{S}{17} + \frac{S}{561}} = \frac{2 \cdot 17 \cdot 561}{17 + 561} = 33$ (км/ч)

Ответ: 33 км/ч.

б) Пусть S – половина пути. Время движения на яхте – $\frac{S}{18}$ (ч) на самолете – $\frac{S}{630}$ (ч). $v_{\text{ср}} = \frac{2S}{\frac{S}{18} + \frac{S}{630}} = \frac{2 \cdot 18 \cdot 630}{18 + 630} = 35$ (км/ч)

Ответ: 35 км/ч.

8.1.A06

а) Пусть v км/ч – скорость 1-го автомобиля, тогда $(v-18)$ км/ч – скорость 2-го. Тогда по условию: $\frac{v}{v-18} = \frac{9}{7} \Leftrightarrow 7v = 9v - 9 \cdot 18$

$\Rightarrow v = 81$ (км/ч).

Ответ: 81 км/ч, 63 км/ч.

б) Пусть v км/ч – скорость 1-го автомобиля, тогда $(v+22)$ км/ч – скорость 2-го. Тогда по условию: $\frac{v+22}{v} = \frac{7}{5} \Leftrightarrow 5v+110 = 7v$

$\Rightarrow v = 55$ (км/ч).

Ответ: 55 км/ч, 77 км/ч.

8.1.A07

а) Пусть x – объем заказа, тогда $\frac{x}{28}$ – производительность 1-го, $\frac{x}{21}$ – производительность 2-го мастера. Тогда оба они выполнят заказ за $\frac{x}{\frac{x}{28} + \frac{x}{21}} = \frac{21 \cdot 28}{21 + 28} = 12$ ч.

Ответ: 12 ч.

б) Пусть x – объем заказа, тогда производительность 1-го мастера $\frac{x}{9}$, а второго $\frac{x}{18}$ оба мастера выполнят заказ за $\frac{x}{\frac{x}{9} + \frac{x}{18}} = \frac{9 \cdot 18}{9 + 18} = 6$ ч.

Ответ: 6 ч.

8.1.A08

а) Первая труба пропустила на $820 - 790 = 30$ литров воды больше. Это она сделала за $30:3 = 10$ часов.

Ответ: 10 часов.

б) Первая труба пропустила на $790 - 750 = 40$ литров воды больше, это произошло за $40:4 = 10$ ч.

Ответ: 10 часов.

8.1.A09

а) Пусть тест содержит x вопросов, тогда по условию

$$\frac{x}{8} - \frac{x}{9} = \frac{10}{60}; \frac{x}{72} = \frac{1}{6} \Rightarrow x = 12$$

Ответ: 12 часов.

б) Пусть тест содержит x вопросов, тогда по условию

$$\frac{x}{10} - \frac{x}{12} = \frac{30}{60}; \frac{2x}{120} = \frac{1}{2}; x = 30$$

Ответ: 30 часов.

8.1.A10

а) Пусть x – объем заказа, тогда производительность рабочего $\frac{x}{8}$, за 2 часа

рабочий выполнит $\frac{x}{8} \cdot 2 = \frac{x}{4}$, тогда вдвоем они будут выполнять $\frac{3}{4}x$.

Тогда работа будет выполнена за $2 + \frac{\frac{3}{4}x}{\frac{x}{8} + \frac{x}{8}} = 2 + \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = 5$ (ч).

Ответ: 5 часов.

б) Пусть x – объем заказа, тогда производительность рабочего $\frac{x}{12}$, за 4

часа рабочий выполнит $\frac{x}{12} \cdot 4 = \frac{x}{3}$ и вдвоем они потом выполнят

$$x - \frac{x}{3} = \frac{2}{3}x.$$

Время работы: $4 + \frac{\frac{2}{3}x}{\frac{x}{12} + \frac{x}{12}} = 4 + \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{6}} = 8$ (ч).

Ответ: 8 часов

Уровень В

8.1.В01

а) В момент встречи оба человека пройдут расстояние $3,5 \text{ км} \cdot 2 = 7 \text{ км}$ вместе, т.к. их суммарная скорость $3,6 + 2,7 = 6,3 \text{ км/ч}$, то они встретятся через $7 \text{ км} : 6,3 \text{ км/ч} = \frac{70}{63} = \frac{10}{9} \text{ ч}$. За это время первый отойдет от точки отправления на $2,7 \text{ км/ч} \cdot \frac{10}{9} \text{ ч} = 3 \text{ км}$.

Ответ: 3 км.

б) К моменту встречи оба человека пройдут вместе $4 \text{ км} \cdot 2 = 8 \text{ км}$, за время $8 \text{ км} : (3,3 \text{ км/ч} + 5,5 \text{ км/ч}) = \frac{8}{8,8} = \frac{10}{11} \text{ ч}$. Тогда за это время 1-й отойдет от места отправления на $3,3 \text{ км/ч} \cdot \frac{10}{11} \text{ ч} = 3 \text{ км}$.

Ответ: 3 км.

8.1.В02

а) Пусть $x \text{ км/ч}$ – скорость лодки в стоячей воде, тогда по условию

$$\frac{8}{x-4} - \frac{8}{x+4} = \frac{1}{2}; \frac{8(x+4) - 8(x-4)}{x^2 - 16} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{64}{x^2 - 16} = \frac{1}{2}, x^2 = 144 \Rightarrow x = 12 \text{ (км/ч)}.$$

Ответ: 12 км/ч.

б) Пусть $x \text{ км/ч}$ – скорость лодки в неподвижной воде, тогда по условию

$$\frac{21}{x-2} - \frac{21}{x+2} = \frac{1}{3}; \frac{21(x+2) - 21(x-2)}{x^2 - 4} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{84}{x^2 - 4} = \frac{1}{3}, x^2 = 256 \Rightarrow x = 16 \text{ (км/ч)}.$$

Ответ: 16 км/ч.

8.1.В03

а) Пусть S – расстояние, пройденное теплоходом, тогда время, затраченное в одну сторону, т.е. 1-ю половину пути $\frac{S}{2(16+4)} = \frac{S}{40} \text{ ч}$, время,

затраченное на обратную дорогу $\frac{S}{2(16-4)} = \frac{S}{24}$. По условию

$$\frac{S}{40} + \frac{S}{24} + 2 = 10; S \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{24} \right) = 8 \cdot \frac{1}{8} S \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right) = 8, S \cdot \frac{8}{15} = 64 \Rightarrow S = 120.$$

Ответ: 120 км.

б) Пусть S – расстояние, пройденное теплоходом, тогда время, затраченное на 1-ю половину пути равно $\frac{S}{2(12+2)} = \frac{S}{28}$ ч, а на вторую

$$\frac{S}{2(12-2)} = \frac{S}{20} \text{ ч. По условию } \frac{S}{28} + \frac{S}{20} + 4 = 16; S \left(\frac{1}{28} + \frac{1}{20} \right) = 12.$$

$$\frac{48S}{560} = 12 \Rightarrow S = 140 \text{ км.}$$

Ответ: 140 км.

8.1.B04

а) Пусть x – скорость движения пешехода на спуске, тогда на подъеме $(x-1)$ км/ч. Время движения на спуске 4 ч, на подъеме 1 ч. По условию $4x + x - 1 = 19$, $5x = 20$, $x = 4$ (км/ч)

Ответ: 4 км/ч.

б) Пусть x км/ч – скорость движения пешехода на спуске, тогда на подъеме $(x-2)$ км/ч. Время движения на спуске 2 ч, на подъеме $6-2 = 4$ ч.

По условию $2x + 4(x-2) = 16$, $6x = 24$, $x = 4$ (км/ч)

Ответ: 4 км/ч.

8.1.B05

а) Скорость удаления автомобилей $92-68 = 24$ км/ч, тогда 1-й будет опережать второго на 80 км через $\frac{80 \text{ км}}{24 \text{ км/ч}} = \frac{10}{3}$ ч = 3 ч 20 мин.

Ответ: 3 ч 20 мин.

б) Скорость удаления автомобилей $81 \text{ км/ч} - 63 \text{ км/ч} = 18 \text{ км/ч}$, тогда 1-й будет опережать 2-го на 57 км через $57 \text{ км} : 18 \text{ км/ч} = \frac{19}{6}$ ч = 3 ч 10 мин.

Ответ: 3 ч 10 мин.

8.1.B06

а) Длина поезда $90 \text{ км/ч} \cdot \frac{36}{3600} \text{ ч} = \frac{9}{10} \text{ км.}$

Ответ: $\frac{9}{10}$ км.

б) Длина поезда $60 \text{ км/ч} \cdot \frac{24}{3600} \text{ ч} = 0,4 \text{ км.}$

Ответ: 0,4 км.

8.1.B07

а) Пусть x стр./день – планируемая скорость набора рукописи, тогда по условию

$$\frac{480}{x} - \frac{480}{x+8} = 2, \frac{480(x+8) - 480x}{x(x+8)} = 2, x^2 + 8x = 1920;$$

$$x^2 + 8x - 1920 = 0, \frac{D}{4} = 16 + 1920 = 44^2; x_{1,2} = -4 \pm 44 \Rightarrow x = 40.$$

Ответ: 40 страниц в день.

б) Пусть x стр./день – планируемая скорость набора рукописи прозаиком, тогда по условию

$$\frac{450}{x} - \frac{450}{x+5} = 3, \frac{450(x+5) - 450x}{x(x+5)} = 3, x^2 + 5x = 750;$$

$$x^2 + 5x - 750 = 0, D = 25 + 3000 = 55^2; x_{1,2} = \frac{-5 \pm 55}{2} \Rightarrow x = 25.$$

Ответ: 25 страниц в день.

8.1.В08

а) Скорость перекачки 1-го насоса $\frac{9}{4}$ л/мин, 2-го – $\frac{9}{7}$ л/мин.

Тогда 99 л воды они перекачают за $\frac{99}{\frac{9}{4} + \frac{9}{7}} = \frac{99 \cdot 4 \cdot 7}{9(7+4)} = 28$ мин.

Ответ: 28 мин.

б) Скорость перекачки 1-го насоса $\frac{5}{2}$ л/мин, а 2-го – $\frac{5}{3}$ л/мин.

Тогда 25 л воды они перекачают за $\frac{25}{\frac{5}{2} + \frac{5}{3}} = \frac{25 \cdot 2 \cdot 3}{5(2+3)} = 6$ мин.

Ответ: 6 мин.

8.1.В09

а) За 1 мин. Стас вскопает $\frac{1}{15}$ грядки, а оба $\frac{1}{10}$ грядки, тогда Саша вско-

пает $\frac{1}{10} - \frac{1}{15} = \frac{1}{30}$ грядки, т.е. Саша один вскопает грядку за 30 мин.

Ответ: 30 мин.

б) За 1 мин. Витя прополет $\frac{1}{20}$ грядки, а вместе они прополет $\frac{1}{12}$ гряд-

ки, т.е. Даша прополет $\frac{1}{12} - \frac{1}{20} = \frac{1}{30}$ грядки, т.е. всю грядку Даша одна прополет за 30 мин.

Ответ: 30 мин.

8.1.B10

а) За 1 мин. Карлсон съест $\frac{1}{10}$ банки варенья, Фрекен Бок $\frac{1}{12}$, а Малыш $\frac{1}{15}$, тогда вместе они съедят $\frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15} = \frac{11}{60} + \frac{1}{15} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}$ банки, т.е. всю банку они съедят за 4 мин.

Ответ: 4 мин.

б) За 1 мин. Винни-Пух съест $\frac{1}{6}$ горшочка меда, Пятачок $-\frac{1}{20}$, а ослик Иа $-\frac{1}{30}$, тогда вместе за 1 мин. они съедят $\frac{1}{6} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{10+3+2}{60} = \frac{1}{4}$ банки меда, т.е. всю банку они съедят в за 4 мин.

Ответ: 4 мин.

Уровень С

8.1.C01

а) За 36 мин. пешеход пройдет $5 \text{ км/ч} \cdot \frac{36}{60} \text{ ч} = 3 \text{ км}$, расстояние от него до В станет равно $27-3 = 24 \text{ км}$. Далее скорость сближения пешеходов будет равна $5 \text{ км/ч} + 3 \text{ км/ч} = 8 \text{ км/ч}$ и они встречаются через $\frac{24 \text{ км}}{8 \text{ км/ч}} = 3 \text{ ч}$, на расстоянии $3 \text{ ч} \cdot 3 \text{ км/ч} = 9 \text{ км}$ от В.

Ответ: 9 км.

б) За 15 мин. пешеход пройдет $4 \text{ км/ч} \cdot \frac{15}{60} \text{ ч} = 1 \text{ км}$, расстояние от него до В станет равно $11 \text{ км} - 1 \text{ км} = 10 \text{ км}$. Далее скорость сближения пешеходов будет равна $4 \text{ км/ч} + 6 \text{ км/ч} = 10 \text{ км/ч}$ и они встречаются через 1 час, на расстоянии $6 \text{ км/ч} \cdot 1 \text{ ч} = 6 \text{ км}$ от В.

Ответ: 6 км.

8.1.C02

а) Пусть $x \text{ км/ч}$ – скорость байдарки в стоячей воде, тогда скорость лодки в стоячей воде $x+5 \text{ км/ч}$. Пусть S – расстояние от А до В, тогда время пути моторной лодки $\frac{12S}{x+8} + \frac{1S}{3}$, а байдарки $\frac{S}{x+3}$, тогда т.к. в В они прибыли одновременно, то

$$\frac{12S}{13(x+8)} + \frac{S}{39} = \frac{S}{x+3}; \frac{36+(x+8)}{39(x+8)} = \frac{1}{x+3}; (x+3)(44+x) = 39(x+8);$$

$$x^2+47x+132 = 39x+312; x^2+8x-180 = 0, (x+18)(x-10) = 0; \Rightarrow x = 10$$

Ответ: 10 км/ч.

б) Пусть x км/ч – скорость байдарки в стоячей воде, тогда $x+7$ км/ч – скорость лодки в стоячей воде. Пусть S – расстояние от А до В, тогда

лодка была в пути: $\frac{\frac{8}{9}S}{x+9} + \frac{\frac{1}{9}S}{2}$, а байдарка $\frac{S}{x+2}$.

$$\text{Имеем, } \frac{\frac{8}{9}S}{x+9} + \frac{\frac{1}{9}S}{2} = \frac{S}{x+2}; \frac{8}{9(x+9)} + \frac{1}{18} = \frac{1}{x+2};$$

$$\frac{16+x+9}{18(x+9)} = \frac{1}{x+2}; (x+2)(x+25) = 18(x+9);$$

$$x^2+27x+50 = 18x+162, x^2+9x-112 = (x+16)(x-7) = 0 \Rightarrow x = 7$$

Ответ: 7 км/ч.

8.1.C03

а) Пусть x км/ч – скорость велосипедиста из А в В, т.к. время движения из А в В и из В в А одно и то же, то

$$\frac{88}{x} = 2 + \frac{88-2x}{x+2} + \frac{10}{60}; \frac{88}{x} = 2 - \frac{2(x+2)-92}{x+2} + \frac{1}{6}; \frac{88}{x} - \frac{92}{x+2} = \frac{1}{6};$$

$$6(88(x+2)-92x) = x(x+2); x^2+2x = 1056-24x;$$

$$x^2+26x-1056 = 0; (x+48)(x-22) = 0; \Rightarrow x = 22$$

Ответ: 22 км/ч.

б) Пусть x км/ч – скорость велосипедиста из А в В, т.к. время движения из А в В и из В в А одно и то же, то

$$\frac{32}{x} = 1 + \frac{32-x}{x+4} + \frac{12}{60}; \frac{32}{x} = \frac{36}{x+4} + \frac{1}{5}; 5(32(x+4)-36x) = x(x+4), x^2+4x = 640-20x;$$

$$x^2+24x-640 = 0; (x+40)(x-16) = 0; \Rightarrow x = 16$$

Ответ: 16 км/ч.

8.1.C04

а) Пусть x – скорость теплохода в стоячей воде, по условию

$$\frac{70}{x+2} + \frac{70}{x-2} = (23-7) - 4; \frac{70(x-2) + 70(x+2)}{x^2-4} = 12$$

$$70x = 6x^2-24; 6x^2-70x-24 = 0; 3x^2-35x-12 = 0; D = 35^2+3 \cdot 12 \cdot 4 = 37^2;$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{35 \pm 37}{6} \Rightarrow x = 12.$$

Ответ: 12 км/ч.

б) Пусть x – скорость теплохода в стоячей воде, по условию

$$\frac{45}{x+3} + \frac{45}{x-3} = (19-8) - 3; \frac{45(x-3) + 45(x+3)}{x^2-4} = 8;$$

$$\frac{2 \cdot 45x}{x^2 - 9} = 8 \Rightarrow 4x^2 - 45x - 36 = 0; D = 45^2 + 4 \cdot 36 \cdot 4 = 51^2, x_{1,2} = \frac{45 \pm 51}{8}; x = 12.$$

Ответ: 12 км/ч.

8.1.C05

а) Алексей будет в N-ске через $350 \text{ км} : 70 \text{ км/ч} = 5 \text{ ч}$, тогда время движения Ивана будет $5 \text{ ч} - \frac{1}{4} \text{ ч} = \frac{19}{4} \text{ ч}$, т.е. он должен двигаться со скоростью $399 \text{ км} : \frac{19}{4} \text{ ч} = 84 \text{ км/ч}$.

Ответ: 84 км/ч.

б) Володя будет в N-ске через $150 \text{ км} : 50 \text{ км/ч} = 3 \text{ ч}$, тогда время движения Сергея будет $3 \text{ ч} - \frac{1}{3} \text{ ч} = \frac{8}{3} \text{ ч}$, т.е. он должен двигаться со скоростью $192 \text{ км} : \frac{8}{3} \text{ ч} = 72 \text{ км/ч}$.

Ответ: 72 км/ч.

8.1.C06

а) Длина поезда и лесополосы $90 \text{ км/ч} \cdot \frac{0,4}{60} \text{ ч} = 0,6 \text{ км}$, тогда длина поезда $600 \text{ м} - 400 \text{ м} = 200 \text{ м}$.

Ответ: 200 метров.

б) Длина поезда и лесополосы $60 \text{ км/ч} \cdot \frac{0,5}{60} \text{ ч} = 0,5 \text{ км}$, тогда длина поезда $0,5 \text{ км} - 0,3 \text{ км} = 0,2 \text{ км}$.

Ответ: 200 метров.

8.1.C07

а) 12 часов.

б) 12 часов.

8.1.C08

а) Скорость движения реки $50 \text{ м/мин} = \frac{50 \cdot \frac{1}{1000}}{\frac{1}{60}} \text{ км/ч} = 3 \text{ км/ч}$. Время

движения плота $- 9 \text{ км} : 3 \text{ км/ч} = 3 \text{ ч}$. Время движения лодки $3 \text{ ч} - \frac{1}{2} \text{ ч} = 2,5$

ч. Пусть $x \text{ км/ч}$ скорость движения лодки в стоячей воде, тогда имеем:

$$\frac{18}{x+3} + \frac{18}{x-3} = \frac{5}{2}; \frac{18(x-3) + 18(x+3)}{x^2 - 9} = \frac{5}{2}; \Rightarrow 72x = 5x^2 - 45, 5x^2 - 72x - 45 = 0;$$

$$\frac{D}{4} = 392 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{36 \pm 39}{5} \Rightarrow x = 25$$

Ответ: 25 км/ч.

б) Скорость течения реки 50 м/мин = 3 км/ч. Время движения плота $\frac{7}{3}$ ч.

$$\text{Время движения лодки } \frac{7}{3} - \frac{44}{60} = \frac{7}{3} - \frac{22}{30} = \frac{48}{30} = \frac{8}{5} \text{ ч.}$$

$$35x = 2x^2 - 18; 2x^2 - 35x - 18 = 0, D = 35^2 + 144 = 37^2; x_{1,2} = \frac{35 \pm 37}{4}; x = 18.$$

Ответ: 18 км/ч.

8.1.C09

а) За 1 час Игорь и Паша покрасят $-\frac{1}{3}$ забора, Паша и Володя покрасят

$-\frac{1}{6}$ забора, Володя и Игорь покрасят $-\frac{1}{4}$ забора. Тогда за 1 час Игорь,

Паша и Володя покрасят $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \right) = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$ забора, т.е. весь забор

они покрасят за $\frac{8}{3}$ ч.

Ответ: 2 часа 40 минут.

б) За 1 мин. Маша и Настя вымоют $-\frac{1}{20}$ окна, Настя и Лена вымоют $-\frac{1}{15}$ окна, Маша и Лена вымоют $-\frac{1}{12}$ окна. Тогда за 1 минуту Маша,

Настя и Лена вымоют $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{15} + \frac{1}{12} \right) = \frac{12}{120} = \frac{1}{10}$ окна. Т.е. окно они

втроем вымоют за 10 минут.

Ответ: 10 минут.

8.1.C10

а) Пусть в новом составе рабочие работали x дней. Т.к. в итоге 20 рабочих построили 2 дома за $x+8$ дней, то за день 1 рабочий строит

$$\frac{2}{20(x+8)} = \frac{1}{10(x+8)} \text{ дома. По условию: } 1 - 7 \cdot \frac{8}{10(x+8)} - \text{осталось до-}$$

строить 14 рабочим. $1 - 13 \cdot \frac{8}{10(x+8)} - \text{осталось достроить 6 рабочим.}$

Т.к. они закончили одновременно, то

$$1 - \frac{56}{10(x+8)} = \frac{14}{6}; \frac{5x+40-28}{5x+40-52} = \frac{7}{3}; 3(5x+12) = 7(5x-12); 20x = 120 \Rightarrow x = 6.$$
$$1 - \frac{104}{10(x+8)}$$

Ответ: 6 дней.

б) Пусть x дней рабочие работали в новом составе, т.к. в итоге 22 рабочих построили 2 домика за $x+7$ дней, то за 1 день рабочий строит

$$\frac{2}{22(x+7)} = \frac{1}{11(x+7)} \text{ домика. По условию } 1 - 7 \frac{8}{11(x+7)} - \text{осталось строить } 18 \text{ рабочим.}$$
$$1 - 7 \frac{14}{11(x+7)} - \text{осталось строить } 4 \text{ рабочим, т.к. они}$$

закончили одновременно, то

$$1 - 7 \frac{8}{11(x+7)} = \frac{18}{4}; \frac{11x+77-56}{11x+77-98} = \frac{9}{2}; 2(11x+21) = 9(11x-21), 77x = 231, x = 3.$$
$$1 - \frac{7 \cdot 14}{11(x+7)}$$

Ответ: 3 дня.

Уровень D

8.1.D01

а) Пусть x км/ч – скорость 1-го бегуна, тогда $x+2$ км/ч – скорость 2-го.

За 5 мин. 1-й пробежал $\frac{x+12}{12}$ км, т.е. за 1 час разрыв между бегунами

составит $1 + \frac{x+2}{12}$ км. Т.к. скорость удаления 2-го бегуна от 1-го 2 км/ч,

$$\text{то } 1 + \frac{x+2}{12} = 2 \Rightarrow x+2 = 12 \Rightarrow x = 10.$$

Ответ: 10 км/ч, 12 км/ч.

б) Пусть x км/ч – скорость 1-го бегуна, тогда $x+3$ км/ч – скорость 2-го.

За 5 мин. 2-й пробежал $\frac{x+3}{12}$ км, т.е. за 1 час разрыв между бегунами

будет $1,5 + \frac{x+3}{12}$ км. Т.к. скорость удаления 2-го бегуна от 1-го 3 км/ч,

$$\text{то } \frac{3}{2} + \frac{x+3}{12} = 3; \frac{x+3}{12} = \frac{3}{2}; x+3 = 18 \Rightarrow x = 15$$

Ответ: 15 км/ч, 18 км/ч.

8.1.D02

а) Пусть x – скорость велосипедиста (км/ч).

S – расстояние (км).

По условию

$$\begin{cases} \frac{S}{x+5} + \frac{1}{5} = \frac{S}{x-8} - \frac{2}{3} \\ \frac{S}{x-8} - \frac{2}{3} = \frac{S}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{13S}{(x+5)(x-8)} = \frac{13}{15} \\ \frac{8S}{x(x-8)} = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = \frac{(x+5)(x-8)}{15} \\ S = \frac{x(x-8)}{12} \end{cases};$$

$$\Rightarrow \frac{x+5}{15} = \frac{x}{12} \Rightarrow x = 20, S = 20$$

Ответ: 20 км/ч, 20 км.

б) Пусть x – скорость велосипедиста (км/ч).

S – расстояние (км).

По условию

$$\begin{cases} \frac{S}{x+9} + \frac{9}{20} = \frac{S}{x} \\ \frac{S}{x-5} - \frac{29}{60} = \frac{S}{x+9} + \frac{27}{60} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9S}{(x+9)x} = \frac{9}{20} \\ \frac{14S}{(x-5)(x+9)} = \frac{56}{60} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = \frac{(x+9)x}{20} \\ S = \frac{(x-5)(x+9)}{15} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{20} = \frac{x-5}{15}; x = 20, S = 29;$$

Ответ: 20 км/ч, 29 км.

8.1.D03

а) Т.к. в момент второй встречи оба автомобиля были на расстоянии 48 км от В, то пока 1-й автомобиль проехал 48 км, 2-й проехал $120 - 48 = 72$ (км).

Тогда скорость 2-го в $\frac{72}{48} = \frac{3}{2}$ раза больше 1-го. т.е. $80 \text{ км/ч} \cdot \frac{3}{2} = 120 \text{ км/ч}$.

Время движения 1-го автомобиля $\frac{480 \text{ км}}{80 \text{ км/ч}} = 6 \text{ ч}$. Время движения 2-го автомобиля $(480 \text{ км} + 120 \text{ км}) : 120 \text{ км/ч} = 5 \text{ ч}$.

Значит, он выехал через $6 \text{ ч} - 5 \text{ ч} - \frac{1}{3} \text{ ч} = \frac{2}{3} \text{ ч}$. после выезда 1-го, т.к. до

1-го момента встречная скорость сближения была $120 \text{ км/ч} - 80 \text{ км/ч} = 40 \text{ км/ч}$, то 2-й догнал 1-го на расстоянии $40 \text{ км/ч} \cdot \frac{2}{3} \text{ ч} = \frac{80}{3} \text{ км}$ от А.

Ответ: $\frac{80}{3} \text{ км}$.

б) Пусть t – версия задержки 2-го автомобиля, тогда т.к. второй автомобиль был в пути $(600 \text{ км} + 200 \text{ км}) : 100 \text{ км/ч} \neq 1 \text{ ч} = 9 \text{ ч}$, то первый – $9+t$ ч.

Тогда скорость 1-го автомобиля $\frac{600}{9+t}$ ч.

Скорость сближения 1-го и 2-го к моменту 1-ой встречи

$100 - \frac{600}{9+t}$ км/ч, тогда имеем

$$\frac{150}{100 - \frac{600}{9+t}} = t; 150 = 100 \left(\frac{3+t}{9+t} \right) t; 3(9+t) = 2(3+t)t; 27+9t = 6t+2t^2;$$

$2t^2 - 3t - 27 = 0, (t-3)(2t+9) = 0 \Rightarrow t = 3$, тогда скорость 1-го – $\frac{600}{9+3} = 50 \text{ км/ч}$.

S – расстояние от В до места второй встречи автомобилей, тогда

$$\frac{200-S}{S} = \frac{100}{50} \Rightarrow 200 = 3S \Rightarrow S = \frac{200}{3} \text{ км.}$$

Ответ: $\frac{200}{3}$ км.

8.1.D04

а) Пусть x – длина подъемов из А в В (км).

y – длина спусков из А в В (км)

$x+y$ – длина спусков и подъемов.

Тогда имеем

$$\begin{cases} \frac{x}{8} + \frac{y}{16} + \frac{20}{10} = 6 \\ \frac{x}{16} + \frac{y}{8} + \frac{20}{10} = \frac{11}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 64 \\ x + 2y = 56 \end{cases} \Rightarrow x + y = \frac{64 + 56}{3} \Rightarrow x + y = 40 \text{ (км)}$$

Ответ: 40 км.

б) Пусть x – длина подъемов из А в В.

y – длина спусков из А в В.

$x+y$ – общая длина спусков и подъемов.

Тогда имеем:

$$\begin{cases} \frac{x}{6} + \frac{y}{18} + \frac{30}{15} = 6 \\ \frac{x}{18} + \frac{y}{6} + \frac{30}{15} = \frac{34}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 72 \\ x + 3y = 168 \end{cases} \Rightarrow x + y = \frac{72 + 168}{4} \Rightarrow x + y = 60 \text{ (км)}$$

Ответ: 60 км.

8.1.D05

а) Пусть x – скорость мальчика, y – скорость эскалатора, тогда имеем

$$\frac{x+y}{x-y} = 3; x+y = 3x-3y; x = 2y$$

Т.е. скорость мальчика в 2 раза больше скорости эскалатора, тогда по неподвижному эскалатору он будет идти в $\frac{x}{x-y} = \frac{2y}{2y-y} = 2$ раза быстрее, чем вверх, т.е. он насчитает $60:2 = 30$ ступенек.

Ответ: 30 ступенек.

б) Пусть x – скорость мальчика, y – скорость эскалатора, тогда имеем

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{70}{30} \Rightarrow 3x+3y = 7x-7y; 4x = 10y; x = \frac{5}{2}y.$$

Тогда по неподвижному эскалатору мальчик будет спускаться в $\frac{x}{x-y} = \frac{\frac{5}{2}y}{\frac{5}{2}y-y} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{5}{3}$ раз бы-

стрее, чем вверх, т.е. он насчитает $\frac{70}{\frac{5}{3}} = 42$ ступеньки.

Ответ: 42 ступеньки.

8.1.D06

а) Т.к. к моменту 1-й встречи бегун стартовавший из В пробегает 50 метров, а они вместе пробежали половину круга, то к моменту второй встречи он пробежит еще $50 \cdot 2 = 100$ метров, т.к. оба они пробегут 1 круг. Если бегун, стартовавший из В пробежал половину круга к моменту второй встречи, то полкруга составляет $(150-42) \text{ м} = 108 \text{ м}$, тогда весь круг – 216 м. Если нет, то половина круга – $150+42 = 192 \text{ м}$ и весь круг – $192 \cdot 2 = 384 \text{ м}$.

Или к моменту второй встречи бегун, стартовавший из В может пробежать больше 1-го круга, тогда 192 м – это $\frac{3}{2}$ круга и весь круг – 128 м.

Ответ: 128 м, или 216 м, или 384 м.

б) Аналогично с предыдущей задачей в зависимости от скорости бегунов существует 3 возможности места их второй встречи ?

1) Половина круга $70 \cdot 3 + 48 = 258 \Rightarrow$ весь круг 516 м.

2) Половина круга $70 \cdot 3 - 48 = 162 \Rightarrow$ весь круг 324 м.

3) $\frac{3}{2}$ круга $70 \cdot 3 + 48 = 258 \Rightarrow$ весь круг 172 м.

Ответ: 516 м, или 324 м, или 172 м.

8.1.D07

а) Пусть x л/мин – скорость 1-го насоса, y л/мин – скорость 2-го насоса. Тогда имеем

$$\begin{cases} 432 = 6x + 24y \\ \frac{432}{y} - \frac{432}{x} = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4y = 72 \\ 24\left(\frac{x-y}{xy}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4(18-y) \\ 24(72-5y) = y \cdot 4(18-y) \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4(18-y) \\ 432 - 30y = 18y - y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4(18-y) \\ y^2 - 48y + 432 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4(18-y) \\ (y-12)(y-36) = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow x = 24, y = 12$$

Оба насоса закачали бы резервуар за $\frac{432}{24+12} = 12$ минут. За это время первый накачал бы $12 \cdot 24 = 288$ л.

Ответ: 24 л/мин, 12 л/мин, 288 л.

б) Пусть x л/мин – скорость 1-го насоса, y л/мин – скорость 2-го насоса. Тогда имеем

$$\begin{cases} 7x + 28y = 504 \\ \frac{504}{y} - \frac{504}{x} = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4y = 72 \\ 24\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) = 1 \end{cases} \Rightarrow (\text{из предыдущего пункта}) x = 24, y = 12.$$

Оба насоса закачали бы резервуар за $\frac{504}{24+12} = 14$ минут. За это время 1-й закачал бы $14 \cdot 24 = 336$ литров.

Ответ: 24 л/мин, 12 л/мин, 336 л.

8.1.D08

а) Пусть первый вспахивает 2-е поле за t часов, тогда 1-й вспахивает 1-е поле за $(t+5)$ часов, 2-й вспахивает 1-е поле за $t-2$ часа, за 1 час 1-й вспашет $\frac{1}{t+5}$ часть первого поля, а второй – $\frac{1}{t-2}$, 1-го поля вместе они

вспахают $\frac{1}{t+5} + \frac{1}{t-2} = \frac{2t+3}{(t-2)(t+5)}$ – часть поля. Все поле они вспашут за

$$\frac{(t-2)(t+5)}{2t+3} \text{ часа. Имеем } \frac{(t-2)(t+5)}{2t+3} = t-11; t^2 + 3t - 10 = 2t^2 - 19t - 33 \\ \Rightarrow t^2 - 22t - 23 = 0 \Rightarrow (t-23)(t+1) = 0 \Rightarrow t = 23.$$

Ответ: 23 часа.

б) Пусть t часов 3-й трактор вспахивает второе поле, тогда $(t+4)$ часа 1-й трактор вспахивает 1-е поле, $(t-3)$ часа 2-й вспахивает 1-е поле, за 1

час 1-й вспахивает $\frac{1}{t+4}$ часть 1-го поля, а второй $\frac{1}{t-3}$ часть 1-го поля. Тогда вместе они вспашут за час $\frac{1}{t-3} + \frac{1}{t+4} = \frac{2t+1}{(t-3)(t+4)}$ поля, все поле они вспашут за $\frac{(t-3)(t+4)}{2t+1}$ часов, имеем:

$$\frac{(t-3)(t+4)}{2t+1} = t-12; t^2+t-12 = 2t^2-23t-12; t^2-24t = 0 \Rightarrow t = 24.$$

Ответ: 24 часа.

8.1.D09

а) Пусть x – скорость роста травы в день, y – скорость съедания травы одной коровой в день.

Тогда $(70y-x) \cdot 24 = (30y-x) \cdot 60 \Rightarrow 140y-2x = 150y-5x, 3x = 10y, y = 0,3x$.

Тогда скорость уменьшения травы в день, когда едят 20 коров в

$$\frac{70y-x}{20y-x} = \frac{20x}{5x} = 4 \text{ раза медленнее, чем когда едят 70 коров, значит 20}$$

коров съедят траву за $24 \cdot 4 = 96$ дней.

Ответ: 96 дней.

б) Пусть x – скорость роста травы в день, y – скорость съедания травы одной коровой в день.

Тогда $(50y-x) \cdot 36 = (80y-x) \cdot 20; 450y-9x = 400y-5x \Rightarrow 4x = 50y \Rightarrow 2x = 25y;$

$$y = \frac{2}{25}x; x = \frac{25}{2}y.$$

Тогда скорость уменьшения травы в день, когда едят a коров в 5 раз меньше, чем когда едят 80 коров.

$$\frac{80y-x}{ay-x} = 5; \frac{\frac{11}{5}}{\frac{2a}{25}-1} = 5; \frac{11}{5} = \frac{2}{5}a-5; \frac{36}{5} = \frac{2}{5}a \Rightarrow a = 18$$

Ответ: 18 коров.

8.1.D10

а) Пусть за x часов выполнил бы 2-й мастер работу, тогда 1-й – за $(x+t)$ часов, а 3-й – за $(x-t)$ часов.

Тогда первый и второй сделали бы за 1 час $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+t}$ работы. А первый

и третий $\frac{1}{x+t} + \frac{1}{x-t}$ работы.

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{x+t} = \frac{1}{216} \\ \frac{1}{x-t} + \frac{1}{x+t} = \frac{1}{135} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{x+t} = \frac{1}{216} \\ \frac{1}{x-t} - \frac{1}{x} = \frac{1}{135} - \frac{1}{216} = \frac{1}{360} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{x+t} = \frac{1}{216} \\ \frac{t}{x(x-t)} = \frac{1}{360} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{x+t} = \frac{1}{216} \\ 360t = x^2 - xt \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{x^2}{360+x} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{x\left(1 + \frac{x}{360+x}\right)} = \frac{1}{216} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{x^2}{360+x} \\ \frac{360+2x+360+x}{x(360+2x)} = \frac{1}{216} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 216 \cdot (720+3x) = 2x^2+360x, x^2-144-77760 = 0$$

$$(x-360)(x+216) = 0 \Rightarrow x = 360$$

Ответ: 360 дней.

б) Пусть за x часов выполнит 2-й мастер. Тогда 1-й – за $x+t$ за $(x-t)$ часов. По условию имеем

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{x+t} = \frac{1}{384} \\ \frac{1}{x-t} + \frac{1}{x+t} = \frac{1}{240} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{x+t} = \frac{1}{384} \\ \frac{1}{x-t} - \frac{1}{x} = \frac{1}{240} - \frac{1}{384} = \frac{1}{640} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{x+t} = \frac{1}{384} \\ \frac{t}{x^2-xt} = \frac{1}{640} \end{cases} \Rightarrow t = \frac{x^2}{640+x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x\left(1 + \frac{x}{640+x}\right)} = \frac{1}{384}; \frac{640+2x+640+x}{x(640+2x)} = \frac{1}{384}$$

$$\frac{1280+3x}{x(320+x)} = \frac{1}{192}; 245760+576x = x^2+320x$$

$$\Rightarrow x^2-256x-245760 = 0$$

$$(x-640)(x+384) = 0 \Rightarrow x = 640.$$

Ответ: 640 дней.

§ 2. Задачи на проценты, части, доли

Уровень А.

8.2.A01

$$\text{а) } \begin{array}{cc} x & -100\% \\ 372 & -124\% \end{array} \Rightarrow x = \frac{372 \cdot 100}{124} = 300 \text{ рублей.}$$

$$\text{б) } \begin{array}{cc} 249 & -83\% \\ x & -100\% \end{array} \Rightarrow x = \frac{249 \cdot 100}{83} = 300 \text{ рублей.}$$

8.2.A02

$$\text{а) } \begin{array}{cc} 1470 & -98\% \\ x & -100\% \end{array} \Rightarrow x = \frac{100 \cdot 1470}{98} = 1500 \text{ рублей.}$$

$$\text{б) } \begin{array}{cc} 1940 & -97\% \\ x & -100\% \end{array} \Rightarrow x = \frac{100 \cdot 1940}{97} = 2000 \text{ рублей.}$$

8.2.A03

$$\text{а) } \begin{array}{cc} 300 & -100\% \\ 273 & -x\% \end{array} \Rightarrow x = \frac{273}{300} \cdot 100\% = 91\%$$

Цена товара была снижена на 9 %.

$$\text{б) } \begin{array}{cc} 400 & -100\% \\ 352 & -x\% \end{array} \Rightarrow x = \frac{352}{400} \cdot 100\% = 88\%$$

Цена товара была снижена на 12 %.

8.2.A04

а) Цена товара повысилась на $678 - 600 = 78$ руб., что составляет

$$\frac{78}{600} \cdot 100\% = 13\%.$$

б) Цена товара повысилась на $545 - 500 = 45$ руб., что составляет

$$\frac{45}{500} \cdot 100\% = 9\%.$$

8.2.A05

а) Если акция стоила x руб., то она стала стоить $x - 0,6x = 0,4x$, т.е. акции подешевели в $\frac{x}{0,4x} = 2,5$ раза.

б) Если акция стоила x руб., то она стала стоить $x - 0,84x = 0,16x$, т.е. акции подешевели в $\frac{x}{0,16x} = 6,25$ раз.

8.2.A06

а) Если акция стоила x руб., то она стала стоить $x + 1,17x = 2,17x$, т.е. акция подорожала в 2,17 раз.

б) Если акция стоила x руб., то она стала стоить $x+1,52x = 2,52x$, т.е. акция подорожала в 2,52 раза.

8.2.A07

а) Если производили x товара, то стали производить $37x$, что составляет 3700% от предыдущего производства, т.е. стали производить на 3600% товара больше.

б) Стали производить 9600% от предыдущего производства, т.е. производство товара возросло на 9500%.

8.2.A08

а) Стоимость изделия составляет $\frac{1}{8} = 12,5\%$ от предыдущей, т.е. себестоимость снизилась на 87,5 %.

б) Себестоимость изделия составляет $\frac{1}{16} = 6,25\%$ от предыдущей, т.е. себестоимость снизилась на 93,75 %.

8.2.A09

а) $\frac{13 \cdot 0,18}{13 + 5} = 0,13$ т.е. 13 %.

б) $\frac{11 \cdot 0,17}{11 + 6} = 0,11$ т.е. 11 %.

8.2.A10

а) Пусть смешали по x раствора $\Rightarrow$ концентрация получившегося $\frac{0,11x + 0,19x}{2x} \cdot 100\% = 15\%$.

б) Пусть смешали по x раствора $\Rightarrow$ концентрация получившегося $\frac{0,14x + 0,18x}{2x} \cdot 100\% = 16\%$.

Уровень В

8.2.B01

а) В августе завод стал выпускать $400 - 0,1 \cdot 400 = 360$ приборов, а в сентябре $360 - 0,1 \cdot 360 = 324$ прибора.

Ответ: 324 прибора.

б) В апреле на фабрике изготовили $500 + 0,2 \cdot 500 = 600$ ковров, а в мае $600 + 0,2 \cdot 600 = 720$ ковров.

Ответ: 720 ковров.

8.2.B02

а) Цена товара в марте $30000 + 30000 \cdot 0,04 = 31200$ рублей, а в июле $31200 - 31200 \cdot 0,04 = 29952$ руб.

Ответ: 29952 руб.

б) Цена товара в мае $20000+20000 \cdot 0,06 = 21200$ рублей, а в августе $21200-21200 \cdot 0,06 = 19928$ руб.

Ответ: 19928 руб.

8.2.В03

а) За 1 день куры съедают $\frac{8}{20} = 0,4$ тонн корма, а утки $\frac{8}{60} = \frac{2}{15}$ тонн корма. Тогда вместе 8 тонн утки и куры съедят $\frac{8}{\frac{2}{5} + \frac{2}{15}} = \frac{8 \cdot 5 \cdot 15}{2(15+5)} = 15$ дней.

Ответ: 15 дней.

б) За 1 день куры съедают $\frac{5}{30} = \frac{1}{6}$ тонн корма, а утки $\frac{5}{150} = \frac{1}{30}$ тонн корма, тогда вместе они 5 тонн съедят $\frac{5}{\frac{1}{30} + \frac{1}{30}} = 25$ дней.

Ответ: 25 дней.

8.2.В04

а) Пусть x , y – зарплата жены и мужа соответственно, тогда $2x+y = 1,45(x+y)$, $0,55x = 0,45y$, $x = \frac{9}{11}y \Rightarrow x+y = \frac{20}{11}y$ – доход семьи.

$$\Rightarrow x+y = \frac{31}{11}y = \frac{31}{20} \cdot \left(\frac{20}{11}y\right) = \left(1 + \frac{11}{20}\right) \left(\frac{20}{11}y\right) = \left(1 + \frac{55}{100}\right) \left(\frac{20}{11}y\right),$$

т.е. доход семьи возрастает на 55 %.

Ответ: 55 %.

б) Если бы еще зарплата жены увеличилась в 2 раза, то доход семьи возрастет на 100 %, т.е. зарплата жены составляет 40 % зарплате семьи.

Ответ: 40 %.

8.2.В05

а) $\frac{7 \cdot 0,16 + 3 \cdot 0,06}{7+3} \cdot 100 \% = 13 \%$

Ответ: 13 %.

б) $\frac{8 \cdot 0,09 + 2 \cdot 0,04}{8+2} \cdot 100 \% = 8 \%$

Ответ: 8 %.

8.2.В06

а) Через год в квартале стало жить $5000+5000 \cdot 0,2 = 6000$ человек. А еще через год $6000+6000 \cdot 0,3 = 7800$ человек.

Ответ: 7800 человек.

б) Через год в квартале стало жить $3000+3000 \cdot 0,1 = 3300$ человек. А еще через год $3300+3300 \cdot 0,2 = 3960$ человек.

Ответ: 3960 человек.

8.2.B07

а) Пусть x особей было в первом заповеднике, тогда $(210-x)$ – во втором. По условию:

$$1,1x + 1,3(210-x) = 251; 22 = 0,2x \Rightarrow x = 110.$$

Ответ: 110, 100 особей.

б) Пусть x особей было в первом заповеднике, тогда $(230-x)$ в другом. По условию:

$$1,1x + 1,2(230-x) = 263; 13 = 0,1x \Rightarrow x = 130.$$

Ответ: 130, 100 особей.

8.2.B08

а) Пусть x – сумма вклада, тогда в мае стало $1,1x$, а в июне $1,1x - 0,1 \cdot 1,1x = 0,99x$; $0,99x = 10890$, $x = 11000$.

Ответ: 11000 рублей.

б) Пусть x – сумма вклада, тогда в марте стало $1,2x$, а в мае $1,2x - 0,2 \cdot 1,2x = 0,96x$; $0,96x = 6720$, $x = 7000$

Ответ: 7000 рублей.

8.2.B09

а) Настя получит $\frac{4,1}{20} \cdot 2000 = 410$ рублей. Лена – 180 рублей. Витя – 220 рублей. А маша $2000 - 410 - 180 - 220 = 1190$ рублей (т.к. размер выигрыша в 100 раз больше цены билета).

Ответ: 1190 рублей.

б) Паша внес $10 - 2,1 - 1,1 - 3,1 = 3,7$ рублей. Т.к. размер выигрыша в 50 раз больше цены билета, то Паша получит $3,7 \cdot 50 = 185$ рублей.

Ответ: 185 рублей.

8.2.B10

а) Сколько синих шаров в красной коробке, столько же красных шаров будет в синей коробке.

б) Сколько желтых шаров в зеленой коробке, столько же зеленых шаров будет и в желтой коробке.

Уровень С

8.2.C01

а) Зарплата матери составляет 30 % дохода семьи, стипендия сына составляет $\frac{6\%}{2} = 3\%$ дохода семьи, зарплата отца составляет $100 - 30 - 3 =$

67 % дохода семьи.

Ответ: 67 %.

б) Стипендия дочери составляет 8 % дохода семьи, зарплата отца составляет $120\% : 2 = 60\%$ от дохода семьи, тогда зарплата матери составляет $100\% - 60\% - 8\% = 32\%$ дохода семьи.

Ответ: 32 %.

8.2.C02

а) В первой смеси находится $\frac{102}{5+1} = 17$ кг вещества В. В 176 кг второй

смеси находится $2 \cdot \frac{176}{2+9} = 32$ кг вещества В $\Rightarrow$ в общей смеси находится

$32+17 = 49$ кг вещества В и $176+102-49 = 229$ кг вещества А.

б) В первой смеси содержится $5 \cdot \frac{147}{5+7} = 105$ кг вещества В, в 64 кг

второй смеси находится $\frac{64}{4} \cdot 3 = 48$ кг вещества В $\Rightarrow$ в общей смеси на-

ходится $48+105 = 153$ кг вещества В и $147+64-153 = 58$ кг вещества А.

8.2.C03

а) В первой смеси $29 \cdot 0,53 = 15,37$ кг вещества В, во второй смеси $28 \cdot 0,92 = 25,76$ кг вещества В $\Rightarrow$ в общей смеси $15,37+25,76 = 41,13$ кг вещества В и $28+29-41,13 = 15,87$ кг вещества А.

б) В первой смеси $48 \cdot 0,88 = 42,24$ кг вещества В, во второй смеси $22 \cdot 0,21 = 4,62$ кг вещества В $\Rightarrow$ в общей смеси $42,24+4,62 = 46,86$ кг вещества В и $22+48-46,86 = 23,14$ кг вещества А.

8.2.C04

а) Пусть x, y кг кислоты в каждом из сосудов. Тогда по условию

$$\begin{cases} \frac{x+y}{65} = 0,46 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{x}{30} + \frac{y}{35} \right) = 0,47 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 29,9 \\ 7x+6y = 197,4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 18 \\ y = 11,9 \end{cases}$$

Ответ: 18 кг и 11,9 кг.

б) Пусть x, y кг кислоты в каждом из сосудов. Тогда по условию

$$\begin{cases} \frac{x+y}{22} = 0,36 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{x}{10} + \frac{y}{12} \right) = 0,39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 7,92 \\ 6x+5y = 46,8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7,2 \\ y = 0,72 \end{cases}$$

Ответ: 7,2 кг и 0,72 кг.

8.2.C05

а) В 1 кг изюма 95 % сухого вещества, т.е. 950 г, а в свежем 20 %, т.е. для 1 кг изюма надо $950 \text{ г} \cdot 5 = 4,75$ кг свежего винограда.

Ответ: 4,75 кг.

б) В 1 кг изюма 94 % сухого вещества, т.е. $0,94 \cdot 4 = 3,76$ кг, в свежем винограде 25 % сухого вещества, тогда, чтобы получить 4 кг изюма потребуется $4 \cdot 3,76 = 15,04$ кг свежего винограда.

Ответ: 15,04 кг.

8.2.C06

а) Пусть $\frac{x \text{ л}}{100 \text{ км}}$ – расход бензина в городе, тогда по шоссе $(x-2)$ литра

на 100 км. По условию

$$\frac{120}{100}x + \frac{110}{100}(x-2) = 30; 1,2x + 1,1x - 2,2 = 30 \Rightarrow x = 14$$

Ответ: 14 литров на 100 км.

б) Пусть x литров на 100 км – расход бензина в городе, тогда по шоссе $(x-5)$ литров на 100 км. По условию

$$1,2x + 1,9(x-5) = 37; 3,1x = 46,5 \Rightarrow x = 15$$

Ответ: 15 литров на 100 км.

8.2.C07

а) Сколько молока в кофе, столько же и кофе в молоке.

б) Сколько молока в кофе, столько и кофе в молоке.

8.2.C08

а) Себестоимость исправного процессора будет равна $\frac{68 \cdot 100}{2} = 3400$

евроцентов, или 34 евро. Чтобы компания получила 25 % прибыли, це-

на процессора должна быть равна $34 \cdot \frac{5}{4} = 42,5$ евро.

Ответ: 42,5 евро.

б) Себестоимость исправного процессора будет $\frac{75 \cdot 100}{5} = 1500$ евро-

центов = 15 евро. Чтобы компания получила 10 % прибыли от его про-

дажи, его цена должна составить $15 + 2,1 \cdot 15 = 16,5$ евро.

Ответ: 16,5 евро.

8.2.C09

а) Сумма, облагаемая налогом была равна $\frac{6300}{21} \cdot 100 = 30000$, в этом го-

ду сумма будет равна $30000 \cdot 1,3 = 39000$. Предприятие заплатит налог $39000 \cdot 0,04 = 1560$ рублей.

Ответ: 1560 рублей.

б) Сумма, облагаемая налогом была равна $\frac{5400}{18} \cdot 100 = 30000$, в этом

году сумма будет равна $30000 \cdot 1,4 = 42000$. Предприятие заплатит налог $42000 \cdot 0,05 = 2100$ рублей.

Ответ: 2100 рублей.

8.2.C10

а) Борис внес $20 - 0,24 \cdot 20 - 3,7 - 0,21 \cdot 20 = 7,3$ рубля, т.к. выигрыш превзошел цену билета в 50 раз, то Борис получит 365 рублей.

Ответ: 365 рублей.

б) Иван внес $20 - 0,28 \cdot 20 - 4,9 - 0,07 \cdot 20 = 8,1$ рубля, т.к. размер выигрыша в 100 раз больше цены билета, то Ивану причитается 810 рублей.

Ответ: 810 рублей.

Уровень D

8.2.D01

а) Выручка отдела гастрономии составляет $34\% \cdot 2 = 68\%$. Тогда выручка отдела бакалеи 32% , если выручка бакалеи увеличится в 3 раза, т.е. возрастет на 2 суммы выручки бакалеи, то дневная выручка магазина увеличится на $32 \cdot 2 = 64\%$.

Ответ: 64 %.

б) Дневная выручка отдела трикотажа составляет $76\% : 2 = 38\%$, тогда выручка отдела обуви составляет $100\% - 38\% = 62\%$ от выручки магазина, значит если выручка отдела обуви сократится вдвое, то выручка магазина уменьшится на $62\% : 2 = 31\%$.

Ответ: 31 %.

8.2.D02

а) Пусть x – сумма кредита, тогда по условию проценты, которые выплатит заемщик, составят

$$0,19x + 0,19 \cdot 0,9x + \dots + 0,19 \cdot 0,1x = 0,19x(1 + 0,9 + 0,8 + \dots + 0,1) =$$

$$= 0,019x(1 + 2 + \dots + 10) = 0,019x \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 1,045x, \text{ т.е. всего заемщик вы-}$$

платит $1,045x + x = 2,045x$, что в 2,045 раз превысит сумму займа.

Ответ: в 2,045 раз.

б) Пусть x – сумма кредита, тогда по условию заемщик должен выплатить:

$$0,12x + \frac{1}{20}x + 0,12 \cdot \frac{19}{20}x + \frac{1}{20}x + \dots + 0,12 \cdot \frac{1}{20}x + \frac{1}{20}x =$$

$$= x + 0,12x \left(1 + \frac{19}{20} + \dots + \frac{1}{20} \right) = x + 0,006x \cdot (1 + \dots + 20) =$$

$$= 0,006x \cdot \frac{21 \cdot 20}{2} + x = 2,26x, \text{ что } 2,26 \text{ раз превосходит сумму займа.}$$

Ответ: в 2,26 раз.

8.2.D03

а) Пусть в баке x кг бензина, тогда $(31 - x)$ масла, т.к. плотность масла в

$$\frac{36}{30} = 1,2 \text{ раза больше плотности бензина, то } 1,2x + (31 - x) = 36 \Rightarrow 0,2x = 5$$

$$\Rightarrow x = 25$$

Итак в баке 25 кг бензина и 6 кг масла. 25 кг бензина стоит $500 : 2 = 250$ рублей $\Rightarrow$ 1 кг бензина стоит 10 рублей.

Ответ: 10 рублей.

б) Пусть в баке x кг скипидара, тогда $(44-x)$ масла, т.к. плотность масла в $\frac{45}{40} = \frac{9}{8}$ раз больше плотности скипидара, то $\frac{9}{8}x + 44 - x = 45; \frac{1}{8}x = 1;$

$x = 8$ кг. Итак, в бочке 8 кг скипидара стоимостью 320 рублей, тогда 1 кг скипидара стоит $320 : 8 = 40$ рублей.

Ответ: 40 рублей.

8.2.D04

а) Наименьшее число учеников будет, если 1 ученик составляет в пределах 2,8 % – 3,2 % от общего числа учеников, итак в классе 32 ученика.

Ответ: 32 ученика.

б) Нужно искать n , т.е. $0,017 \leq \frac{1}{n} \leq 0,023$, тогда будет всего 1 ученик $\Rightarrow n = 44$.

Ответ: 1.

8.2.D05

а) Пусть рабочий 1-го разряда выполнит за 1 день a -ю часть заказа, 2-го разряда b -ю и 3-го разряда, c -ю часть заказа.

Тогда по условию: $a + 4b + 5c = \frac{1}{4}; 4a + b = \frac{1}{12}$

А нужно найти $\frac{1}{a+b+c}, \Rightarrow a+b+c = \frac{1}{15} \Rightarrow \frac{1}{a+b+c} = 15$.

Ответ: 15.

б) Пусть рабочий 1-го разряда выполнит за 1 день a -ю часть заказа, 2-го разряда b -ю и 3-го разряда, c -ю часть заказа.

По условию: $5a + 5b + 4c = \frac{1}{5} \Rightarrow 6(a+b+c) = \frac{1}{4}; b+2c = \frac{1}{20}$.

Нужно найти $\frac{1}{a+b+c} \Rightarrow a+b+c = \frac{1}{24} \Rightarrow \frac{1}{a+b+c} = 24$.

Ответ: 24 дня.

8.2.D06

а) Если бы на весть этот бензин автомобиль ехал по шоссе, то он проехал бы на $\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3} - \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$ пути больше, т.е. $\frac{17}{15}$ исходного пути, т.е. если

бы весь путь пролегал по шоссе, он израсходовал бы $\frac{17}{15} = 15$ л бензина.

Ответ: 15 л бензина.

б) Если бы на весть этот бензин автомобиль ехал по шоссе, то он проехал бы на $\frac{2}{5} \cdot \frac{9}{7} - \frac{2}{5} = \frac{4}{35}$ пути больше, т.е. можно было бы проехать $\frac{39}{35}$ исходного пути, тогда если бы весь путь пролегал по шоссе, автомобиль израсходовал бы $\frac{39}{\frac{39}{35}} = 35$ л бензина.

Ответ: 35 л бензина.

8.2.D07

а) На 100 км летом автомобиль расходует $\frac{56}{6,72} = \frac{100}{12}$, зимой

$\frac{25}{3} - 1 = \frac{22}{3}$ л/100 км. $\frac{1}{4}$ бака это 14 литров, на них он зимой проедет

$$14 \cdot \frac{22}{3} = 102 \frac{2}{3} \text{ км.}$$

Ответ: $102 \frac{2}{3}$ км.

б) На 100 км летом автомобиль расходует $\frac{70}{8,40} = \frac{1}{0,12} = \frac{25}{3}$ л бензина,

зимой $\frac{25}{3} - 1 = \frac{22}{3}$ л/100 км. $\frac{1}{5}$ бака это 14 литров, на них зимой он

сможет проехать $\frac{22 \cdot 14}{3} = 102 \frac{2}{3}$ км.

Ответ: $102 \frac{2}{3}$ км.

8.2.D08

а) Пусть в некоторый момент концентрация кислоты в канистре была x %, тогда после процедуры она станет равна $\frac{31x - 3x}{31} = \frac{28}{31}x$, т.е. после

каждого шага концентрация кислоты уменьшается в $\frac{31}{28}$ раза.

После n операций в канистре останется $31 \left(\frac{28}{31} \right)^n$ кислоты.

Ответ: $31 \left(\frac{28}{31} \right)^n$ литров.

б) Пусть в некоторый момент концентрация кислоты в канистре была x %, тогда после операции она станет равна $\frac{31x - 2x}{13} = \frac{9}{13}x$, т.е. после каждой операции концентрация кислоты уменьшается в $\frac{13}{9}$ раза.

После n операций в канистре останется $13\left(\frac{9}{13}\right)^n$ литров кислоты.

Ответ: $13\left(\frac{9}{13}\right)^n$ литров кислоты.

8.2.D09

а) Процентное содержание вещества А в новом сплаве $40\% + 10\% = 50\%$, пусть x – масса нового сплава. Тогда имеем,

$$\frac{1}{3}(x-8) \cdot 0,6 + \frac{2}{3}(x-8) \cdot 0,2 + 5 = \frac{1}{2}x; \quad \frac{3}{15}x + \frac{4}{15}x + 5 - \left(\frac{3}{15} + \frac{4}{15}\right) \cdot 8 = \frac{1}{2}x;$$

$$\frac{1}{30}x = \frac{19}{15} \Rightarrow x = 38.$$

Ответ: 38 кг.

б) Процентное содержание вещества А в новом сплаве 50% . Пусть x – масса нового сплава, тогда имеем,

$$\frac{3}{4}(x-6) \cdot 0,3 + \frac{1}{4}(x-6) \cdot 0,6 + 4 = \frac{1}{2}x; \quad \frac{9}{40}x + \frac{6}{40}x - 6\left(\frac{9}{40} + \frac{6}{40}\right) + 4 = \frac{1}{2}x;$$

$$\frac{1}{8}x = \frac{7}{4} \Rightarrow x = 14 \text{ кг.}$$

Ответ: 14 кг.

8.2.D10

а) Пусть было смешано x и y кг растворов 30% -го и 20% -го.

По условию имеем

$$\begin{cases} \frac{0,3x + 0,2y}{x + y + 4} = 0,1 \\ \frac{0,3x + 0,2y + 4 \cdot 0,7}{x + y + 4} = 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,3x + 0,2y = 0,1x + 0,1y + 0,4 \\ 0,3x + 0,2y + 2,8 = 0,5x + 0,5y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,2x + 0,1y = 0,4 \\ 0,2x + 0,3y = 0,8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Ответ: 1 кг и 2 кг.

б) Пусть было смешано x и y кг растворов 50 %-го и 40 %-го.

По условию имеем систему

$$\begin{cases} \frac{0,5x + 0,4y}{x + y + 3} = 0,3 \\ \frac{0,5x + 0,4y + 3 \cdot 0,9}{x + y + 3} = 0,6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,5x + 0,4y = 0,3x + 0,3y + 0,9 \\ 0,5x + 0,4y + 2,7 = 0,6x + 0,6y + 1,8 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,2x + 0,1y = 0,9 \\ 0,1x + 0,2y = 0,9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 3 \end{cases}$$

Ответ: 3 кг, 3 кг.

§ 3. Задачи на свойства целых чисел

Уровень А

8.3.A01

а) Т.к. 295 не делится на 37, то такого сделать нельзя.

б) Т.к. $273 : 39 = 7$, то можно подарить каждой даме по 7 хризантем.

8.3.A02

а) Т.к. $378 = 31 \cdot 12 + 6$, то такого быть не может.

б) Не может, т.к. $384 = 18 \cdot 21 + 6$.

8.3.A03

а) $800 = 73 \cdot 10 + 70$, т.е. нужно добавить 3 мяча.

б) $850 = 78 \cdot 10 + 70$, т.е. нужно добавить 8 мячей.

8.3.A04

а) $40 = 5,72 \cdot 6 + 5,68$

б) $50 = 7,16 \cdot 6 + 7,04$

Ответ: 6.

Ответ: 6.

8.3.A05

а) 11 контейнеров.

б) 7 контейнеров.

8.3.A06

а) 15 шлюпок.

б) 18 шлюпок.

8.3.A07

а) 15 делится на 1, 3, 5, 15. 9 делится на 1, 3, 9. Т.е. она может пригласить 2 гостя.

б) 20 делится на 1, 2, 4, 5, 10, 20. 28 делится на 1, 2, 4, 7, 14, 28. Тогда она может пригласить 2 гостя.

8.3.A08

а) Число конфет должно делиться на 3, 4, 7. Наименьшее такое число $3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$.

б) Число пирожных должно делиться на 4, 5 и 9, минимальное такое число $4 \cdot 5 \cdot 9 = 180$.

8.3.A09

- а) Среди 3-х указанных чисел только одно делится на 3: $7,26:3 = 2:42$.
Стоимость карандаша 2 рубля 42 копейки.
- б) Среди 3-х указанных чисел только одно делится на 4: $9,28 : 4 = 2:32$.
Стоимость ручки 2 рубля 32 копейки.

8.3.A10

- а) верно 3), т.к. 21,56 делится на семь.
Стоимость фломастера $31,56 : 7 = 3,08$ рублей.
- б) верно 2), т.к. 12 р. 78 коп. делится на 6.
Стоимость ластика 12 р. 78 коп. : 6 = 2 рубля 13 копеек.

Уровень В

8.3.B01

- а) Пусть сыну x лет, отцу 52-х, по условию

$$\frac{52 - x + 8}{x + 8} = 3 \Rightarrow 60 - x = 3x + 24 \Rightarrow x = 9$$

Ответ: 43 и 9.

- б) Пусть x лет сыну, 30-х лет отцу.

По условию: $\frac{30 - x + 7}{x + 7} = 3 \Rightarrow 37 - x = 3x + 21; x = 4$

Ответ: 26 лет и 4 года.

8.3.B02

- а) Нет, т.к. 2004 не делится на 9, а 9 и 18 делятся.
- б) Нет, т.к. 2006 не делится на 4, а 4 и 8 делятся.

8.3.B03

- а) $38 = 2 \cdot 19 = 38 \cdot 1$

Т.к. периметр > 50 , то длины сторон прямоугольника 38 см и 1 см.

Ответ: 38 см, 1 см.

- б) $34 = 2 \cdot 17 = 1 \cdot 34$

Т.к. периметр < 60 , то длины сторон прямоугольника 2 см и 17 см.

Ответ: 2 см, 17 см.

8.3.B04

- а) $49,92 : 6 = 8,32$; $41,55 : 5 = 8,31 \Rightarrow$ шоколадка стоит 8 рублей 31 копейка. $33,28 : 4 = 8,32$

Ответ: 8 рублей 31 копейка.

- б) $20,67 : 3 = 6,89$; $33,95 : 5 = 6,79 \Rightarrow$ булочка стоит 6 рублей 89 копеек.
 $47,53 : 7 = 6,79$

Ответ: 6 рублей 89 копеек.

8.3.B05

а) $22,45 : 5 = 4,49$; $26,88 : 6 = 4,48 \Rightarrow$ воздушный шарик стоит 4 рубля 49 копеек. $31,43 : 7 = 4,49$

Ответ: 4 рубля 49 копеек.

б) $21,6 : 4 = 5,29$; $31,68 : 6 = 5,28 \Rightarrow$ тетрадь стоит 5 рублей 28 копеек. $42,24 : 8 = 5,28$

Ответ: 5 рублей 28 копеек.

8.3.B06

а) $93 \div 12 \cdot 7 + 11$, т.е. нужно 8 коробок по 12 кг.

б) $94 = 8 \cdot 11 + 6$, нужно 12 коробок по 8 кг.

8.3.B07

а) $854 = 2,55 \cdot 350 \Rightarrow$ стержень стоит 2,45 рублей.
 $861 = 2,46 \cdot 350$

Ответ: 2 рубля 45 копеек.

б) $783 = 5,22 \cdot 150 \Rightarrow$ фломастер стоит 5,23 рублей.
 $786 = 5,24 \cdot 150$

Ответ: 5 рублей 23 копейки.

8.3.B08

а) 499.

б) 995.

8.3.B09

а) Нет, т.к. в каждом из бидонов четное число литров, а 345 – нечетное.

б) Нет, т.к. вместимость каждого из бидонов делится на 3, а 542 нет.

8.3.B10

а) Длина 3-ей стороны должна быть $> (6-1) = 5$ и $< (6+1) = 7$, т.е. равна 6, периметр $1+6+6 = 13$ (см).

б) Длина 3-ей стороны должна быть $> (7-1) = 6$ и $< (7+1) = 8$, т.е. равна 7, периметр $1+7+7 = 15$ (см).

Уровень С**8.3.C01**

а) Пусть это число $\overline{abba}$. По условию $2a+2b = 14$, $\overline{ab} - \overline{ba} = 27$,

$$10a+b-10b-a = 9(a-b) = 27 \Rightarrow a-b = 3. \text{ Имеем } \begin{cases} 2a+2b=14 \\ a-b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=2 \end{cases}.$$

Нина задумала число 5225.

Ответ: 5225.

б) Пусть это число $\overline{abba}$, также по условию

$$\begin{cases} 2a+2b=18 \Rightarrow a+b=9 \\ ab-ba=9 \Rightarrow 10a+b-10b-a=9 \Rightarrow a-b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=4 \end{cases}$$

Лиди задумала число 5445.

Ответ: 5445.

8.3.C02

а) У n -угольника $\frac{n(n-3)}{2}$ диагоналей $\Rightarrow \frac{n(n-3)}{2n} = 5 \Rightarrow n = 13$.

Ответ: 13.

б) У выпуклого n -угольника $\frac{n(n-3)}{2}$ диагоналей $\Rightarrow \frac{n(n-3)}{2n} = 7 \Rightarrow n = 17$.

Ответ: 17.

8.3.C03

а) Пусть x букв в строке и y строк, тогда $(x+7)(y+7) - xy = 7(x+y) + 49 = 476$
 $\Rightarrow x+y = 61$. Нужно найти $xy - (x-4)(y-4) = 4(x+y) - 16 = 244 - 16 = 228$.

Ответ: на 228 букв.

б) Пусть x букв в строке и y строк странице, тогда
 $(x+7)(y+7) - xy = 7(x+y) + 49 = 455 \Rightarrow x+y = 58$.

Тогда $xy - (x-5)(y-5) = 5(x+y) - 25 = 290 - 25 = 265$.

Ответ: на 265 букв.

8.3.C04

а) Пусть сыну x лет, отцу $6x$ лет, $\frac{6x+1}{x+1} = 5 \Rightarrow 6x+1 = 5x+5 \Rightarrow x = 4$.

Пусть через t лет сын будет младше отца в 3 раза.

$$\frac{24+t}{4+t} = 3 \Rightarrow 24+t = 3t+12 \Rightarrow t = 6.$$

Ответ: через 6 лет.

б) Пусть сыну x лет, отцу $9x$ лет, $\frac{9x+1}{x+1} = 7 \Rightarrow 9x+1 = 7x+7 \Rightarrow x = 3$.

Пусть через t лет сын будет младше отца в 5 раз.

$$\frac{27+t}{3+t} = 5 \Rightarrow 27+t = 15+5 \Rightarrow t = 3.$$

Ответ: 3 года.

8.3.C05

а) Пусть x красных шаров в одном ящике, тогда в этом ящике $(15-x)$ – синих, во втором ящике $30-8-x = (22-x)$ – красных шаров, $(x-7)$ – синих шаров. По условию

$$\frac{15-x}{x} = \frac{1}{2} \left(\frac{x-7}{22-x} \right) \Rightarrow 2(15-x)(22-x) = x(x-7)$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 74x + 660 = x^2 - 7x \Rightarrow x^2 - 67x + 660 = 0$$

$$(x-55)(x-12) = 0 \Rightarrow x = 12.$$

Ответ: 12 шаров, 10 шаров.

б) Пусть x зеленых кубиков в 1-ом ящике, тогда в этом ящике $40-x$ желтых, во втором ящике $14-(40-x) = x-26$ – желтых и $40-(x-26) = 66-x$ зеленых по условию

$$\frac{40-x}{x} = \frac{1}{3} \left(\frac{x-26}{66-x} \right) \Rightarrow 3(66-x)(40-x) = x(x-26)$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 318x + 7920 = x^2 - 26x \Rightarrow 2x^2 - 292x + 7920 = 0$$

$$x^2 - 146x + 3960 = 0, (x-36)(x-110) = 0 \Rightarrow x = 36.$$

Ответ: 36 шаров, 30 шаров.

8.3.C06

а) $\overline{ab}$ – задуманное число, $a = b+5$, $\overline{ab} = 10a + b = 11b + 50$,

$$a \cdot b = (b+5) \cdot b = b^2 + 5b$$

$$\text{По условию } 11b + 50 = 3(b^2 + 5b) + 11, 3b^2 + 4b - 39 = 0$$

$$(b-3)(3b+13) = 0 \Rightarrow b = 3, a = 8.$$

Ответ: 83.

б) $\overline{ab}$ – задуманное число, $a = b+1$, $\overline{ab} = 10a + b = 11b + 10$,

$$a \cdot b = b(b+1) = b^2 + b$$

$$\text{По условию } 11b + 10 = 2(b^2 + b) + 5, 2b^2 - 9b - 5 = 0$$

$$(b-5)(2b+1) = 0 \Rightarrow b = 5, a = 6.$$

Ответ: 65.

8.3.C07

$$\text{а) } \overline{abc} - \overline{cba} = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 99(a - c) = 198$$

$$\Rightarrow a - c = 2, \text{ да может если } a = c + 2.$$

Ответ: может.

б) Аналогично $\overline{abc} - \overline{cba} = 99(a - c)$, отсюда ясно, что эта разность не может быть равна 270.

Ответ: нет.

8.3.C08

$$\text{а) } \overline{abc} - (a + b + c) = 100a + 10b + c = a - b - c = 99a + 9b = 9(11a + b)$$

$$\Rightarrow 9(11a + b) = 189 \Rightarrow 11a + b = 21, \text{ т.к. } a, b < 9, \text{ то такого быть не может.}$$

Ответ: нет.

$$\text{б) } \overline{abc} - (a + b + c) = 9(11a + b)$$

$$9(11a + b) = 180 \Rightarrow 11a + b = 20, a = 1, b = 9 - \text{т.е. может.}$$

Ответ: может.

8.3.C09

а) Пусть участок $x \times y$ плиток, по условию $(x+7)(y+7) = 3,5(2(x+7+y+7)-4)$

$$xy + 7(x+y) + 49 = 7(x+y) + 84 \Rightarrow xy = 35 \Rightarrow \text{на участке 35 плиток.}$$

Ответ: 35 плиток.

- б) Пусть участок $x \times y$ плиток, по условию
 $(x+11)(y+11) = 5,5(2(x+11+x+11)-4)$, $xy+11(x+y)+121 = 11(x+y)+220$
 $\Rightarrow xy = 99$, т.е. на участке 99 плиток.

Ответ: 99 плиток.

8.3.C10

- а) $60 \cdot 1,84 = 110,4$, т.е. ластик стоит 1 р. 84 коп.
 б) $90 \cdot 3,57 = 321,3$, т.е. ластик стоит 3 р. 57 коп.

Уровень D

8.3.D01

- а) Остаток от деления числа на 9 есть остаток от деления его суммы цифр на 9, т.е. будет 1.

Ответ: 1.

- б) Остаток от деления числа на 3 есть остаток от деления суммы его цифр на 3, т.е. будет 2.

Ответ: 2.

8.3.D02

- а) Пусть в квартале x четырехэтажных и y шестиэтажных домов, по условию

$$\begin{cases} x > y \\ x + 2y > 60 \\ 2x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y > 60 \\ x - y < 3 \end{cases}$$

Т.е. $2x+y = 61$, или $2x+y = 62$ и $x-y = 2$ или $x-y = 1$. Если $y = x-1 \Rightarrow 2x+y = 62 \Rightarrow x = 21, y = 20$. в остальных случаях решений нет.

Ответ: 21, 20.

- б) Пусть в квартале x шестнадцатизэтажных и y одиннадцатизэтажных домов, по условию

$$\begin{cases} x > y \\ x + 2y > 33 \\ 2x + y < 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y > 33 \\ x - y < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 34 \\ 2x + y = 35 \\ x - y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Из всех вариантов подходит только $x-y = 1, 2x+y = 35 \Rightarrow x = 12, y = 11$.

Ответ: 12, 11.

8.3.D03

- а) Назовем связью знакомство одного человека с другим, тогда в комнате должно быть $\frac{17 \cdot 5}{2}$ связей – чего быть не может.

- б) Аналогично, в комнате должно быть $\frac{17 \cdot 3}{2}$ связей, чего быть не может.

8.3.D04

а) Пусть было n человек, т.к. 2-е ушло, то между оставшимися было сыграно $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$, по условию имеем:

$$\begin{cases} \frac{(n-2)(n-3)}{2} + 7 = 62 \\ \frac{(n-2)(n-3)}{2} + 8 = 62 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (n-2)(n-3) = 110 = 10 \cdot 11 \\ (n-2)(n-3) = 108 \end{cases} \Rightarrow n = 13$$

Ответ: 13, да.

б) Пусть на турнире было n участников, т.к. 2-е выбыло, то между оставшимися было сыграно $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ партий. Тогда по условию имеем:

$$\begin{cases} \frac{(n-2)(n-3)}{2} + 6 = 110 \Rightarrow (n-2)(n-3) = 208 \\ \frac{(n-2)(n-3)}{2} + 5 = 110 \Rightarrow (n-2)(n-3) = 210 = 14 \cdot 15 \end{cases} \Rightarrow n = 16$$

Игра между выбывшими состоялась.

Ответ: 16, да.

8.3.D05

а) Пусть он родился в $\overline{19ab}$ году, тогда по условию $58 - \overline{ab} = a + b \Rightarrow 58 - 10a - b = a + b \Rightarrow 58 = 11a + 2b$, $a, b \leq 9 \Rightarrow a = 4, b = 7$.

Ответ: в 1947.

б) Пусть он родился в $\overline{19ab}$ году, тогда по условию $72 - \overline{ab} = a + b \Rightarrow 72 - 10a - b = a + b \Rightarrow 72 = 11a + 2b$, $a, b \leq 9 \Rightarrow a = 6, b = 3$.

Ответ: в 1963.

8.3.D06

а) Пусть всего n солдат, тогда по условию $m < 15, l < 9$

$$\begin{cases} n = 14k \\ n = 15(k-2) + m = 15k + m - 30, k + m = 30 \\ n = 9(k+8) + l = 9k + l + 72 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = \frac{9}{14}n + l + 72 \Rightarrow \frac{5n}{14} = l + 72 \Rightarrow n = 14 \cdot \frac{(l+72)}{5} \\ n = \frac{15}{14}n + m - 30 \Rightarrow n = 14 \cdot (30 - m) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (30 - m) = \frac{l+72}{5} \Rightarrow 78 = l + 5m, \text{ но } l < 9, m < 15 \Rightarrow l = 8, m = 14$$

$$\Rightarrow K = 30 - m = 16 \Rightarrow n = 14 \cdot 16 = 224.$$

Ответ: 224 солдата.

б) Пусть всего n солдат, тогда по условию $m < 11, l < 7$

$$\begin{cases} n = 10k \\ n = 11(k-3) + m = 11k + m - 33 \\ n = 7(k+9) + l = 7k + l + 63 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = \frac{11}{10}n + m - 33 \\ n = \frac{7}{10}n + l + 63 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{n}{10} = 33 - m \\ \frac{3n}{10} = l + 63 \end{cases}$$

$$\Rightarrow l + 63 = 99 - 3m \Rightarrow l + 3m = 36 \text{ но т.к. } m < 11, l < 7$$

$$\text{то } m = 10, l = 6, K = 33 - m = 23, n = 23 \cdot 10 = 230.$$

Ответ: 230 солдат.

8.3.D07

а) Пусть мастер за час делает x деталей, а ученик $(x-10)$ деталей, $x > 18$.

Пусть мастер выполнит заказ за $(k+2)$ часа, тогда имеем

$$(k+2)x = 3k(x-10) \Rightarrow kx + 2x = 3kx - 30k \Rightarrow kx - x = 15k$$

$$\Rightarrow x = \frac{15k}{k-1} = 15 + \frac{15}{k-1}, \text{ т.к. } x > 18, \text{ то}$$

$$k = 2, x = 30 \Rightarrow \text{заказ состоит из } 4 \cdot 30 = 120 \text{ деталей, или}$$

$$k = 4, x = 20 \Rightarrow \text{заказ состоит из } 6 \cdot 20 = 120 \text{ деталей}$$

Ответ: 120 деталей.

б) Пусть мастер за 1 час делает x деталей ($x > 5$), тогда ученик $(x-2)$ детали.

Пусть мастер выполнит заказ за $(k+1)$ час, тогда имеем

$$(k+1)x = 2(x-2)k \Rightarrow kx + x = 2kx - 4k \Rightarrow 4k = kx - x$$

$$\Rightarrow x = \frac{4k}{k-1} = 4 + \frac{4}{k-1}, \text{ т.е. } x > 5, \text{ то}$$

$$k = 2, x = 8 \Rightarrow \text{заказ состоит из } 3 \cdot 8 = 24 \text{ детали, или}$$

$$k = 3, x = 6 \Rightarrow \text{заказ состоит из } 4 \cdot 6 = 24 \text{ детали.}$$

Ответ: 24 детали.

8.3.D08

а) Пусть в контейнер помещается x телевизоров, а в вагон y телевизоров, тогда по условию:

$$\begin{cases} kx = 13y + 5 \\ lx = 6y - 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{kx-5}{13} = \frac{lx+1}{6} \Rightarrow 6kx - 30 = 13lx + 13 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (6k-13l)x = 43, \text{ т.к. } 43 - \text{простое и } x > 1 \Rightarrow x = 43.$$

Ответ: 43 телевизора.

б) Пусть в контейнер помещается x телевизоров, а в вагон y телевизоров, тогда по условию:

$$\begin{cases} kx = 12y + 5 \\ lx = 5y - 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{kx-5}{12} = \frac{lx+1}{5} \Rightarrow 5kx - 25 = lx \cdot 12 + 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (5k-12l)x = 37, \text{ т.к. } 37 - \text{простое и } x > 1 \Rightarrow x = 37.$$

Ответ: 37 телевизоров.

8.3.D09

а) Пусть Маша задумала $\overline{abc}$, тогда по условию

$$10 > a, b, c \geq 0$$

$$\begin{cases} a+b+c=7 \\ a^2+b^2+c^2=27 \Rightarrow a, b, c < 6 \\ \overline{abc} - 396 = \overline{cba} \Rightarrow 100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 99(a-c) = 396 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b+c=7 \\ a^2+b^2+c^2=27 \\ a=c+4 \end{cases}$$

Т.к. $a, b, c < 6$ и $a = c+4$, то либо 1, либо 0,

$$c = 1 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow \overline{abc} = 511$$

$$c = 0, \Rightarrow a = 4 \Rightarrow b = 3 \text{ по } b^2 + a^2 + c^2 \neq 27.$$

Ответ: 511.

б) Пусть Паша задумал $\overline{abc}$, тогда по условию

$$\begin{cases} a+b+c=8 \\ a^2+b^2+c^2=24 \Rightarrow a, b, c < 5 \\ \overline{abc} - 198 = \overline{cba} \Rightarrow 99(a-c) = 198 \Rightarrow a-c=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b+c=8 \\ a^2+b^2+c^2=24 \\ a=c+2 \end{cases}$$

Т.к. $a, b, c < 5$, то c либо 0, либо 1, либо 2.

$$c = 0 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = 6 \text{ но } b < 5$$

$$c = 1 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow b = 4 \text{ по } a^2 + b^2 + c^2 \neq 24$$

$$c = 2 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow \overline{abc} = 422$$

Ответ: 422.

8.3.D10

а) По условию $321 = 12k + 15m \Rightarrow 4k + 5l = 107$, $4k$ — должно давать остаток 2 при делении на 5, т.к. $107 = 21 \cdot 5 + 2$, $\Rightarrow k = 5l + 3$.

Далее число $5m$ должно давать остаток 3 при делении на 4, т.к. $107 = 26 \cdot 4 + 3 \Rightarrow m = 4S + 3$. Тогда $k = 3, 8, 13, 18, 23$. $m = 3, 7, 11, 15, 19$.

Центр 1-го типа стоит $\frac{8000}{12} = \frac{2000}{3}$ руб. за кг.

2-го типа стоит $\frac{12000}{12} = 800$ руб. за кг.

Т.е. центр второго типа дороже, значит надо искать максимальное и минимальное значение m в исходном выражении.

$\Rightarrow m = 19, k = 3 \Rightarrow$ сумма на складе

$$19 \cdot 12000 + 3 \cdot 8000 = 252000$$

$\Rightarrow m = 3, k = 23 \Rightarrow$ сумма на складе

$$3 \cdot 12000 + 23 \cdot 8000 = 220000.$$

Ответ: 220000 рублей и 252000 рублей.

б) По условию $279 = 15k + 18m \Rightarrow 93 = 5k + 6m$,

$6m$ — должно давать остаток 3 при делении на 5, $m = 5l + 3$,

$5k$ должно давать остаток 3 при делении на 6, $k = 6S + 3$,

тогда $m = 3, 8, 13$

$k = 3, 9, 15$.

Центр 1-го типа стоит $\frac{6000}{15} = 400$ рублей за кг., 2-го $\frac{8000}{18} = \frac{4000}{9}$ руб.

лей за 1 кг, нужно искать максимальное и минимальное значение m в исходном выражении

$\Rightarrow m = 3, k = 3$ сумма на складе

$$3 \cdot 8000 + 3 \cdot 6000 = 122000$$

$m = 3, k = 15$, сумма на складе

$$3 \cdot 8000 + 15 \cdot 6000 = 114000$$

Ответ: 114000 и 122000 рублей.

Глава 9. Прогрессии

Уровень А

9.1.A01

$$a) a_{12} = a_1 + 11d \Rightarrow d = \frac{a_{12} - a_1}{11} = \frac{-21 - 1}{2} = -2.$$

Ответ: -2.

$$б) a_{20} = a_1 + 19d \Rightarrow d = \frac{a_{20} - a_1}{19} = \frac{-37 - 1}{2} = -2.$$

Ответ: -2.

9.1.A02

$$a) a_8 = a_7 + d \Rightarrow a_7 = a_8 - d = 0.$$

Ответ: 0.

$$б) a_{10} = a_9 + d \Rightarrow a_9 = a_{10} - d = 0$$

Ответ: 0.

9.1.A03

$$a) S = \frac{2a_1 + 7d}{2} \cdot 8; d = a_2 - a_1 = 3 \Rightarrow S = \frac{-24 + 21}{2} \cdot 8 = -12$$

Ответ: -12.

$$б) d = a_2 - a_1 = 4, S = \frac{2(-16) + 5 \cdot 4}{2} \cdot 6 = -36$$

Ответ: -36.

9.1.A04

$$a) a_{12} = a_{11} + (a_{11} - a_{10}) = 15 + 15 - 34 = -4.$$

Ответ: -4.

$$б) a_{17} = a_{18} - d = a_{18} - (a_{19} - a_{18}) = 2a_{18} - a_{19} = 50 - 39 = 11$$

Ответ: 11.

9.1.A05

$$a) a_7 + a_{12} = a_1 + 6d + a_1 + 11d = 2a_1 + 17d; a_6 + a_{11} = a_1 + 5d + a_1 + 10d = 2a_1 + 15d \\ \Rightarrow (a_7 + a_{12}) - (a_6 + a_{11}) = 2d = -8 \Rightarrow d = -4$$

Ответ: -4.

$$б) a_6 + a_{10} = a_1 + 5d + a_1 + 9d = 2a_1 + 14d; a_3 + a_8 = a_1 + 2d + a_1 + 7d = 2a_1 + 9d \\ \Rightarrow (a_6 + a_{10}) - (a_3 + a_8) = 5d = -15 \Rightarrow d = -3.$$

Ответ: -3.

9.1.A06

$$a) b_9 = \frac{b_{10}}{q}, q = \frac{b_{11}}{b_{10}}, b_9 = \frac{b_{10}^2}{b_{11}} = \frac{12^2}{4} = 36$$

Ответ: 36.

$$б) b_9 = b_8 q, q = \frac{b_8}{b_7} \Rightarrow b_9 = \frac{b_8^2}{b_7} = \frac{24^2}{8} = 72$$

Ответ: 72.

9.1.A07

$$a) b_1 = \frac{b_3}{q^2} = \frac{36}{9} = 4, S = \frac{3^5 - 1}{3 - 1} \cdot 4 = 484$$

Ответ: 484.

$$б) b_1 = \frac{b_4}{q^3} = \frac{64}{8} = 8, S = \frac{2^6 - 1}{2 - 1} \cdot 8 = 504$$

Ответ: 504.

9.1.A08

$$a) b_7 = \frac{b_8}{q} = 1 \text{ Ответ: } 1.$$

$$б) b_{13} = \frac{b_{14}}{q} = 1 \text{ Ответ: } 1.$$

9.1.A09

$$a) \frac{b_{13}}{b_5} = \frac{b_1 q^{12}}{b_1 q^4} = q^8; \frac{b_5}{b_1} = \frac{b_1 q^4}{b_1} = q^4 = 5 \Rightarrow q^8 = 25$$

Ответ: 25.

$$б) \frac{b_4}{b_1} = \frac{b_1 q^3}{b_1} = q^3 = 4; \frac{b_{10}}{b_4} = \frac{b_1 q^9}{b_1 q^3} = q^6 = 16$$

Ответ: 16.

9.1.A10

$$a) q = \frac{b_{35}}{b_{34}} = \frac{36}{35}$$

$$б) q = \frac{b_{44}}{b_{43}} = \frac{45}{44}$$

Ответ: $\frac{36}{35}$.

Ответ: $\frac{45}{44}$.

Уровень В**9.1.B01**

а) Члены прогрессии, числа вида $1+7k$, т.е. $9150 = 1+7 \cdot 1307$.

Ответ: 9150.

б) Члены прогрессии, числа вида $1+3k$, т.е. $4276 = 1+3 \cdot 1425$.

Ответ: 4276.

9.1.B02

$$a) b_7 = b_1 + 6d, b_{17} = b_1 + 16d \Rightarrow d = \frac{b_{17} - b_7}{10} = \frac{-50 - (-40)}{10} = -1$$

Ответ: -1.

$$б) b_8 = b_1 + 7d, b_{20} = b_1 + 19d \Rightarrow d = \frac{b_{20} - b_8}{12} = \frac{-58 - (-22)}{12} = -3$$

Ответ: -3.

9.1.B03

$$a) d = \frac{a_{28} - a_2}{26} = \frac{56 - 4}{26} = 2, a_1 = a_2 - d = 2$$

$$S_{28} = \frac{2a_1 + 27 \cdot d}{2} \cdot 28 = 14(4 + 54) = 812$$

Ответ: 2; 812.

$$b) d = \frac{a_{32} - a_2}{30} = \frac{130 - 10}{30} = 4, a_1 = a_2 - d = 6$$

$$S_{32} = \frac{2 \cdot 6 + 31 \cdot 4}{2} \cdot 32 = 16(12 + 124) = 2176$$

Ответ: 4; 2176.

9.1.B04

$$a) a_1 = a_2 - d = 9 - 20 = -11; a_{10} = a_1 + 9d = -11 + 20 \cdot 9 = 169;$$

$$S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{-11 + 169}{2} \cdot 10 = 790$$

Ответ: 169; 790.

$$b) a_1 = a_2 - d = 11 - 30 = -19; a_{10} = a_1 + 9d = -19 + 9 \cdot 30 = 251;$$

$$S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{-19 + 251}{2} \cdot 10 = 1160$$

Ответ: 251; 1160.

9.1.B05

$$a) S_{22} = \frac{2a_1 + 21d}{2} \cdot 22 = \frac{2(a_1 + d) + 19d}{2} \cdot 22 = 11(2a_2 + 19d) =$$

$$= 11(14 + 19d) = 2035 \Rightarrow d = 9, a_1 = a_2 - d = -2.$$

Ответ: 9; -2.

$$b) S_{22} = \frac{2a_1 + 17d}{2} \cdot 18 = \frac{2(a_1 + d) + 15d}{2} \cdot 18 = 9(2a_2 + 15d) =$$

$$= 9(6 + 15d) = 1539 \Rightarrow d = 11, a_1 = a_2 - d = -8.$$

Ответ: 11; -8.

9.1.B06

$$a) \frac{b_{11}}{b_{10}} = q, \frac{b_{10}}{b_8} = q_2 \Rightarrow \frac{\left(\frac{b_{10}}{b_8}\right)}{\left(\frac{b_{10}}{b_8}\right)} = q = 5$$

$$b) \frac{b_7}{b_6} = q, \frac{b_6}{b_4} = q^2 \Rightarrow \frac{\left(\frac{b_7}{b_6}\right)}{\left(\frac{b_6}{b_4}\right)} =$$

Ответ: 5.

$$= \frac{1}{q} = \frac{1}{7} \Rightarrow q = 7$$

Ответ: 5.

9.1.B07

а) $\frac{b_{12}}{b_8} = \frac{b_1 q^{11}}{b_1 q^7} = q^4 = -\frac{8}{12}$, но $q^4 \geq 0$, т.е. такой прогрессии не существует.

Ответ: нет.

б) $\frac{b_9}{b_3} = \frac{b_1 q^8}{b_1 q^2} = q^6 = -\frac{3}{9}$, но $q^6 \geq 0$, т.е. такой прогрессии не существует.

Ответ: нет.

9.1.B08

а) $\frac{b_{37}}{b_{35}} = q^2 = 16 \Rightarrow q = \pm 4$

Ответ: ± 4 .

б) $\frac{b_{53}}{b_{51}} = q^2 = 36 \Rightarrow q = \pm 6$

Ответ: ± 6 .

9.1.B09

а) $\frac{b_{18}}{b_{21}} = 27 = \frac{1}{q^3} \Rightarrow q = \frac{1}{3}$

Ответ: $\frac{1}{3}$.

б) $\frac{b_{10}}{b_{13}} = 8 = \frac{1}{q^3} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

9.1.B10

а) $\frac{b_3 + b_8}{b_2 + b_7} = \frac{q(b_2 + b_1)}{b_2 + b_7} = q = 13$

Ответ: 13.

б) $\frac{b_6 + b_{11}}{b_5 + b_{10}} = \frac{q(b_5 + b_{10})}{b_5 + b_{10}} = q = 7$

Ответ: 7.

Уровень С**9.1.C01**

а) $d = \frac{a_{41} - a_{17}}{24} = \frac{-2 - 94}{24} = -4$, $a_{40} = a_{41} - d = 2$

$\Rightarrow a_{40} + a_{41} = 0$, ..., $a_1 + a_{80} = 0 \Rightarrow S_{80} = 0$, $n = 80$.

Ответ: 80.

б) $d = \frac{a_{37} - a_{19}}{18} = \frac{1 + 35}{18} = 2$, $a_{36} + a_{37} - d = -1 \Rightarrow a_{36} + a_{37} = 0$,

$a_1 + a_{72} = 0 \Rightarrow S_{72} = 0$, $n = 72$.

Ответ: 72.

9.1.C02

а) $x + 1 + 6x^2 = 14 + 4x^2 - x - 1$, $2x^2 + 2x - 12 = 0$, $(x+3)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2$, $x = -3$

Ответ: 2, -3.

б) $5x + 10 - 4x^2 = 12 - 6x^2 - 5x - 10$, $2x^2 + 10x + 8 = 0$, $x^2 + 5x + 4 = 0$

$(x+1)(x+4) = 0$, $x = -1$, $x = -4$

Ответ: -1; -4.

9.1.C03

$$a) a_1 = a_2 - d = 7, S_n = \frac{14 + (n-1) \cdot 3}{2} \cdot n = 282,$$

$$(11+3n) = 564 \Rightarrow 3n^2 + 11n - 564 = 0, D = 83^2, n_{1,2} = \frac{-11 \pm 83}{6} \Rightarrow n = 12$$

Omņem: 12.

$$b) a_1 = a_2 - d = 2, S_n = \frac{4 + 3(n-1)}{2} \cdot n = 222, (3n+1)n = 444, 3n^2 + n = 444$$

$$3n^2 + n - 444 = 0, D = 73^2, n_{1,2} = \frac{-1 \pm 73}{6} \Rightarrow n = 12.$$

Omņem: 12.

9.1.C04

$$a) a_5 + a_{20} = a_1 + 4d + a_1 + 19d = 2a_1 + 23d$$

$$a_1 + a_{11} + a_{14} + a_{24} = a_1 + a_1 + 10d + a_1 + 13d + a_1 + 23d = 4a_1 + 46d = 2(a_1 + 23d) = 52$$

Omņem: 52.

$$b) a_3 + a_{20} = a_1 + 2d + a_1 + 19d = 2a_1 + 21d$$

$$a_1 + a_{11} + a_{22} + a_{12} = a_1 + a_1 + 10d + a_1 + 21d + a_1 + 11d = 2(2a_1 + 21d) = 48$$

Omņem: 48.

9.1.C05

$$a) a_1 = 2, d = 6 - 2 = 4$$

$$S = S_{13} - S_6 = \frac{2a_1 + 12d}{2} \cdot 13 - \frac{2a_1 + 5d}{2} \cdot 6 = \frac{4 + 4 \cdot 12}{2} \cdot 13 - \frac{4 + 20}{2} \cdot 6 = 338 - 72 = 266.$$

Omņem: 266.

$$b) a_1 = 8, d = -2$$

$$S = S_{12} - S_5 = \frac{2a_1 + 11d}{2} \cdot 12 - \frac{2a_1 + 4d}{2} \cdot 5 = \frac{16 - 22}{2} \cdot 12 - \frac{16 - 8}{2} \cdot 5 = -36 - 20 = -56.$$

Omņem: -56.

9.1.C06

$$a) b_3 \cdot b_{22} = b_1 q^2 \cdot b_1 q^{21} = b_1 q^{13} \cdot b_1 q^{10} = b_{14} \cdot b_{11} = 75$$

$$b_{11} = x, b_{14} = y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xy = 75 \\ x + y = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 28 \\ y^2 - 28y + 75 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 28 - y \\ (y - 5)(y - 25) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3, y = 25 \\ x = 25, y = 3 \end{cases} \Rightarrow b_{11} - b_{14} = \pm 22.$$

Omņem: ± 22 .

$$6) b_{12} \cdot b_2 = b_8 \cdot b_6, b_8 = x, b_6 = y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xy = 28 \\ x + y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 - y \\ y^2 - 16y + 28 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 - y \\ (y - 14)(y - 2) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2, y = 14 \\ x = 14, y = 2 \end{cases} \Rightarrow b_8 - b_6 = \pm(2 - 14) = \pm 12.$$

Ответ: ± 12 .

9.1.C07

$$a) b_2 \cdot b_{14} = b_6 \cdot b_{10} = 60, b_6 = -x, b_{10} = y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 16 \\ xy = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 - y \\ y^2 - 16y + 60 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 - y \\ (y - 6)(y - 10) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 6, y = 10 \\ x = 10, y = 6 \end{cases} \Rightarrow b_6 = 6, b_{10} = 10 \text{ или } b_6 = 10, b_{10} = 6.$$

Ответ: 6; 10 или 10; 6.

$$6) b_{10} \cdot b_{11} = b_7 \cdot b_{14} = 98, b_7 = x, b_{14} = y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 21 \\ xy = 98 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 21 - y \\ y^2 - 21y + 98 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 21 - y \\ (y - 14)(y - 7) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 7, y = 14 \\ x = 14, y = 7 \end{cases} \Rightarrow b_7 = 7, b_{14} = 14, \text{ или } b_7 = 14, b_{14} = 7.$$

Ответ: 7; 14 или 14; 7.

9.1.C08

$$a) \frac{x-3}{\sqrt{5x}} = \frac{\sqrt{5x}}{x+16} \Rightarrow x^2 + 13x - 48 = 5x \Rightarrow x^2 + 8x - 48 = 0, (x-4)(x+12) = 0 \Rightarrow x = 4.$$

Ответ: 4

$$6) \frac{x-2}{\sqrt{6x}} = \frac{\sqrt{6x}}{x+5}; x^2 + 3x - 10 = 6x, x^2 - 3x - 10 = 0, (x-5)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 5.$$

Ответ: 5.

9.1.C09

$$a) b_{16} - b_{13} = 12(b_{12} + b_{13} + b_{14}), b_1 q^{15} - b_1 q^{12} = 12(b_1 q^{11} + b_1 q^{12} + b_1 q^{13}) \\ q^4 - q = 12(1 + q + q^2), q(q^3 - 1) = 12(q^2 + q + 1), \\ q(q-1)(q^2 + q + 1) = 12(q^2 + q + 1) \Rightarrow q^2 - q - 12 = 0 \Rightarrow (q-4)(q+3) = 0 \Rightarrow q = 4$$

Ответ: 4.

$$6) b_{30} - b_{27} = 30(b_{26} + b_{27} + b_{28}), b_1 q^{29} - b_1 q^{26} = 30(q^{25} b_1 + b_1 q^{26} + b_1 q^{27}) \\ q(q^3 - 1) = 30(q^2 + q + 1) = q(q-1)(q^2 + q + 1) = 30(q^2 + q + 1) \\ \Rightarrow q^2 - q - 30 = 0, (q+5)(q-6) = 0 \Rightarrow q = 6$$

Ответ: 6.

9.1.C10

а) $8b_{11}+b_{13}=6b_{12}$, $8q^{10}b_1+b_1q^{12}-6q^{11}b_1=0$
 $q^2-6q+8=0$, $(q-2)(q-6)=0 \Rightarrow q=2, q=6$.

Ответ: 2 или 6.

б) $12 \cdot b_{13}+b_{15}=7b_{14}$; $b_1 \cdot q^{12} \cdot 12+b_1q^{14}=7b_1q^{13}$; $q^2-7q+12=0$
 $(q-3)(q-4)=0 \Rightarrow q=3, q=4$.

Ответ: 3 или 4.

Уровень D**9.1.D01**

а) $\frac{a_3}{a_8} = \frac{a_1+2d}{a_1+7d} = 2 \Rightarrow a_1+2d=2a_1+14d \Rightarrow a_1=-12d$

$$\frac{a_{57}}{a_{17}} = \frac{a_1+56d}{a_1+16d} = \frac{-12d+56d}{-12d+16d} = \frac{44d}{4d} = 11$$

Ответ: 11.

б) $\frac{a_3}{a_9} = \frac{a_1+2d}{a_1+8d} = 4 \Rightarrow a_1+2d=4a_1+32d \Rightarrow a_1=-10d$

$$\frac{a_{57}}{a_{15}} = \frac{a_1+50d}{a_1+14d} = \frac{-10d+50d}{-10d+14d} = \frac{40d}{4d} = 10$$

Ответ: 10.

9.1.D02

а) Нет, т.к. $d = \frac{55}{k}$ и $d = \frac{4\sqrt{11}}{l}$, чего быть не может k, l – целые.

Ответ: нет.

б) Нет, т.к. $d = \frac{18}{k}$ и $d = \frac{3\sqrt{3}}{l}$, чего быть не может k, l – целые.

Ответ: нет.

9.1.D03

а) В новой прогрессии $a_7-a_1=42 \Rightarrow d = \frac{a_7-a_1}{6} = 7$.

Ответ: 7.

б) В новой прогрессии $a_{13}-a_1=36 \Rightarrow d = \frac{a_{13}-a_1}{12} = 3$.

Ответ: 3.

9.1.D04

а) $a_{20}+a_{30}+a_{47}+a_{55}+a_{66}+a_{74}+a_{91}+a_{101}=756$

$$8a_1+(19+29+46+54+65+73+90+100)d=756 \Rightarrow 2a_1+119d=189$$

$$S_{120} = \frac{2a_1+119d}{2} \cdot 120 = 60 \cdot 189 = 11340$$

Ответ: 11340.

$$6) a_{10}+a_{39}+a_{47}+a_{48}+a_{59}+a_{60}+a_{68}+a_{97} = 336$$

$$8a_1+(9+38+46+47+58+59+67+96)d = 336 \Rightarrow 2a_1+105d = 84$$

$$S_{106} = \frac{2a_1+105d}{2} \cdot 106 = 84 \cdot 53 = 4452$$

Омвем: 4452.

9.1.D05

$$a) a_1 = 66, a_2 \cdot a_{12} = (a_1+d)(a_1+11d) = a_1^2 + 12da_1 + 11d^2 = 66^2 + 66 \cdot 12d + 11d^2 = 396 + 72d + d^2 = (d^2 + 72d + 1296) - 900 = (d+36)^2 - 900 \Rightarrow d = -36.$$

Омвем: -36.

$$6) a_1 = 28; a_2 \cdot a_8 = (a_1+d)(a_1+7d) = a_1^2 + 8a_1d + 7d^2 = 28^2 + 8 \cdot 28d + d^2 = 112 + 32d + d^2 = (d^2 + 32d + 256) - 144 = (d+16)^2 - 144 \Rightarrow d = -16$$

Омвем: -16.

9.1.D06

$$a) \frac{b_1+b_2+b_3+b_4}{b_1+b_2} = 1 + \frac{q^2(b_1+b_2)}{b_1+b_2} = (1+q^2) = \frac{82}{81} \Rightarrow q^2 = \frac{1}{81} \Rightarrow q = \pm \frac{1}{9}$$

$$\text{Омвем: } \pm \frac{1}{9}.$$

$$6) \frac{b_1+b_2+b_3+b_4}{b_1+b_2} = 1 + q^2 = \frac{26}{25} \Rightarrow q = \pm \frac{1}{5}$$

$$\text{Омвем: } \pm \frac{1}{5}.$$

9.1.D07

$$a) \begin{cases} b_9^2 + b_{18} = 13b_{17} \\ b_7^2 - b_{14} = 7b_{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1^2 \cdot q^{16} + b_1q^{17} = 13b_1q^{16} \\ b_1^2 \cdot q^{12} - b_1q^{13} = 7b_1q^{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 + q = 13 \\ b_1 - q = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 10 \\ q = 3 \end{cases}$$

Омвем: 10; 3.

$$6) \begin{cases} b_7^2 + b_{14} = 18b_{13} \\ b_9^2 - b_{18} = 8b_{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1^2 \cdot q^{12} + b_1q^{13} = 13b_1q^{12} \\ b_1^2 \cdot q^{16} - b_1q^{17} = 7b_1q^{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 + q = 18 \\ b_1 - q = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 13 \\ q = 5 \end{cases}$$

Омвем: 13; 5.

9.1.D08

$$a) b_{10} \cdot b_{29} = b_1q^9 \cdot b_1q^{37} = 22$$

$$b_{12} \cdot b_{17} \cdot b_{22} \cdot b_{27} = b_1^4 q^{11+16+21+26} = b_1^4 \cdot q^{74} = (b_1^2 \cdot q^{37})^2 = 22^2$$

Омвем: 484.

$$6) b_{18} \cdot b_{31} = b_1q^{17} \cdot b_1q^{30} = b_1^2 \cdot q^{47}$$

$$b_{11} \cdot b_{20} \cdot b_{29} \cdot b_{38} = b_1^4 \cdot q^{10+19+28+37} = b_1^4 \cdot q^{94} = (b_1^2 \cdot q^{47})^2 = 29^2.$$

Омвем: 841.

9.1.D09

$$a) \begin{cases} b_{14} + b_2 = 16 \\ b_2^2 + b_{14}^2 = 200 \end{cases}$$

$$(b_{14} + b_2)^2 - (b_2^2 + b_{14}^2) = 2b_{14} \cdot b_2 = 2b_8^2 = 56 \Rightarrow b_8 = \sqrt{28}$$

Омæм: $\sqrt{28}$.

$$б) (b_{11} + b_3)^2 - (b_{11}^2 + b_3^2) = 2b_{11} \cdot b_3 = 2b_7^2 = 14^2 - 130 = 66 \Rightarrow b_7 = \sqrt{33}$$

Омæм: $\sqrt{33}$

9.1.D10

$$a) \begin{cases} b_5 - b_3 = 4 \\ b_7 - b_5 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 q^4 - b_1 q^2 = 4 \\ b_1 q^6 - b_1 q^4 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 q^2 (q^2 - 1) = 4 \\ b_1 q^4 (q^2 - 1) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q^2 = 3 \\ b_1 = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow b_9 - b_7 = b_1 q^8 - b_1 q^6 = b_1 q^6 (q^2 - 1) = q^2 (b_1 q^4 (q^2 - 1)) = 36$$

Омæм: 36.

$$б) \begin{cases} b_7 - b_4 = 3 \\ b_{10} - b_7 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 q^6 - b_1 q^3 = 4 \\ b_1 q^9 - b_1 q^6 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 q^3 (q^3 - 1) = 3 \\ b_1 q^6 (q^3 - 1) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow q^3 = 2$$

$$\Rightarrow b_{13} - b_{10} = b_1 q^{12} - b_1 q^9 = b_1 q^9 (q^3 - 1) = q^3 (b_1 q^6 (q^3 - 1)) = 2 \cdot 6 = 12$$

Омæм: 12.

Приложение 1. Задачи по геометрии

§ 1. Отрезки, углы, треугольники

Уровень А

10.1.A01

- а) Нет, т.к. невыполнено неравенство треугольника: $AB = AC + BC$.
б) Да, неравенство треугольника выполнено.

10.1.A02

- а) $180^\circ - 17^\circ - 33^\circ = 130^\circ \Rightarrow$ угол между прямыми $180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$.
б) $16^\circ + 31^\circ = 47^\circ$.

10.1.A03

- а) $180^\circ - 2 \cdot 24^\circ = 132^\circ$
б) $(180^\circ - 36^\circ) : 2 = 72^\circ$.

10.1.A04

- а) $2\angle B = 124^\circ \Rightarrow \angle B = 62^\circ$.
б) Этот угол равен $2 \cdot \angle C = 48^\circ \cdot 2 = 96^\circ$.

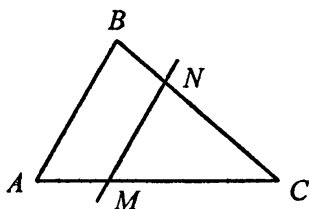
10.1.A05

- а) Сторона равна $7 \cdot 2 = 14$ см $\Rightarrow$ периметр $14 \cdot 3 = 42$ см.
б) Сторона равна $12 : 3 = 4$ см $\Rightarrow$ средняя линия $4 : 2 = 2$ см.

10.1.A06

- а) $90^\circ - 37^\circ = 53^\circ$.
б) $90^\circ - 58^\circ = 32^\circ$

10.1.A07



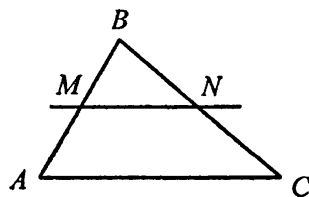
- а) Дано: $\triangle ABC$, $MN \parallel AB$, $CM = 14$ см, $CN = 18$ см, $BC = 27$ см. Найти AC .

Решение:

$$\triangle ABC \sim \triangle MNC \Rightarrow$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{MC}{NC} \Rightarrow AC = \frac{MC \cdot BC}{NC} = \frac{14 \cdot 27}{18} = 21 \text{ см.}$$

Ответ: 21 см.



- б) Дано: $\triangle ABC$, $MN \parallel AC$, $AB = 24$ см, $BN = 21$ см, $BC = 28$ см.

Найти BM .

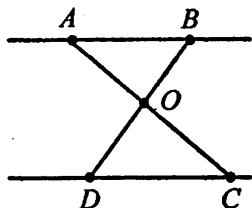
Решение:

$$\triangle ABC \sim \triangle MBN \Rightarrow$$

$$\frac{BM}{BN} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow BM = \frac{BN \cdot BA}{BC} = \frac{21 \cdot 24}{28} = 18 \text{ см.}$$

Ответ: 18 см.

10.1.A08



а) Дано: $AB \parallel DC$, $CO = 36$ см, $DC = 30$ см, $AB = 25$ см.

Найти AO .

Решение:

$\triangle AOB \sim \triangle COD \Rightarrow$

$$\frac{AO}{OC} = \frac{AB}{DC} \Rightarrow AO = \frac{AB \cdot OC}{DC} = \frac{25 \cdot 36}{30} = 30 \text{ см.}$$

Ответ: 30 см.

б) Дано: $AD \parallel BC$, $AD = 32$ см, $DO = 20$ см, $BO = 15$ см.

Найти BC .

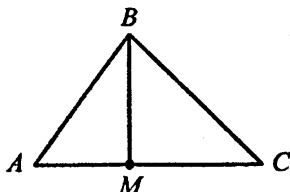
Решение:

$\triangle AOD \sim \triangle COB \Rightarrow$

$$\frac{BC}{AD} = \frac{BO}{DO} \Rightarrow BC = \frac{AD \cdot BO}{DO} = \frac{32 \cdot 15}{20} = 24 \text{ см.}$$

Ответ: 24 см.

10.1.A09



а) Дано: $\triangle ABC$, $M \in AC$, $AM : MC = 3 : 5$, $S_{\triangle ABM} = 48$ см².

Решение:

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABM}} = \frac{AC}{AM} = \frac{8}{3} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{8}{3} \cdot 48 = 128 \text{ см}^2.$$

Ответ: 128 см².

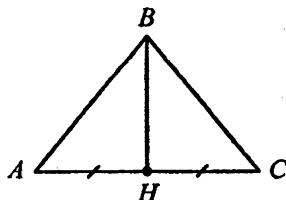
б) Дано: (см. рис. к пункту а)). $\triangle ABC$, $AM : MC = 2 : 7$. $S_{\triangle ABC} = 72$ см².
Найти: $S_{\triangle MBC}$.

Решение:

$$\frac{S_{\triangle MBC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{7}{9} = \frac{MC}{AC} \Rightarrow S_{\triangle MBC} = \frac{72 \cdot 7}{9} = 56 \text{ см}^2.$$

Ответ: 56 см².

10.1.A10



а) Дано: $\triangle ABC$ – равнобедренный, BH – высота, $BC = 30$ см. $AC = 36$ см. Найти BH .

Решение:

Т.к. $\triangle ABC$ – равнобедренный, то

$$HC = AH = \frac{1}{2} AC = \frac{36}{2} = 18 \text{ см.}$$

$$\Rightarrow BH = \sqrt{BC^2 - HC^2} = \sqrt{30^2 - 18^2} = 24 \text{ см.}$$

Ответ: 24 см.

б) Дано: (см. рис. к пункту а)), $BH = 30$ см, $AC = 32$ см. Найти BC .
Решение:

$$BH = \sqrt{BH^2 - HC^2} = \sqrt{BH^2 + \left(\frac{1}{2}AC\right)^2} = \sqrt{30^2 + 16^2} = 34 \text{ см.}$$

Ответ: 34 см.

10.1.A11

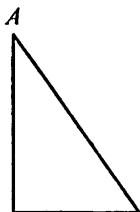
а) Другой катет равен $\sqrt{34^2 - 16^2} = 30 \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 30 = 240 \text{ см}^2$

Ответ: 240 см^2 .

б) Другой катет равен $\sqrt{35^2 - 28^2} = 21 \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 28 = 294 \text{ см}^2$.

Ответ: 294 см^2 .

10.1.A12



а) C B
Сторона равна $11 \cdot 2 = 22 \text{ см} \Rightarrow$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot 22 \cdot 25 = 275 \text{ см}^2.$$

Ответ: 275 см^2 .

10.1.A13

а) Дано: $\triangle ABC$: $\angle C = 90^\circ$, $BC = 28$ см. $\sin \angle A = \frac{4}{5}$; найти AB .

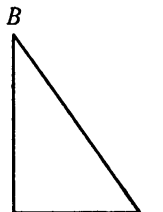
Решение: $AB = \frac{BC}{\sin \angle A} = \frac{28}{\frac{4}{5}} = 35 \text{ см.}$

Ответ: 35 см.

б) Дано: $\triangle ABC$: $\angle A = 90^\circ$, $AC = 15$ см. $\cos \angle C = \frac{5}{13}$; найти BC .

Решение: $\cos \angle C = \frac{AC}{BC} \Rightarrow BC = \frac{AC}{\cos \angle C} = \frac{15}{\frac{5}{13}} = 39 \text{ см.}$

Ответ: 39 см.

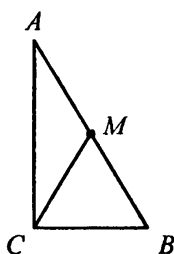


б) A C
Сторона равна $13 \cdot 2 = 26 \text{ см}$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot 21 = 273 \text{ см}^2$$

Ответ: 273 см^2 .

10.1.A14



а) Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$. CM – медиана, $AB = 54$ см. Найти CM .

Решение: $CM = \frac{1}{2}AB = 27$ см.

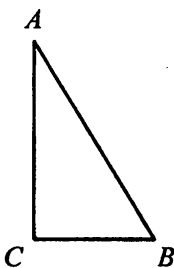
Ответ: 27 см.

б) Дано (см. рис. пункта а)) $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, $CM = 32$ см. M – середина AB . Найти AB .

Решение: $AB = 2 \text{ см} = 64$ см.

Ответ: 64 см.

10.1.A15



а) Дано: $\triangle ABC$; $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $BC = 27$ см.

Найти AB .

Решение: Катет BC лежит против угла $30^\circ \Rightarrow$

$$BC = \frac{1}{2}AB \Rightarrow AB = 2BC = 54 \text{ см.}$$

Ответ: 54 см.

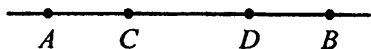
б) Дано (см. рис. пункта а)) $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, $AB = 48$ см. Найти BC .

Решение: $\angle A = 90^\circ - \angle C = 30^\circ \Rightarrow BC = \frac{1}{2}AB = 24$ см.

Ответ: 24 см.

Уровень В

10.1.B01



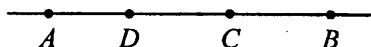
а) Дано $AC : CB = 5 : 14$; $CD : DB = 3 : 4$. Найти: $AD : DB$.

Решение:

$$CB : DB = 7 : 4; \frac{AC}{CB} \cdot \frac{CB}{DB} = \frac{5}{14} \cdot \frac{7}{4} = \frac{5}{8} = \frac{AC}{DB}; \frac{CD}{DB} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow AD : DB = (AC + CD) : DB = AC : DB + CD : DB = 11 : 8.$$

Ответ: $AD : DB = 11 : 8$.



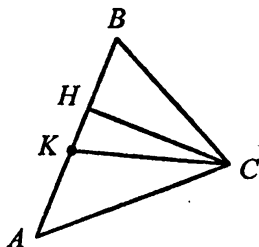
б) Дано: $\frac{AC}{CB} = \frac{10}{7}$; $\frac{AD}{DC} = \frac{2}{3}$. Найти: $AD : DB$.

Решение:

Пусть $CB = 7x$, $AC = 10x$, $\frac{AD}{AC} = \frac{2}{5} \Rightarrow AD = 4x$, $DC = 6x$, $DB = 13x$.

$$\Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{4}{13}. \quad \text{Ответ: } 4 : 13.$$

10.1.B02



а) Дано: $\triangle ABC$, CK – биссектриса, CH – высота, $\angle A = 48^\circ$, $\angle B = 76^\circ$.

Найти: $\angle HCK$.

Решение:

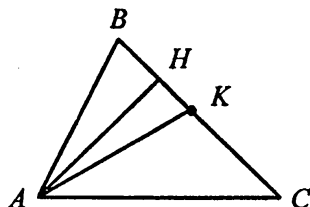
$$\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 180^\circ - 48^\circ - 76^\circ = 56^\circ \Rightarrow$$

$$\angle KCA = \frac{1}{2} \angle C = 28^\circ.$$

$$\angle HCA = 90^\circ - 48^\circ = 42^\circ.$$

$$\angle HCK = \angle HCA - \angle KCA = 42^\circ - 28^\circ = 14^\circ.$$

Ответ: 14° .



б) Дано: $\triangle ABC$, AK – биссектриса, AH – высота, $\angle B = 64^\circ$, $\angle C = 24^\circ$.

Найти: $\angle HAK$.

Решение:

$$\angle A = 180^\circ - 64^\circ - 24^\circ = 92^\circ$$

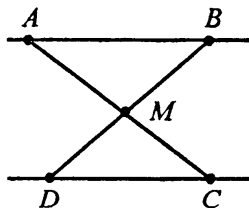
$$\angle KAC = \frac{1}{2} \cdot 92^\circ = 46^\circ$$

$$\angle HAC = 90^\circ - 24^\circ = 66^\circ$$

$$\Rightarrow \angle HAK = \angle HAC - \angle KAC = 66^\circ - 46^\circ = 20^\circ$$

Ответ: 20° .

10.1.B03



а) Дано: $AB \parallel DC$, $AB = 14$, $DC = 42$ см, $AC = 56$ см. Найти MC .

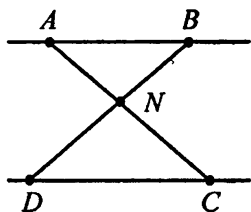
Решение:

$\triangle AMB \sim \triangle CMD$

$$\Rightarrow \frac{AM}{MC} = \frac{AB}{DC} = \frac{14}{42} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{MC}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow MC = \frac{3}{4} \cdot 56 = 42 \text{ см.}$$

Ответ: 42 см.



б) Дано: $AB \parallel DC$, $AB = 17$ см, $DC = 51$ см, $BD = 64$ см. Найти BN .

Решение:

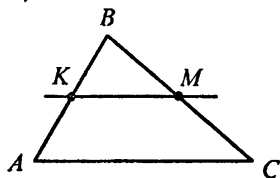
$$\triangle ABN \sim \triangle CBN$$

$$\frac{BN}{DC} = \frac{AB}{DC} = \frac{17}{51} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{BN}{BD} = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{см.}$$

$$\Rightarrow BN = \frac{1}{4} \cdot BD = \frac{64}{4} = 16 \text{ см.}$$

Ответ: 16 см.

10.1.B04



а) Дано: $\angle ABC$, $KM \parallel AC$, $BK : KA = 2 : 5$, $AC = 21$ см. Найти KM .

Решение:

$$BK : KA = 2 : 5 \Rightarrow BK : AB = 2 : 7,$$

$$\triangle KBM \sim \triangle ABC$$

$$\Rightarrow \frac{KM}{AC} = \frac{BK}{AB} \Rightarrow KM = \frac{BK \cdot AC}{AB} = \frac{2 \cdot 21}{7} = 6 \text{ (см)}$$

Ответ: 6 см.

б) Дано: (см. рис. пункта а)). $\triangle ABC$, $\frac{BK}{KA} = \frac{3}{4}$, $KM = 18$ см, $KM \parallel AC$.

Найти AC .

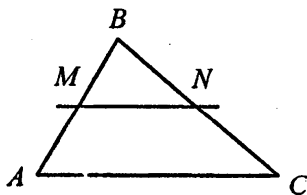
Решение:

$$\frac{BK}{KA} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{BK}{AB} = \frac{3}{7}; \triangle ABC \sim \triangle KBM \Rightarrow \frac{AC}{KM} = \frac{AB}{KB} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC = KM \cdot \frac{AB}{KB} = 18 \cdot \frac{7}{3} = 42 \text{ (см)}.$$

Ответ: 42 см.

10.1.B05



а) Дано: $\triangle ABC$, $MN \parallel AC$, $MN = 18$ см, $AC = 54$ см, $NC = 32$ см. Найти BN .

Решение:

$$\angle MBN \sim \angle ABC \Rightarrow$$

$$\frac{BN}{BC} = \frac{MN}{AC} = \frac{18}{54} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{BN}{NC} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow BN = \frac{NC}{2} = 16 \text{ см.}$$

Ответ: 16 см.

б) Дано: (см. рис. пункта а)) $\triangle ABC$, $MN \parallel AC$, $MN = 13$ см, $AC = 52$ см, $NC = 36$ см. Найти BC .

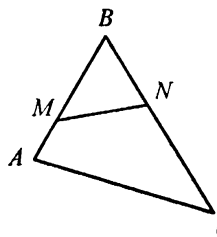
Решение:

$$\triangle ABC \sim \triangle MBN \Rightarrow \frac{BN}{BC} = \frac{MN}{AC} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{BN}{NC} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BN = \frac{NC}{3} = 12 \Rightarrow BC = BN + NC = 12 + 36 = 48 \text{ см.}$$

Ответ: 48 см.

10.1.B06



а) Дано: $\triangle ABC$, $\angle BMN = \angle BCA$, $AC = 48$ см, $AB = 42$ см, $BN = 28$ см. Найти MN .

Решение:

$\triangle BNM \sim \triangle BAC$,

$$\frac{BN}{AB} = \frac{MN}{AC} \Rightarrow MN = \frac{BN \cdot AC}{AB} = \frac{28 \cdot 48}{42} = 32 \text{ см.}$$

Ответ: 32 см.

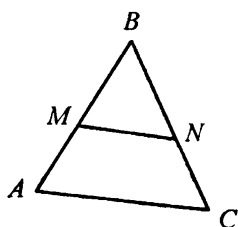
б) Дано: $\triangle ABC$ (см. рис. пункта а)), $\angle BNM = \angle BCA$, $MN = 27$ см, $AB = 52$ см, $AC = 36$ см. Найти BN .

Решение:

$$\triangle BNM \sim \triangle BAC, \frac{BN}{MN} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow BN = \frac{AB \cdot MN}{AC} = \frac{52 \cdot 27}{36} = 39 \text{ см.}$$

Ответ: 39 см.

10.1.B07



а) Дано: $\triangle ABC$, MN – средняя линия, $S_{MBN} = 32$ см².
Найти $S_{\triangle ABC}$.

Решение:

$\triangle MBN \sim \triangle ABC$,

$$K = \frac{MN}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{S_{MBN}}{K^2} = 32 \cdot 4 = 128 \text{ см}^2.$$

Ответ: 128 см².

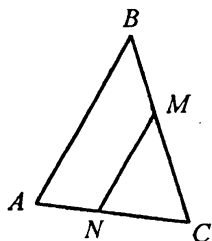
б) Дано: $\triangle ABC$, MN – средняя линия, $S_{ABC} = 76$ см².
Найти S_{MCN} .

Решение:

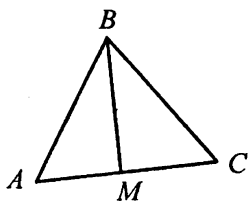
$\triangle BCA \sim \triangle MCN$, $\Rightarrow$

$$K = \frac{MN}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{MCN} = K^2 \cdot S_{ABC} = 76 \cdot \frac{1}{4} = 19 \text{ см}^2.$$

Ответ: 19 см².



10.1.B08



а)

Дано: $\triangle ABC$, $A(2; 5)$, $B(0; 0)$, $C(4; 3)$, BM – медиана.

Найти BM .

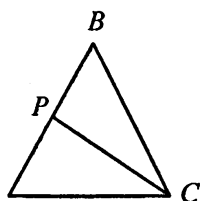
Решение:

$$M\left(\frac{2+4}{2}; \frac{5+3}{2}\right) \Rightarrow M(3; 4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BM = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} =$$

$$= \sqrt{9+16} = 5$$

Ответ: 5.



б)

Дано: $\triangle ABC$, $A(-3; -2)$, $B(-6; 2)$, $C(0; 0)$, CP – медиана.

Найти CP .

Решение:

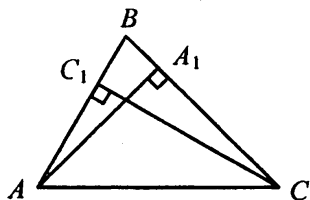
$$P\left(\frac{-3-6}{2}; \frac{-2+2}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(-4,5; 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CP = \sqrt{(-4,5-0)^2 + (0-0)^2} = 4,5$$

Ответ: 4,5.

10.1.B09



а) Дано: $\triangle ABC$, AA_1 , CC_1 – высоты, $AB = 32$ см, $BC = 24$ см, $AA_1 = 16$ см.

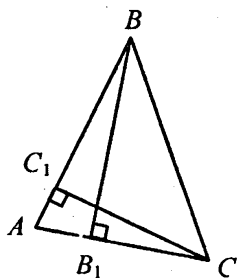
Найти CC_1 .

Решение:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AA_1 \cdot BC = \frac{1}{2} CC_1 \cdot AB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CC_1 = \frac{AA_1 \cdot BC}{AB} = \frac{16 \cdot 24}{32} = 12 \text{ см.}$$

Ответ: 12 см.



б) Дано: $\triangle ABC$, CC_1 , BB_1 – высоты, $CC_1 = 9$ см, $BB_1 = 12$ см, $AB = 24$ см.

Найти AC .

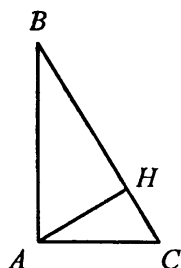
Решение:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BB_1 = \frac{1}{2} AB \cdot CC_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC = \frac{AB \cdot CC_1}{BB_1} = \frac{24 \cdot 9}{12} = 18 \text{ см.}$$

Ответ: 18 см.

10.1.B10



а) Дано: $\triangle ABC$ – прямоугольный ($\angle A = 90^\circ$),
 $AB = 15$ см, $AC = 20$ см, AH – высота, найти AH .

Решение:

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} AH \cdot BC \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC},$$

$$\text{но } BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}} = \frac{15 \cdot 20}{\sqrt{15^2 + 20^2}} = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12 \text{ см.}$$

Ответ: 12 см.

б) Дано: (см. рис. пункта а)), $\triangle ABC$ – прямоугольный ($\angle A = 90^\circ$),
 $AB = 30$ см, $BC = 50$ см, найти AH – высота.

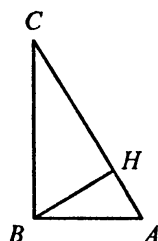
Решение:

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} AH \cdot BC \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC}, \text{ но } AC = \sqrt{BC^2 - AB^2}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{AB \cdot \sqrt{BC^2 - AB^2}}{BC} = \frac{30 \cdot \sqrt{50^2 - 30^2}}{50} = 24 \text{ см.}$$

Ответ: 24 см.

10.1.B11



а) Дано: $\triangle ABC$, $\angle B = 90^\circ$, $AH = 6$ см, $AC = 24$ см.
 Найти AB .

Решение:

$$\triangle ABC \sim \triangle AHB \Rightarrow$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AB = \sqrt{AC \cdot AH} = \sqrt{6 \cdot 24} = 12 \text{ см.}$$

Ответ: 12 см.

б) Дано: (см. рис. пункта а)), $\triangle ABC$, $\angle B = 90^\circ$, BH – высота, $AH = 28$ см,
 $CH = 7$ см. Найти BH .

Решение:

$$\triangle ABH \sim \triangle BCH \Rightarrow \frac{CH}{BH} = \frac{BH}{AH} \Rightarrow BH = \sqrt{CH \cdot AH} = \sqrt{28 \cdot 7} = 14 \text{ см.}$$

Ответ: 14 см.

10.1.B12

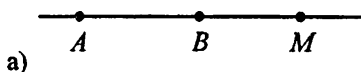
а) Треугольник прямоугольный, т.к. $26^2 = 10^2 + 24^2$. Тангенс меньшего угла равен $\frac{10}{24}$.

Ответ: $\frac{5}{12}$.

б) Треугольник прямоугольный, т.к. $20^2 = 12^2 + 16^2$. Синус меньшего из углов равен $\frac{12}{20}$.

Ответ: $\frac{3}{5}$.

10.1.B13

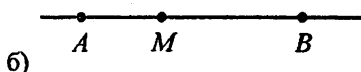


Дано: $AB : BM = \frac{5}{3}$, $A(-2; 3)$, $B(3; 8)$. Найти координаты точки M .

Решение:

$$\overrightarrow{AB}\{5; 5\}, \overrightarrow{BM} = \frac{3}{5} \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BM}\{3; 3\} \Rightarrow M(3+3; 3+8); M(6; 11).$$

Ответ: $(6; 11)$.



Дано: $\frac{AM}{MB} = \frac{3}{4}$; $A(4; 3)$, $B(11; 10)$. Найти координаты M .

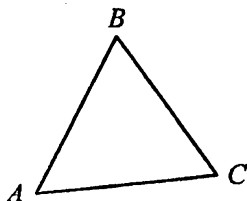
Решение:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{3}{7}; \overrightarrow{AB}\{7; 7\} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{3}{7} \overrightarrow{AB}\{3; 3\}$$

$$\Rightarrow M(3+4; 3+3) \Rightarrow M(7; 6).$$

Ответ: $(7; 6)$.

10.1.B14



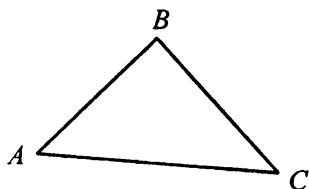
а) Дано: $\triangle ABC$, $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 120^\circ$
 $BC = 12\sqrt{6}$ см. Найти AC .

Решение:

По теореме синусов: $\frac{AC}{\sin \angle B} = \frac{BC}{\sin \angle C} \Rightarrow$

$$\Rightarrow AC = \frac{BC \cdot \sin \angle B}{\sin \angle C} = \frac{12\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 36 \text{ см.}$$

Ответ: 36 см.



б) Дано: $\triangle ABC$, $\angle B = 135^\circ$, $\angle C = 30^\circ$,
 $AB = 21\sqrt{2}$ см. Найти AC .

Решение:

По теореме синусов:

$$\frac{AC}{\sin \angle B} = \frac{BC}{\sin \angle C} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC = \frac{AB \cdot \sin \angle B}{\sin \angle C} = \frac{21\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 42 \text{ см.}$$

Ответ: 42 см.

10.1.B15

а) Меньший угол лежит против меньшей стороны, т.е. 10 см.

$$\cos \alpha = \frac{12^2 + 14^2 - 10^2}{2 \cdot 12 \cdot 14} = \frac{5}{7}.$$

Ответ: $\frac{5}{7}$.

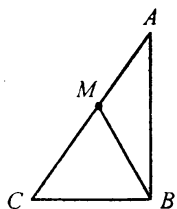
б) Большой угол лежит против большей стороны, т.е. 16 см.

$$\cos \alpha = \frac{12^2 + 14^2 - 16^2}{2 \cdot 12 \cdot 14} = \frac{1}{4}.$$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Уровень С

10.1.C01



а) Дано: $\triangle ABC$, $AB = AC = 9$ см, $BC = 6$ см,
 $AM = 3$ см. Найти BM .

Решение:

По теореме косинусов

$$\cos \angle ACB = \frac{AC^2 + CB^2 - AB^2}{2BC \cdot AC} = \frac{CB^2}{2BC \cdot AC} = \frac{BC}{2AC} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

Далее опять же по теореме косинусов
 $(CM = AC - AM = 6 \text{ см}).$

$$BM^2 = MC^2 + CB^2 - 2MC \cdot CB \cdot \cos \angle ACB = 36 + 36 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} = 48$$

$$\Rightarrow BM = 4\sqrt{3}.$$

Ответ: $4\sqrt{3}$ см.

б) Дано: (см. рис. пункта а)). $\triangle ABC$, $AM = 4$, $AB = AC = 16$ см, $BC = 8$ см. Найти BM .

Решение:

По теореме косинусов

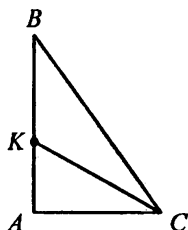
$$\cos \angle ACB = \frac{AC^2 + CB^2 - AB^2}{2AC \cdot CB} = \frac{CB}{2AC} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}.$$

Далее снова по теореме косинусов ($MC = AC - AM = 12$ см).

$$BM^2 = MC^2 + CB^2 - 2MC \cdot CB = 12^2 + 8^2 - 2 \cdot 12 \cdot 8 \cdot \frac{1}{4} = 160 \Rightarrow BM = 4\sqrt{10} \text{ см.}$$

Ответ: $4\sqrt{10}$ см.

10.1.C02



а) Дано: $\triangle ABC$, $\angle A = 90^\circ$, CK – биссектриса, $BC = 25$ см, $AC = 7$ см. Найти CK .

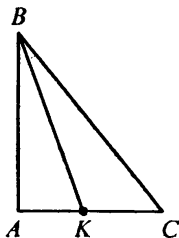
Решение:

$$\frac{S_{ACK}}{S_{BCK}} = \frac{\frac{1}{2} AK \cdot AC}{\frac{1}{2} BK \cdot AC} = \frac{\frac{1}{2} KC \cdot AC \cdot \sin \angle ACK}{\frac{1}{2} KC \cdot BC \cdot \sin \angle KCB} \Rightarrow$$

$$\frac{AK}{BK} = \frac{AC}{BC} = \frac{7}{25} \Rightarrow \frac{AK}{AB} = \frac{7}{32}, AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} =$$

$$= 24 \Rightarrow AK = \frac{7 \cdot 24}{32} = 5,25 \text{ см. } CK = \sqrt{AK^2 + AC^2} = 8,75.$$

Ответ: 8,75 см.



б) Дано: $\triangle ABC$, $\angle A = 90^\circ$, $BC = 24$, $AB = 3$, BK – биссектриса. Найти BK .

Решение:

Рассуждая: как и в пункте а) получим

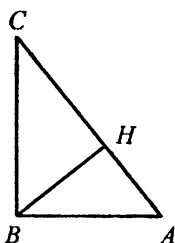
$$\frac{AK}{KC} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{AK}{AC} = \frac{1}{9} \Rightarrow AK = \frac{1}{9} AC$$

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} \Rightarrow BK = \sqrt{AB^2 + AK^2} =$$

$$= \sqrt{AB^2 + \frac{BC^2 - AB^2}{81}} = \frac{1}{9} \sqrt{80AB^2 + BC^2} = 4.$$

Ответ: 4.

10.1.C03



а) Дано: $\triangle ABC$, $\angle B = 90^\circ$, BH – высота, $AH = 6$ см, $BC = 4$ см. Найти периметр $\triangle ABC$.

Решение:

$$\triangle CBA \sim \triangle BHA \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{AB}{AC}$$

$$\text{Пусть } AB = x, AC = \sqrt{CB^2 + AB^2} = \sqrt{16 + x^2}$$

$$\Rightarrow AB^2 = AH \cdot AC \Rightarrow x^2 = 6 \cdot \sqrt{16 + x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^4 - 36 \cdot 16 - 36x^2 = 0 \Rightarrow (x^2 - 48)(x^2 + 12) = 0 \Rightarrow x = 4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{16 + 48} = 8 \Rightarrow P_{ABC} = AB + BC + AC = (4\sqrt{3} + 12) \text{ см.}$$

Ответ: $(4\sqrt{3} + 12)$ см.

б) Дано: (см. рис. пункта а)), $\triangle ABC$, $\angle B = 90^\circ$, BH – высота, $CH = 8$ см, $AB = 3$ см. Найти периметр ABC .

Решение:

$$\triangle CBH \sim \triangle CAB \Rightarrow \frac{CH}{CB} = \frac{CB}{AC}$$

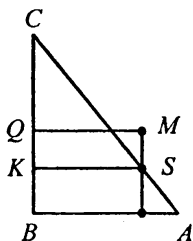
$$\text{Пусть } CB = x, AC = \sqrt{AB^2 + CB^2} = \sqrt{9 + x^2} \quad CB^2 = AC \cdot CH \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 8 \cdot \sqrt{9 + x^2} \Rightarrow x^4 - 64x^2 - 64 \cdot 9 = 0 \Rightarrow (x^2 - 72)(x^2 + 12) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}. \quad AC = \sqrt{9 + 72} = 9 \Rightarrow P_{ABC} = 9 + 3 + 6\sqrt{2} = 12 + 6\sqrt{2}$$

Ответ: $12 + 6\sqrt{2}$.

10.1.C04



а) Дано: $\triangle ABC$, $\angle B = 90^\circ$, $AB = 7$ см, $BC = 10$ см.

M лежит внутри угла ABC , $MP = 5$, $MQ = 4$, MP и MQ – расстояние до AB и BC соответственно. Найти расположение точки M .

Решение:

Пусть прямая MP пересекает AC в точке S , опустим перпендикуляр SK , тогда $SK = MQ = 4$.

$$\triangle CKS \sim \triangle CBA \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{CK}{CB} = \frac{KS}{AB} \Rightarrow CK = \frac{CB \cdot KS}{AB} = \frac{10 \cdot 4}{7} = \frac{40}{7} > 5$$

Т.к. $CQ = CB - MP = 5 \Rightarrow M$ находится за точкой S , т.е. вне треугольника.

Ответ: вне треугольника.

б) Дано: $\triangle ABC$, $\angle B = 90^\circ$, $AB = 6$, $BC = 10$ см.

M лежит внутри угла ABC , $MP = 6$, $MQ = 3$, MP и MQ – расстояние до AB и BC соответственно (см. рис. пункта а)). Найти расположение точки M .

Решение:

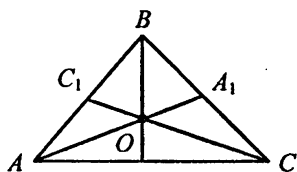
Сделаем такие же построения, как и в пункте а).

Тогда $SK = 3$ см $= MQ$. $CK = \frac{CB \cdot SK}{AB} = \frac{10 \cdot 3}{6} = 5$ см.

$CQ = CB - MP = 4 \Rightarrow CQ < CK$. $\Rightarrow M$ находится вне $\triangle ABC$.

Ответ: вне треугольника.

10.1.C05



а) Дано: $\triangle ABC$, AA_1 , BB_1 , CC_1 – медианы, $\angle BOC = 90^\circ$, $BC = 42$ см. Найти AA_1 .

Решение:

В $\triangle BOC$, OA_2 – медиана, проведенная из вершины прямого угла $\Rightarrow$

$$OA_2 = \frac{1}{2} BC = 21 \text{ см.}$$

Но $AO : OA_1 = 2 : 1 \Rightarrow OA_2 = \frac{1}{3} AA_1 \Rightarrow AA_1 = 3OA_1 = 63$ см.

Ответ: 63 см.

б) Дано: (см. рис. пункта а)), AA_1 , BB_1 , CC_1 – медианы, $\angle BOC = 90^\circ$, $AA_1 = 36$ см. Найти BC .

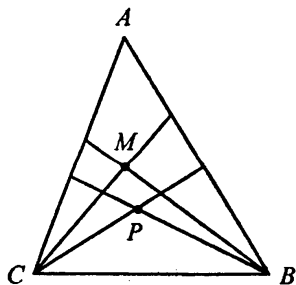
Решение:

Т.к. $AO : OA_1 = 2 : 1 \Rightarrow OA_1 = \frac{1}{3} AA_1 = 12$ см.

OA_1 – медиана прямоугольного $\triangle BOC$, проведенная из вершины прямого угла $\Rightarrow BC = 2OA_1 = 12 \cdot 2 = 24$ см.

Ответ: 24 см.

10.1.C06



а) Дано: $\triangle ABC$, P – точка пересечения прямых, содержащих высоты к AC и AB , M – точка пересечения биссектрис углов B и C , $\angle CPB - \angle CMB = 21^\circ$. Найти $\angle A$.

Решение:

$$\angle CPB = 180^\circ - \angle PCB - \angle PBC = 180^\circ - (90^\circ - \angle CBA) - (90^\circ - \angle ACB) = \angle CBA + \angle ACB$$

$$\angle CMB = 180^\circ - \angle MCB - \angle MBC =$$

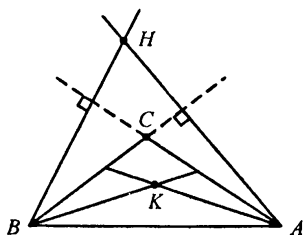
$$180^\circ - \frac{1}{2} \angle ABC - \frac{1}{2} \angle CBA \Rightarrow$$

$$\angle CPM - \angle CMB = \frac{3}{2}(\angle ACB + \angle CBA) - 180^\circ = 21^\circ \Rightarrow$$

$$\angle ACB + \angle CBA = \frac{2}{3}(180^\circ + 21^\circ) = 134^\circ, \text{ но } \angle A = 180^\circ - \angle ACB - \angle CBA =$$

$$180^\circ - 134^\circ = 46^\circ.$$

Ответ: 46° .



б) Дано: $\triangle ABC$, H – точка пересечения прямых, содержащих высоты к AC и CB , K – точка пересечения биссектрис углов A и B , $\angle AKB - \angle AHB = 18^\circ$. Найти $\angle C$.

Решение:

Аналогично пункту а), можно записать:

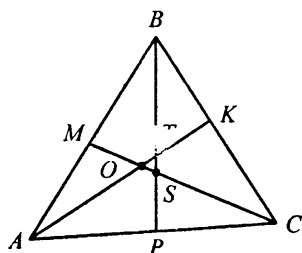
$$\angle AKB = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B), \angle BHA = \angle A + \angle B$$

$$\Rightarrow \angle AKB - \angle BHA = 180^\circ - \frac{3}{2}(\angle A + \angle B) = 18^\circ \Rightarrow$$

$$\angle A + \angle B = \frac{2}{3}(180^\circ - 18^\circ) = 108^\circ \Rightarrow \angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ.$$

Ответ: 72° .

10.1.C07



а) Дано: $\triangle ABC$, AK – биссектриса, CM и AK – медианы. $\frac{BT}{TP} = \frac{5}{4}$, найти $\frac{CO}{OM}$.

Решение:

Т.к. AT – биссектриса, $\triangle ABP$, то

$$\frac{AB}{AP} = \frac{BT}{TP} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{8}.$$

Т.к. AO – биссектриса $\triangle AMC$, то

$$\frac{CO}{OM} = \frac{AC}{AM} = 2 \frac{AC}{AB} = \frac{16}{5}.$$

Ответ: $16 : 5$.

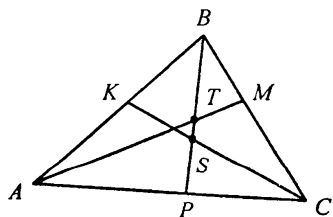
б) Дано: $\triangle ABC$, BP – биссектриса, AM и CK – медианы. $\frac{CS}{SK} = \frac{7}{2}$, найти $\frac{AT}{TM}$.

$$\frac{CS}{SK} = \frac{7}{2}, \text{ найти } \frac{AT}{TM}.$$

Решение:

Т.к. BT – биссектриса $\triangle ABM$, то

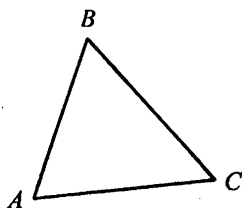
$$\frac{AB}{BM} = \frac{AT}{TM} \Rightarrow \frac{AT}{TM} = 2 \frac{AB}{BC}.$$



Т.к. BS – биссектриса $\triangle KBC$, то $\frac{KB}{BC} = \frac{KS}{SC} = \frac{2}{7} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{4}{7} \Rightarrow \frac{AT}{TM} = \frac{8}{7}$.

Ответ: $\frac{8}{7}$.

10.1.C08



а) Дано: $\triangle ABC$, $AB = 16$ см, $BC = 17$ см, $AC = 22$ см. Где расположено основание выоты треугольника, проведенной из вершины A .

Решение:

Больший угол в треугольнике против стороны AC , т.е. $\angle B$, т.к. $2AB \cdot BC \cdot \cos \angle B = AB^2 + BC^2 - AC^2 = 61 > 0$, т.е. $\angle B < 90^\circ \Rightarrow$ высота падает на сторону BC .

Ответ: на сторону BC .

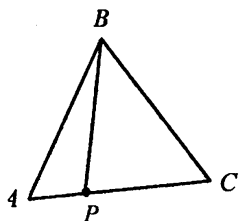
б) Дано: $\triangle ABC$, $AB = 18$ см, $BC = 19$ см, $AC = 26$ см. (см. рис. пункта а)), где расположено основание высоты, опущенной из вершины B .

Решение:

Больший угол против стороны AC , т.е. $\angle B \Rightarrow \angle A, \angle C < 90^\circ \Rightarrow$ высота падает на AC .

Ответ: на сторону AC .

10.1.C09



а) Дано: $\triangle ABC$, $\angle CBP = \angle CAB$, $AC : BC = 5 : 4$.

Найти $\frac{S_{CBP}}{S_{ABP}}$.

Решение:

$$\begin{aligned} \triangle CBP \sim \triangle CAB &\Rightarrow \frac{CB}{CP} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{AC}{CP} = \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{25}{16} \\ \Rightarrow \frac{AP}{CP} &= \frac{AC - CP}{CP} = \frac{25}{16} - 1 = \frac{9}{16} \cdot \frac{S_{CBP}}{S_{ABP}} = \frac{AP}{PC} = \frac{9}{16} \end{aligned}$$

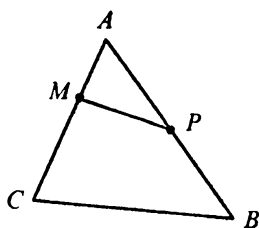
Ответ: $\frac{9}{16}$.

б) Дано: (см. рис. пункта а)), $\angle CBP = \angle CAB$, $\frac{AC}{BC} = \frac{6}{5}$. Найти: $AP : PC$.

Решение:

$$\begin{aligned} \triangle CBP \sim \triangle CAB &\Rightarrow \frac{CB}{CP} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{AC}{CP} = \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{36}{25} \\ \Rightarrow \frac{AP}{CP} &= \frac{AC - CP}{CP} = \frac{36}{25} - 1 = \frac{11}{25} \quad \text{Ответ: } \frac{11}{25} \end{aligned}$$

10.1.C10



а) Дано: $\triangle ABC$, $AP : PB = 5 : 4$, $AM : MC = 3 : 5$

Найти $\frac{S_{APM}}{S_{MCP}}$.

Решение:

$$\frac{S_{APM}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} AM \cdot AP \cdot \sin \angle A}{\frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin \angle A} = \left(\frac{AM}{AC} \right) \left(\frac{AP}{AB} \right)$$

$$\frac{AM}{AC} = \frac{1}{1 + \frac{MC}{AC}} = \frac{3}{8}; \frac{AP}{AB} = \frac{1}{1 + \frac{PB}{AP}} = \frac{5}{9} \Rightarrow \frac{S_{APM}}{S_{ABC}} = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{24} \Rightarrow \frac{S_{APM}}{S_{MCP}} = \frac{5}{19}$$

Ответ: $\frac{5}{19}$.

б) Дано: (см. рис. пункта а)) $\triangle ABC$, $AP : PB = 2 : 5$, $AM : MC = 1 : 4$.

Найти $\frac{S_{APM}}{S_{MCP}}$.

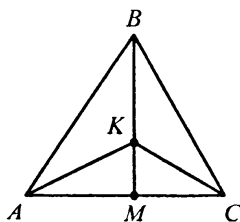
Решение:

$$\frac{S_{APM}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} AM \cdot AP \cdot \sin \angle A}{\frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin \angle A} = \left(\frac{AM}{AC} \right) \left(\frac{AP}{AB} \right)$$

$$\frac{AM}{AC} = \frac{1}{1 + \frac{MC}{AC}} = \frac{1}{5}; \frac{AP}{AB} = \frac{1}{1 + \frac{PB}{AP}} = \frac{2}{7}; \frac{S_{APM}}{S_{ABC}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{35} \Rightarrow \frac{S_{APM}}{S_{MCP}} = \frac{2}{33}$$

Ответ: $\frac{2}{33}$.

10.1.C11



а) Дано: $\triangle ABC$, $BK : KM = 7 : 5$, $S_{AKC} = 48 \text{ см}^2$.

Найти $S_{(ABCK)}$.

Решение:

$$\frac{S_{KBC}}{S_{KMC}} = \frac{\frac{1}{2} KB \cdot KC \cdot \sin \angle BKC}{\frac{1}{2} KM \cdot KC \cdot \sin(180^\circ - \angle BKC)} = \frac{KB}{KM} = \frac{7}{5}$$

$$\text{Аналогично } \frac{S_{ABK}}{S_{AKM}} = \frac{KB}{KM} = \frac{7}{5}$$

$$\Rightarrow S_{ABCK} = S_{ABK} + S_{KBC} = \frac{7}{5}(S_{AKM} + S_{KMC}) = \frac{7}{5} \cdot 48 = 67,2 \text{ см}^2.$$

Ответ: 67,2 см².

б) (см. рис. пункта а). Дано: $BK : KM = 4 : 9$, $S_{ABC} = 39 \text{ см}^2$. Найти $S_{(ABCK)}$.

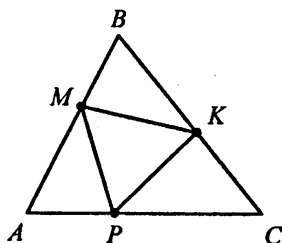
Решение:

Аналогично а) получим, что

$$\frac{S_{ABCK}}{S_{AKC}} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{S_{ABCK}}{S_{ABC}} = \frac{4}{13} \Rightarrow S_{ABCK} = \frac{4}{13} \cdot 39 = 12 \text{ см}^2.$$

Ответ: 12 см².

10.1.C12



а) Дано: $\triangle ABC$, $AM : MB = 2 : 1$, $BK : KC = 3 : 2$, $CP : PA = 3 : 1$, $S(ABC) = 90 \text{ см}^2$.

Найти $S(PMK)$.

Решение:

$$\frac{S_{MBK}}{S_{ABC}} = \frac{MB \cdot BK}{AB \cdot BC} = \left(\frac{MB}{AB}\right) \left(\frac{BK}{BC}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{S_{CKP}}{S_{ABC}} = \frac{CK \cdot CP}{CB \cdot CA} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{S_{AMP}}{S_{ABC}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AP}{AC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6} \Rightarrow S_{MPK} = S_{ABC} - S_{MBK} - S_{CKP} - S_{AMP} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{10} - \frac{1}{5}\right) S_{ABC} = \frac{16}{30} \cdot 90 = 48 \text{ см}^2.$$

Ответ: 48 см².

б) (см. рис. пункта а). Дано: $AM : MB = 1 : 2$, $BK : KC = 2 : 3$, $CP : PA = 1 : 3$, $S_{MPK} = 60 \text{ см}^2$. Найти S_{ABC} .

Решение:

$$\frac{S_{MBK}}{S_{ABC}} = \frac{MB}{AB} \cdot \frac{BK}{BC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{7}{15}$$

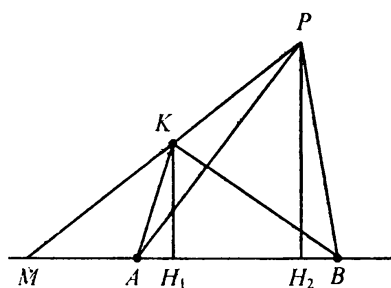
$$\frac{S_{CKP}}{S_{ABC}} = \frac{CK}{CB} \cdot \frac{CP}{CA} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{20}$$

$$\frac{S_{AMP}}{S_{ABC}} = \frac{AP}{AC} \cdot \frac{AM}{AB} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow S_{MPK} = \left(1 - \frac{7}{15} - \frac{3}{20} - \frac{1}{4}\right) S_{ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \Rightarrow S_{ABC} = 3 \cdot 60 \text{ см}^2 = 180 \text{ см}^2.$$

Ответ: 180 см².

10.1.C13



а) Дано: $\triangle AKB$ и APB ,
 $S(AKB) : S(APB) = 2 : 5$.

Найти $\frac{MK}{KP}$.

Решение:

Опустим высоты KH_1 и $PH_2 \Rightarrow$

$$\frac{KH_1}{PH_2} = \frac{S_{AKB}}{S_{APB}} = \frac{2}{5}$$

$$\triangle MKH_1 \sim \triangle MPH_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{MK}{MP} = \frac{KH_1}{PH_2} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{MK}{KP} = \frac{2}{3}$$

Ответ: 2 : 3.

б) Дано: (см. рис. пункта а) $\triangle AKB$ и APB , $S(AKB) : S(APB) = 3 : 4$.

Найти $\frac{MK}{KP}$.

Решение:

$$\text{Аналогично пункту а) получаем } \frac{MK}{MP} = \frac{KH_1}{PH_2} = \frac{S_{AKB}}{S_{APB}} = \frac{3}{4} \Rightarrow MK : KP = 3 : 1.$$

Ответ: 3 : 1.

10.1.C14

а) Дано: $\triangle ABC$, $A(-3; -2)$, $B(-1; -7)$, $C(5; -2)$. Найти $S(ABC)$.

Решение:

$$AB = \sqrt{(-1+3)^2 + (-7+2)^2} = \sqrt{29}, \overline{AB}\{2; -5\}$$

$$AB = \sqrt{(5+1)^2 + (-2+7)^2} = \sqrt{61}, \overline{BC}\{6; 5\}$$

$$\cos \angle B = \frac{(\overline{AB}, \overline{BC})}{|\overline{AB}| |\overline{BC}|} = \frac{12 - 25}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{61}} = -\frac{13}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{61}}$$

$$\sin \angle B = \sqrt{1 - \cos^2 \angle B} = \frac{40}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{61}}$$

$$\Rightarrow S_{(ABC)} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \angle B = \frac{1}{2} \sqrt{29} \cdot \sqrt{61} \cdot \frac{40}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{61}} = 20 \text{ см}^2.$$

Ответ: 20 см².

б) Дано: $\triangle ABC$, $A(-2; -3)$, $B(4; 2)$, $C(-2; 5)$. Найти $S(ABC)$.

Решение:

$$\overline{AB}\{6; 5\}, |\overline{AB}| = \sqrt{36 + 25} = \sqrt{61}; \overline{BC}\{-6; 3\}, |\overline{BC}| = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45}$$

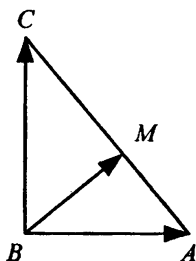
$$\cos \angle B = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{|\overline{AB}| |\overline{BC}|} = \frac{15 - 36}{\sqrt{61} \cdot \sqrt{45}} = -\frac{21}{\sqrt{61} \cdot \sqrt{45}} = -\frac{7}{\sqrt{61} \cdot \sqrt{45}}$$

$$\sin \angle B = \sqrt{1 - \cos^2 \angle B} = \frac{16}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{61}}$$

$$\Rightarrow S_{(ABC)} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \angle B = \frac{1}{2} \sqrt{61} \cdot \sqrt{45} \cdot \frac{16}{\sqrt{61} \cdot \sqrt{45}} = 24 \text{ см}^2.$$

Ответ: 24 см².

10.1.C15



а) Дано: $\triangle ABC$, $\angle B = 90^\circ$, $AM : MC = 2 : 3$, $AB = 10$ см
 $KB = 5$ см. Найти разложение $\overline{BM}$ по векторам $\overline{BA}$
 и $\overline{BC}$ и $|\overline{BM}|$.

Решение:

$$\overline{AC} = \overline{BC} - \overline{BA}, \frac{AM}{MC} = \frac{2}{5} \Rightarrow \overline{AM} = \frac{2}{5} \overline{AC}$$

$$\Rightarrow \overline{BM} = \overline{BA} + \overline{AM} = \overline{BA} + \frac{2}{5} \overline{BC} - \frac{2}{5} \overline{BA} = \frac{3}{5} \overline{BA} + \frac{2}{5} \overline{BC}$$

$$\text{Т.к. } \overline{BA} \cdot \overline{BC} = 0 \Rightarrow |\overline{BM}| = \sqrt{\left(\frac{3}{5} \overline{BA} + \frac{2}{5} \overline{BC}\right)^2} = \frac{1}{5} \sqrt{9BA^2 + 4BC^2} = 2\sqrt{10}$$

$$\text{Ответ: } \frac{3}{5} \overline{BA} + \frac{2}{5} \overline{BC}, 2\sqrt{10}.$$

б) Дано: (см. рис. пункта а)), $\angle B = 90^\circ$, $AM : MC = 3 : 5$, $AB = 16$ см,
 $BC = 8$ см.

Решение:

$$\overline{AC} = \overline{BC} - \overline{BA}, \frac{AM}{MC} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{3}{8} \Rightarrow \overline{AM} = \frac{3}{8} \overline{AC}$$

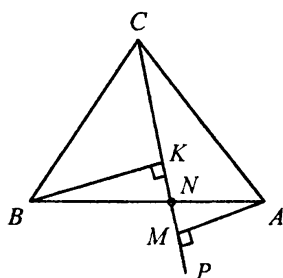
$$\Rightarrow \overline{BM} = \overline{BA} + \overline{AM} = \overline{BA} + \frac{3}{8} \overline{BC} - \frac{3}{8} \overline{BA} = \frac{5}{8} \overline{BA} + \frac{3}{8} \overline{BC}$$

$$|\overline{BM}| = \sqrt{\left(\frac{5}{8} \overline{BA} + \frac{3}{8} \overline{BC}\right)^2} = \frac{1}{8} \sqrt{25BA^2 + 9BC^2} = \sqrt{109}$$

$$\text{Ответ: } \sqrt{109}; \overline{BM} = \frac{5}{8} \overline{BA} + \frac{3}{8} \overline{BC}.$$

Уровень D

10.1.D01



а) Дано: $\triangle ABC$ – равносторонний,
 $BK \perp CP$, $AM \perp CP$, $BK = 7$ см, $AM = 1$ см.

Найти: AB .

Решение:

$$\triangle BKN \sim \triangle AMN \Rightarrow \frac{BN}{NA} = \frac{BK}{AM} = 7 \Rightarrow BN = \frac{7}{8} AB.$$

Пусть $AB = BC = AC = a$, тогда по теореме косинусов

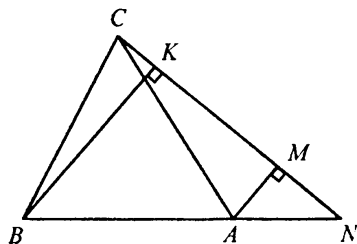
$$CN^2 = a^2 + \frac{49}{64}a^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{7}{8}a \cdot \cos 60^\circ =$$

$$= a^2 \left(1 + \frac{49}{64} - \frac{7}{8} \right) = \frac{57}{64}a^2 \Rightarrow CN = \frac{\sqrt{57}}{8}a.$$

$$\text{С другой стороны: } S_{BCN} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{7}{8}a \cdot \sin 60^\circ = \frac{7}{16}a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7}{32}a^2\sqrt{3}$$

$$\text{и } S_{BCN} = \frac{1}{2}BK \cdot CN = \frac{7}{2} \cdot \frac{\sqrt{57}}{8}a = \frac{7\sqrt{57}}{16}a \Rightarrow \frac{7}{32}a^2\sqrt{3} = \frac{7\sqrt{57}}{16}a \Rightarrow a = 2\sqrt{19}$$

Ответ: $2\sqrt{19}$.



б) Дано: $\triangle ABC$ – равносторонний,
 $BK \perp CN$, $AM \perp CN$, $AM = 2$ см,
 $BK = 5$ см. Найти: AB .

Решение:

$$\triangle BKN \sim \triangle AMN \Rightarrow$$

$$\frac{BN}{AN} = \frac{BK}{AM} = \frac{5}{2} \Rightarrow BN = \frac{5}{2}AN = \frac{5}{3}AB.$$

Пусть $AB = BC = AC = a$, тогда по теореме косинусов

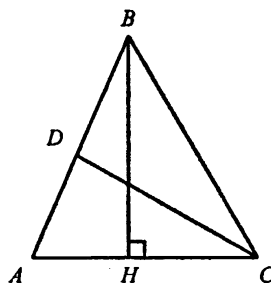
$$CN^2 = a^2 + \frac{25}{9}a^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{5}{3}a \cdot \frac{1}{2} = a^2 \left(1 + \frac{25}{9} - \frac{5}{3} \right) = \frac{19}{9}a^2 \Rightarrow CN = \frac{\sqrt{19}}{3}a.$$

$$S_{BCN} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{5}{3}a \cdot \sin 60^\circ = \frac{5}{12}a^2\sqrt{3}, S_{BCN} = \frac{5\sqrt{19}a}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{12}a^2\sqrt{3} = \frac{5\sqrt{19}}{6}a \Rightarrow a = 2a\sqrt{\frac{19}{3}}$$

Ответ: $2a\sqrt{\frac{19}{3}}$.

10.1.D02



а) Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC$, CD – биссектриса.
 $S(ACD) = 4 \text{ см}^2$, $S(BCD) = 2,5 \text{ см}^2$.

Найти AC .

Решение:

$$\frac{S(ACD)}{S(BCD)} = \frac{\frac{1}{2} AC \cdot CD \cdot \sin \angle DCA}{\frac{1}{2} BC \cdot CD \cdot \sin \angle DCB} = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{2,5} = \frac{8}{5}$$

$\Rightarrow BC = \frac{5}{8} AC$. Проведем высоту BH , пусть

$$\begin{aligned} AC = x \Rightarrow S(ABC) &= \frac{1}{2} BH \cdot x = \frac{1}{2} x \sqrt{BC^2 - \frac{1}{4} AC^2} = \frac{1}{2} x \sqrt{\frac{25}{64} x^2 - \frac{1}{4} x^2} = \\ &= \frac{1}{2} x^2 \cdot \sqrt{\frac{9}{64}} = \frac{3x^2}{16} = 6,5 \Rightarrow x^2 = \frac{104}{3} \Rightarrow x = 2\sqrt{\frac{26}{3}} \text{ см.} \end{aligned}$$

Ответ: $2\sqrt{\frac{26}{3}}$ см.

б) Дано: (см. рис. пункта а)) $\triangle ABC$, $AB = BC$, CD – биссектриса.
 $S(ACD) = 12 \text{ см}^2$, $S(BCD) = 6,5 \text{ см}^2$. Найти AC .

Решение:

$$\frac{S(ABC)}{S(BCD)} = \frac{12}{6,5} = \frac{24}{13} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow BC = \frac{13}{24} AC.$$

Проведем высоту BH , пусть $AC = x$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S(ABC) &= \frac{1}{2} BH \cdot x = \frac{1}{2} x \sqrt{BC^2 - \frac{1}{4} AC^2} = \frac{1}{2} x \sqrt{\frac{169}{576} x^2 - \frac{1}{4} x^2} = \\ &= \frac{1}{2} x^2 \sqrt{\frac{25}{576}} = \frac{5x^2}{24} = 18,5 \Rightarrow x = \frac{444}{5} = 4\sqrt{\frac{111}{5}} \text{ см.} \end{aligned}$$

Ответ: $4\sqrt{\frac{111}{5}}$ см.

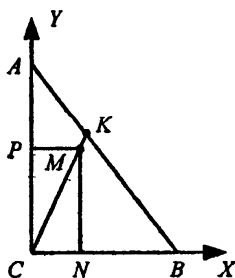
10.1.D03

а) Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 32 \text{ см}$, $BC = 8 \text{ см}$,
 $MP \perp AC$, $MN \perp CB$, $MP = 3 \text{ см}$, $MN = 20 \text{ см}$.

Найти $AK : KB$.

Решение:

Введем систему координат YCX , тогда
 $B(8; 0)$; $C(0; 0)$, $A(0; 32)$, $M(3; 20)$.



Прямая CM задается уравнением: $y = \frac{20}{3}x$. $AB: y = -4x + 32$,

точка пересечения AB и CM : $-4x + 32 = \frac{20}{3}x$; $x = 3, y = 20$,

т.е. $M \in AB \Rightarrow AK : KB = AM : MB$.

$\triangle APM \sim \triangle ACB \Rightarrow AM : AB = PM : CB = 3 : 8 \Rightarrow AM : MB = 3 : 5$.

Ответ: $3 : 5$.

б) Дано: (см. рис. а)) $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 24$ см, $BC = 6$ см, $MP = 5$, $MN = 4$, $MP \perp AC$, $MN \perp CB$. Найти $AK : KB$.

Решение:

Введем систему координат YCX , тогда $B(6; 0)$; $A(0; 24)$, $C(0; 0)$, $M(5; 4)$.

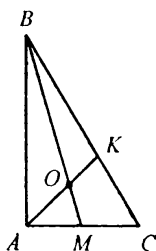
Прямая CM задается уравнением: $y = \frac{4}{5}x$. $AB: y = -4x + 24$,

точка пересечения AB и CM : $-4x + 24 = \frac{4}{5}x \Rightarrow x = 5, y = 4$, это точка M ,

т.е. $K = M$. $\triangle APM \sim \triangle ACB \Rightarrow AM : AB = PM : CB = 5 : 6 \Rightarrow AM : MB = 5 : 1$.

Ответ: $5 : 1$.

10.1.D04



а) Дано: $\triangle ABC$, AK – биссектриса, BM – медиана,

$BO : OM = 4 : 3$. $BC = 2\sqrt{3}$. Найти $S(ABC)$.

Решение:

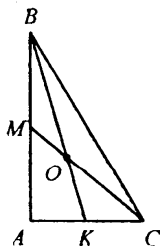
Т.к. AO – биссектриса $\triangle ABM \Rightarrow \frac{AB}{AM} = \frac{BO}{OM} = \frac{4}{3}$

$$\Rightarrow AB = \frac{4}{3}AM = \frac{2}{3}AC, BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$\Rightarrow 2^2 \cdot 3 = AC^2 \left(1 + \frac{4}{9}\right) \Rightarrow AC^2 = 4 \cdot 9;$$

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{3} AC^2 = 4 \cdot 3 = 12 \text{ см}^2.$$

Ответ: 12 см^2 .



б) Дано: $\triangle ABC$, $\angle A = 90^\circ$, CM – медиана, BK – биссектриса, $CO : OM = 8 : 3$, $AC = 2\sqrt{7}$ см. Найти $S(ABC)$.

Решение:

Т.к. BO – биссектриса $\triangle MBC \Rightarrow \frac{BC}{BM} = \frac{CO}{OM} = \frac{8}{3}$

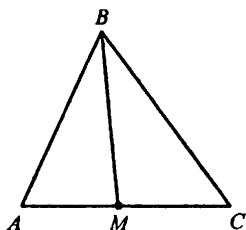
$$\Rightarrow BC = \frac{8}{3}BM = \frac{4}{3}AB,$$

$$AC^2 = BC^2 + AB^2 = \frac{16}{9} AB^2 - AB^2 = \frac{7}{9} AB^2 \Rightarrow 4 \cdot 7 = \frac{7}{9} AB^2$$

$$\Rightarrow AB^2 = 4 \cdot 9, S(ABC) = \frac{1}{2} AB \cdot PC = \frac{1}{2} AB \cdot 2\sqrt{7} = 6\sqrt{7} \text{ см}^2.$$

Ответ: $6\sqrt{7} \text{ см}^2$.

10.1.D05



а) Дано: $\triangle ABC$, $AB = 6 \text{ см}$, $BC = 8 \text{ см}$, BM – медиана, $BM = 5 \text{ см}$. Найти $S(ABC)$.

Решение:

Пусть $AM = MC = n$, $\angle AMB = 180 - \alpha$

По теореме косинусов.

$$\cos \alpha = \frac{AB^2 - AM^2 - BM^2}{2AM \cdot BM} = \frac{BM^2 + MC^2 - BC^2}{2CM \cdot BM}$$

$$\Rightarrow 36 - AM^2 - 25 = 25 + AM^2 - 64 \Rightarrow AM = 5 \Rightarrow AC = 10$$

т.к. $AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow \triangle ABC$ – прямоугольный

$$\Rightarrow S(ABC) = \frac{1}{2} AB \cdot BC = 24 \text{ см}^2.$$

Ответ: 24 см^2 .

б) Дано: (см. рис. пункта а)). $\triangle ABC$, $AB = 10 \text{ см}$, $BC = 24 \text{ см}$, $BM = 13$.
Найти $S(ABC)$.

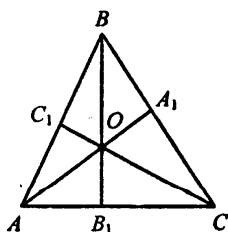
Решение:

т.к. $\frac{1}{2} \sqrt{AB^2 + BC^2} = 13$, то это прямоугольный треугольник, т.к. медиана

на равн половине гипотенузы $\Rightarrow S = \frac{1}{2} AB \cdot BC = 120 \text{ см}^2$.

Ответ: 120 см^2 .

10.1.D06



а) Дано: $\triangle ABC$, AA_1 , BB_1 , CC_1 – биссектрисы.

$BC = 7 \text{ см}$, $AO : OA_1 = 4 : 1$. Найти периметр $\triangle ABC$.

Решение:

т.к. BO – биссектриса $\angle AOA_1$, то $\frac{AB}{BA_1} = \frac{AO}{OA_1} = 4$

$\Rightarrow AB = 4BA_1$, аналогично, CO – биссектриса $\triangle ACA_1$

$$\Rightarrow \frac{AC}{A_1C} = 4 \Rightarrow AC = 4A_1C$$

$$\Rightarrow AB + AC = 4(A_1C + BA_1) = 4BC = 28 \text{ см} \Rightarrow P = BC + AB + AC = 35 \text{ см}$$

Ответ: 35 см .

б) Дано: $\triangle ABC$, AA_1 , BB_1 , CC_1 – биссектрисы. $BC = 8$ см, $AO : OA_1 = 5 : 2$.
Найти периметр $\triangle ABC$.

Решение:

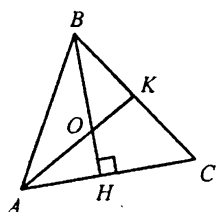
Аналогично пункту а): $\frac{AB}{BA_1} = \frac{AO}{OA_1} = \frac{5}{2} \Rightarrow AB = \frac{5}{2} BA_1$

$$\frac{AC}{A_1C} = \frac{5}{2} \Rightarrow C = \frac{5}{2} A_1C \Rightarrow AB + AC = \frac{5}{2} (BA_1 + A_1C) = \frac{5}{2} BC = 20$$

$$\Rightarrow P = BC + AB + AC = 20 + 8 = 28 \text{ см.}$$

Ответ: 28 см.

10.1.D07



а) Дано: $\triangle ABC$, $AB = 6$ см, $AC = 3\sqrt{5}$ см, AK – биссектриса, BH – высота, $BO : OH = 3 : 2$.
Найти $S(ABC)$.

Решение:

$$\text{Т.к. } AO - \text{биссектриса } \triangle ABH \Rightarrow \frac{AB}{AK} = \frac{BO}{OH} = \frac{3}{2}$$

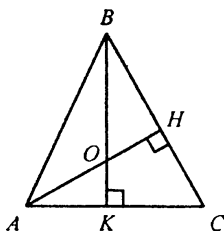
$$\Rightarrow AH = \frac{2}{3} AB = 4 \text{ см, тогда}$$

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20} \text{ см.}$$

$$CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \sqrt{45 - 20} = 5 \text{ см.}$$

$$\Rightarrow S(ABC) = \frac{1}{2} BH \cdot AC = \frac{1}{2} BH \cdot (AH + HC) = \frac{1}{2} \sqrt{20} \cdot 9 = 9\sqrt{5} \text{ см}^2.$$

Ответ: $9\sqrt{5} \text{ см}^2$.



б) Дано: $\triangle ABC$, $AB = 8$ см, $BC = 4\sqrt{15}$ см,
 AK – высота, BH – биссектриса, $AO : OH = 4 : 1$.
Найти $S(ABC)$.

Решение:

$$\text{Т.к. } AO - \text{биссектриса } \triangle ABH \Rightarrow \frac{AB}{BH} = \frac{AO}{OH} = 4$$

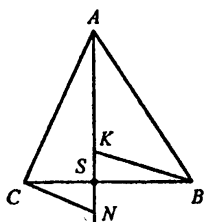
$$\Rightarrow BH = \frac{AB}{4} = 2 \text{ см} \Rightarrow$$

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{64 - 4} = \sqrt{60} \text{ см.}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} \sqrt{60} \cdot 4\sqrt{15} = 60 \text{ см}^2.$$

Ответ: 60 см^2 .

10.1.D08



а) Дано: $\triangle ABC$, AS – биссектриса, $CN \perp AS$, $BK \perp AS$, $BK = 4$, $CN = 3$, $BC = 14$ см.

Найти AB и AC .

Решение:

$$\triangle CSN \sim \triangle BSK \Rightarrow \frac{CS}{BS} = \frac{CN}{BK} = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CS = 6 \text{ см}, BS = 8 \text{ см}.$$

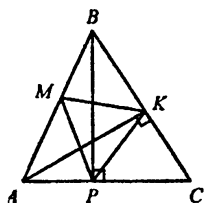
$$\triangle ACN \sim \triangle AKB \Rightarrow \frac{AK}{AN} = \frac{BK}{CN} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{AN}{KN} = 3$$

$$KN = KS + SN = \sqrt{CS^2 - CN^2} + \sqrt{BS^2 - BK^2} = \sqrt{36 - 9} + \sqrt{64 - 16} = \\ = \sqrt{27} + \sqrt{48} = 7\sqrt{3} \text{ см} \Rightarrow AN = 21\sqrt{3}, AK = 28\sqrt{3} \text{ см}.$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{CN^2 + AN^2} = \sqrt{9 + 1323} = 2\sqrt{333} \text{ см} = 6\sqrt{37} \text{ см}$$

$$AB = \sqrt{BK^2 + AK^2} = \sqrt{16 + 2352} = 8\sqrt{37} \text{ см}.$$

Ответ: $8\sqrt{37}$ см, $6\sqrt{37}$ см.



б) Дано: $\triangle ABC$, (см. рис. пункта а), AS – биссектриса, $BK \perp AS$, $CN \perp AS$, $BK = 5$, $CN = 5$ см, $BC = 18$ см.

Найти AB и AC .

Решение:

$$\triangle CSN \sim \triangle BSK \Rightarrow \frac{CS}{BS} = \frac{CN}{BK} = \frac{4}{5} \Rightarrow CS = 8 \text{ см}, BS = 10 \text{ см}.$$

$$\triangle ACN \sim \triangle AKB \Rightarrow \frac{AK}{AN} = \frac{BK}{CN} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{AN}{KN} = 4$$

$$KN = KS + SN = \sqrt{CS^2 - CN^2} + \sqrt{BS^2 - BK^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} + \sqrt{10^2 - 5^2} = \\ = 9\sqrt{3} \text{ см} \Rightarrow AN = 36\sqrt{3}, AK = 45\sqrt{3} \text{ см}.$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{CN^2 + AN^2} = \sqrt{4^2 + 4^2 \cdot 9^2 (\sqrt{3})^2} = 8\sqrt{61}$$

$$AB = \frac{5}{4} AC = 10\sqrt{61}.$$

Ответ: $10\sqrt{61}$ см, $8\sqrt{61}$ см.

10.1.D09

а) Дано: $\triangle ABC$, AK и BP – высоты, M – середина AB , $\cos \angle ACB = \frac{3}{4}$,

$AB = 16$ см. Найти периметр $\triangle MKP$.

Решение:

KM – медиана прямоугольного $\triangle BKA \Rightarrow KM = \frac{1}{2}AB = 8$ см.

PM – медиана прямоугольного $\triangle BPA \Rightarrow PM = \frac{1}{2}AB = 8$ см и

$$\angle AMP = 180^\circ - \angle MAP - \angle MPA = 180^\circ - 2\angle A$$

$$\angle BMK = 180^\circ - \angle MBK - \angle MKB = 180^\circ - 2\angle B$$

$$\Rightarrow \angle PMK = 180^\circ - (\angle AMP + \angle BMK) = 180^\circ - (180^\circ - \angle A - \angle B) \cdot 2 = 180^\circ - 2\angle C$$

$$\cos 2\angle C = 2\cos^2 \angle C - 1 = 2\frac{9}{16} - 1 = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow KP^2 = MP^2 + MK^2 + 2 \cdot MP \cdot MK \cdot \cos 2\angle C = 64 + 64 + 16 = 144$$

$$\Rightarrow KB = 12 \Rightarrow P(ABC) = 12 + 8 + 8 = 28 \text{ см}$$

Ответ: 28 см.

б) Дано: (см. рис. пункта а)), AK и BP – высоты, M – середина AB ,

$$\cos \angle ACB = \frac{25}{5}, AB = 20 \text{ см. Найти } P(ABC).$$

Решение:

KM – медиана прямоугольного $\triangle BKA \Rightarrow KM = \frac{1}{2}AB = 10$ см.

PM – медиана прямоугольного $\triangle BPA \Rightarrow PM = \frac{1}{2}AB = 10$ см.

аналогично, $\angle PMK = 180^\circ - 2\angle C$

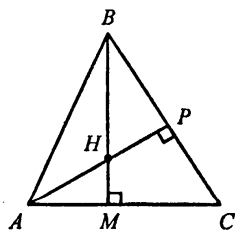
$$\cos(2\angle C) = 2\cos^2 \angle C - 1 = 2\frac{4}{25} - 1 = -\frac{17}{25}$$

$$\Rightarrow KP^2 = MP^2 + MK^2 - 2MP \cdot MK \cdot \frac{17}{25} = 100 + 100 - 136 = 64 \Rightarrow KP = 8$$

$$P(ABC) = 10 + 10 + 8 = 28 \text{ см.}$$

Ответ: 28 см.

10.1.D10



а) Дано: AP и BM – высоты, $BM : AP = 8 : 7$, $S(AMH) = 3 \text{ см}^2$, $S(BPH) = 12 \text{ см}^2$.

Найти $S(MCPH)$.

Решение:

Пусть $S(MCPH) = S$, $\triangle APC \sim \triangle BMC$, $K = \frac{BM}{AP} = \frac{8}{7}$

$$\frac{S_{\triangle BMC}}{S_{\triangle APC}} = \frac{S + 12}{S + 2} = \frac{64}{49} \Rightarrow 15S = 396 \Rightarrow S = 26,4 \text{ см}^2.$$

Ответ: 26,4 см².

б) Дано: (см. рис. пункта а)). AP и BM – высоты, $BM : AP = 3 : 2$, $S(AMH) = 4 \text{ см}^2$, $S(BPH) = 16 \text{ см}^2$. Найти $S(MCPH)$.

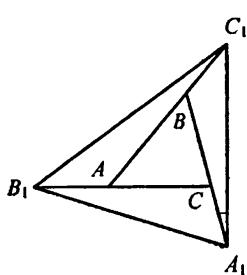
Решение:

Пусть $S(MCPH) = S$, $\triangle APC \sim \triangle BMC$, $K = \frac{BM}{AP} = \frac{3}{2}$

$$\frac{S_{\triangle BMC}}{S_{\triangle APC}} = \frac{S+16}{S+4} = \frac{9}{4} = K^2 \Rightarrow 5S = 28 \Rightarrow S = 5,6 \text{ см}^2.$$

Ответ: $5,6 \text{ см}^2$.

10.1.D11



а) Дано: $\triangle ABC$, $A_1C : CB = B_1A : AC = C_1B : BA = 2 : 3$. Найти $\frac{S(ABC)}{S(A_1B_1C_1)}$.

Решение:

$$\frac{S(BC_1A_1)}{S(ABC)} = \frac{BA_1}{BC} \cdot \frac{BC_1}{BA} = \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{9}$$

$$\frac{S(CA_1B_1)}{S(ABC)} = \frac{B_1C}{AC} \cdot \frac{AC_1}{BC} = \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{9} \text{ и } \frac{S(A_1B_1C_1)}{S(ABC)} = \frac{10}{9}$$

$$\Rightarrow S_{A_1B_1C_1} = S_{ABC} + S_{BC_1A_1} + S_{AB_1C_1} + S_{CA_1B_1} = S_{ABC} + \frac{30}{9} S_{ABC} = \frac{13}{3} S_{ABC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S(ABC)}{S(A_1B_1C_1)} = \frac{3}{13}$$

Ответ: $\frac{3}{13}$.

б) Дано: $\triangle ABC$, $A_1C : CB = B_1A : AC = C_1B : BA = 3 : 2$. (см. рис. пункта а)).

Найти $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}$.

Решение:

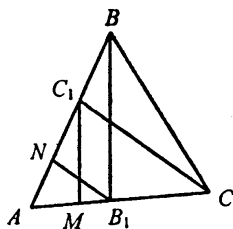
$$\frac{S(BC_1A_1)}{S(ABC)} = \frac{BA_1}{BC} \cdot \frac{BC_1}{BA} = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{4}$$

$$\text{Аналогично: } \frac{S(CA_1B_1)}{S(ABC)} = \frac{15}{4}; \frac{S(A_1B_1C_1)}{S(ABC)} = \frac{15}{4}$$

$$\Rightarrow S_{A_1B_1C_1} = S_{ABC} + 3 \cdot \frac{15}{4} S_{ABC} = \frac{49}{4} S_{ABC} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{4}{49}$$

Ответ: $\frac{4}{49}$.

10.1.D12



а) Дано: $\triangle ABC$, $AB_1 : B_1C = 3 : 4$, $AC_1 : C_1B = 5 : 2$.

Найти $\frac{BO}{OB_1}$ и $\frac{CO}{OC_1}$.

Решение:

Проведем $C_1N \parallel BB_1$, $B_1N \parallel CC_1 \Rightarrow$ т.к. $C_1M \parallel BB_1$, то

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AM}{MB_1} = \frac{5}{2}; \text{ но т.к. } C_1M \parallel B_1O \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{NB_1 + \frac{5}{2}MB_1}{B_1C} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{MB_1}{B_1C} = \frac{3}{14}; \text{НО Т.К. } C_1M \parallel B_1O \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{MB_1}{B_1C} = \frac{C_1O}{OC} \Rightarrow \frac{CO}{OC_1} = \frac{B_1C}{MB_1} = \frac{14}{3}.$$

Далее т.к. $BN \parallel CC_1$, то $\frac{AN}{NC_1} = \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{3}{4}$; но $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{5}{2}$

$$\Rightarrow \frac{\frac{3}{4}NC_1 + NC_1}{C_1B} = \frac{7}{4} \frac{NC_1}{C_1B} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{NC_1}{C_1B} = \frac{5}{14},$$

$$\text{HO } \frac{NC_1}{C_1B} = \frac{B_1O}{BO} (C_1O \parallel NB_1) \Rightarrow \frac{BO}{OB_1} = \frac{14}{5}$$

Ответ: $\frac{14}{3}$ и $\frac{14}{5}$.

б) Дано: (см. рис. пункта а)). $\triangle ABC$, $AB_1 : B_1C = 2 : 3$, $AC_1 : C_1B = 5 : 4$.

Найти $\frac{BO}{OB_1}$ и $\frac{CO}{OC_1}$.

Решение:

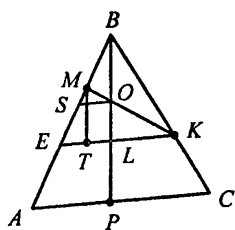
Производя дополнительные построения, как и в а) и рассуждая аналогично, получим, что

$$\frac{AM}{MB_1} = \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{5}{4}; \quad \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{9}{4} \frac{MB_1}{B_1C} \Rightarrow \frac{CO}{OC_1} = \frac{B_1C}{B_1M} = \frac{27}{8}$$

$$\frac{AN}{NC_1} = \frac{AB_1}{BC} = \frac{2}{3}; \quad \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{5 NC_1}{3 C_1B} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{BO}{OB_1} = \frac{BC_1}{NC_1} = \frac{4}{3}$$

Ответ: $\frac{27}{8}$ и $\frac{4}{3}$.

10.1.D13



а) Дано: $\triangle ABC$, $AM : MB = 4 : 1$, $BK : KC = 3 : 1$,
 $CP : PA = 2 : 1$. Найти $MO : OK$, $BO : OP$.

Решение:

Проведем $EK \parallel AC$ и $MT \parallel BP$.

$$ES : SK = AP : PC = \frac{1}{2}$$

$$\text{Т.к. } EK \parallel AC \Rightarrow \frac{BE}{EA} = \frac{BK}{KC} = \frac{3}{1}$$

$$BE = 3EA, BM : MA = 1 : 4 \Rightarrow \frac{BM}{ME} = \frac{4}{11}$$

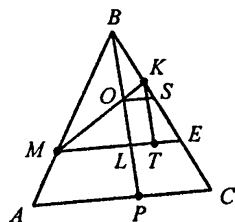
$$\Rightarrow ET : TL = \frac{EM}{MB} = \frac{11}{4} \Rightarrow \frac{MO}{OK} = \frac{TL}{LK} = \frac{\frac{4}{11}EL}{LK} = \frac{2}{11}$$

$$\text{Проведем } OS \parallel AC \Rightarrow \frac{MS}{ES} = \frac{MO}{OK} = \frac{2}{11}$$

$$\Rightarrow \frac{MS}{EM} = \frac{2}{13} \Rightarrow MS = \frac{2}{13}EM = \frac{11}{26}MB$$

$$\Rightarrow \frac{BS}{SA} = \frac{BO}{OP} = \frac{BM + MS}{AM - MS} = \frac{BM + \frac{11}{26}BM}{4BM - \frac{11}{26}BM} = \frac{37}{93}$$

Ответ: $\frac{2}{11}; \frac{37}{93}$.



б) Дано: $\triangle ABC$, $AM : MB = 1 : 4$, $BK : KC = 1 : 2$,
 $CP : PA = 1 : 3$. Найти $\frac{MO}{OK}$, $BO : OP$.

Решение:

Проведем $ME \parallel AC$, $KT \parallel BP$ и $OS \parallel ME$.

$$\frac{ML}{LE} = \frac{AP}{PC} = 3; \frac{BE}{BC} = \frac{BM}{BA} = \frac{3}{4}; \Rightarrow BE = \frac{3}{4}BC;$$

$$\frac{BK}{KC} = \frac{1}{2} \Rightarrow BK = \frac{1}{3}BC$$

$$\Rightarrow \frac{BK}{BE} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{BK}{KE} = \frac{LT}{TE} = \frac{4}{5} \Rightarrow LT = \frac{4}{9}LE$$

$$\frac{MO}{OK} = \frac{ML}{LT} = \frac{9ML}{4LE} = \frac{27}{4} \Rightarrow \frac{MO}{OK} = \frac{27}{4}$$

$$\frac{KS}{SE} = \frac{4}{27} \Rightarrow \frac{KS}{KE} = \frac{4}{31} \Rightarrow KS = \frac{4}{31} KE = \frac{5}{31} BK = \frac{5}{93} BC$$

$$\frac{BO}{OP} = \frac{BS}{SC} = \frac{BK + KS}{KC - KS} = \frac{\frac{1}{3} \left(BC + \frac{5}{31} BC \right)}{\frac{1}{3} \left(2BC - \frac{5}{31} BC \right)} = \frac{36}{62-5} = \frac{36}{57} = \frac{12}{19}$$

Ответ: $\frac{9}{4}; \frac{12}{19}$.

10.1.D14

а) Найдем $B(x_0, y_0)$ на прямой, такую, что $\overline{AB}$ перпендикулярен прямой.

Т.к. B – на прямой, то $B\left(x_0; \frac{1}{2}x_0\right)$, возьмем вектор $\vec{c}(2; 1)$, он лежит на

$$\text{прямой} \Rightarrow \overline{AB} \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow 2(x_0 - 10) + \left(\frac{1}{2}x_0 - 10\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2}x_0 = 30 \Rightarrow x_0 = 12, y_0 = 6. B(12, 6).$$

C – симметрична $A \Rightarrow \overline{AC} = 2\overline{AB} = 2\{12-10; 6-10\} = \{4; -8\} \Rightarrow C(14; 2)$.

Ответ: $C(14; 2)$.

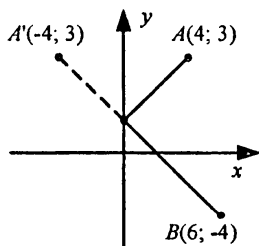
б) Пусть $B(x_0, y_0)$ лежит на прямой и $\overline{AB} \perp$ прямой $\Rightarrow B(x_0, 2x_0)$, и т.к. $\vec{e}(1; 2)$ параллелен прямой, то $\vec{e} \cdot \overline{AB} = 0 \Rightarrow 1 \cdot (x_0 - 10) + 2(2x_0 - 10) = 0 \Rightarrow$

$x_0 = 6, y_0 = 12 \Rightarrow \overline{AB} = \{-4; 2\}$, тогда если C – симметрична A , то

$$\overline{AC} = 2\overline{AB} = \{-8; 4\} \Rightarrow C(2; 14)$$

Ответ: $(2; 14)$.

10.1.D15

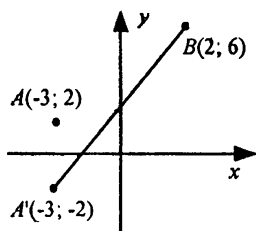


а) Пусть A' – точка симметричная A (относительно оси ординат (см. рис.)).

$A'(-4; 3)$. Из рисунка видно, что сумма расстояний от точки на оси ординат до точек A (т.е. A') и B минимальна, если эта точка лежит на пересечении $A'B$ и оси ординат, т.е.

$$C(0; \frac{1}{5}).$$

Ответ: $(0; \frac{1}{5})$.



б) Аналогично A' – симметрична A относительно оси x .

Искомая сумма расстояний минимальна, если точка лежит на пересечении оси x и $A'B$.

Пусть A', B лежат на прямой $y = ax + b$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3a + b = -2 \\ 2a + b = 6 \end{cases} \Rightarrow b = \frac{14}{5}; a = \frac{8}{5}; y = \frac{8}{5}x + \frac{14}{5}$$

$$y = 0 \text{ при } x = -\frac{14}{8} \Rightarrow C\left(-\frac{14}{8}; 0\right)$$

Ответ: $\left(-\frac{14}{8}; 0\right)$.

§ 2. Многоугольники

Уровень А

10.2.A01

а) Другой угол $180^\circ - 41^\circ = 139^\circ$.

Ответ: $139^\circ, 41^\circ, 139^\circ$.

б) $180^\circ - 141^\circ = 39^\circ$.

Ответ: $39^\circ, 141^\circ, 39^\circ$.

10.2.A02

а) Пусть x – один угол, $x - 12^\circ$ другой, $x + x - 12 = 180 \Rightarrow x = 96$.

Ответ: $96^\circ, 84^\circ$.

б) Пусть x – один угол, $x + 14^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 83^\circ$.

Ответ: $83^\circ, 97^\circ$.

10.2.A03

а) $\frac{72}{2} - 4 = 32$ (см) – другая сторона.

Ответ: 32 см, 4 см, 32 см.

б) $\frac{80}{2} - 8 = 32$ (см) – другая сторона.

Ответ: 32 см, 8 см, 32 см.

10.2.A04

а) $S = 4 \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 12 \right) = 96 \text{ см}^2$.

Ответ: 96 см^2 .

б) $S = 4 \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 14 \right) = 84 \text{ см}^2$.

Ответ: 84 см^2 .

10.2.A05

а) Один из углов между диагоналями $180^\circ - 2 \cdot 7^\circ = 166^\circ$

$\Rightarrow$ угол между диагоналями $180^\circ - 166^\circ = 14^\circ$.

Ответ: 14° .

б) Один из углов между диагоналями $180^\circ - 13^\circ \cdot 2 = 154^\circ$

$\Rightarrow$ угол между диагоналями $180^\circ - 154^\circ = 26^\circ$.

Ответ: 26° .

10.2.A06

а) Стороны прямоугольника $6 \cdot 2 = 12$ см и $9 \cdot 2 = 18$ см

$\Rightarrow S = 12 \cdot 18 = 216 \text{ см}^2$.

Ответ: 216 см^2 .

б) Стороны прямоугольника $8 \cdot 2 = 16$ см и $11 \cdot 2 = 22$ см

$\Rightarrow S = 16 \cdot 22 = 352 \text{ см}^2$.

Ответ: 352 см^2 .

10.2.A07

а) x – сторона ромба $\Rightarrow 4x = x^3 + 36 \Rightarrow x = 12$ см.

Ответ: 12 см.

б) x – сторона ромба $\Rightarrow x + 24 = 4x \Rightarrow x = 8$ см.

Ответ: 8 см.

10.2.A08

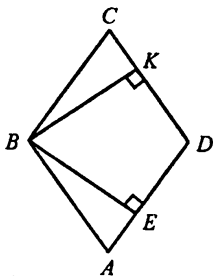
а) Сторона ромба равна $\sqrt{\left(\frac{12}{2}\right)^2 + \left(\frac{16}{2}\right)^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$ см.

Ответ: 10 см.

б) Сторона ромба равна $\sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + \left(\frac{24}{2}\right)^2} = \sqrt{25 + 144} = 13$ см.

Ответ: 13 см.

10.2.A09



а) Дано: ромб $ABCD$, BH , BE – высоты, $\angle KBE = 23^\circ$
Найти углы ромба.

$\angle D = 360^\circ - \angle KBE - \angle BKD - \angle BED = 157^\circ$, $\angle C = 23^\circ$

Ответ: $157^\circ, 23^\circ, 157^\circ, 23^\circ$.

б) Дано: ромб $ABCD$, BH , BE – высоты, $\angle KBE = 32^\circ$
Найти углы ромба.

$\angle D = 360^\circ - \angle KBE - \angle BKD - \angle BED = 148^\circ$, $\angle C = 32^\circ$

Ответ: $148^\circ, 32^\circ, 148^\circ, 32^\circ$.

10.2.A10

а) Сторона равна $a = \sqrt{288}$

$\Rightarrow$ диагональ равна $\sqrt{(\sqrt{288})^2 + (\sqrt{288})^2} = 24$ см.

Ответ: 24 см.

б) Сторона равна a , $\sqrt{a^2 + a^2} = 14 \text{ см} \Rightarrow a^2 = S = 98 \text{ см}^2$.

Ответ: 98 см^2 .

10.2.A11

а) x – другое основание $\Rightarrow \frac{x+17}{2} = 10 \Rightarrow x = 3$

Ответ: 3 см.

б) x – другое основание $\Rightarrow \frac{x+14}{2} = 11 \Rightarrow x = 8$

Ответ: 8 см.

10.2.A12

а) $S = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h \Rightarrow h = \frac{2S}{a+b} = \frac{56}{14} = 4 \text{ см}$.

Ответ: 4 см.

б) $S = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h \Rightarrow h = \frac{2S}{a+b} = \frac{64}{16} = 4 \text{ см}$.

Ответ: 4 см.

10.2.A13

а) Расстояние есть средняя линия трапеции с основаниями 24 см и 62 см, отсюда оно равно $\frac{24+62}{2} = 43 \text{ см}$.

Ответ: 43 см.

б) Аналогично искомое расстояние равно $\frac{34+46}{2} = 40 \text{ см}$.

Ответ: 40 см.

10.2.A14

а) Сумма углов семиугольника: $S = 180^\circ(n-2) = 180^\circ \cdot 5 = 900^\circ$.
 $\Rightarrow$ искомая сумма равна $900^\circ - 11^\circ = 889^\circ$.

Ответ: 889° .

б) Сумма углов девятиугольника: $S = 180^\circ \cdot 7 = 1260^\circ$.
 $\Rightarrow$ искомая сумма равна $1260^\circ - 14^\circ = 1246^\circ$.

Ответ: 1246° .

10.2.A15

а) $\frac{180^\circ(n-2)}{n} = 162^\circ \Rightarrow 18n = 360 \Rightarrow n = 20$.

Ответ: 20.

б) $\frac{180^\circ(n-2)}{n} = 165^\circ \Rightarrow 15n = 360 \Rightarrow n = 24$.

Ответ: 24.

Уровень В

10.2.B01

а) Т.к. $10^2 + 24^2 = 26^2$ – то это прямоугольник.

⇒ длина другой диагонали – 26 см.

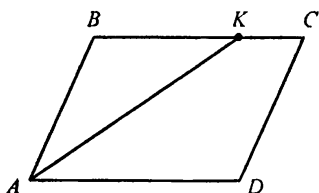
Ответ: 26 см.

б) Т.к. $15^2 + 20^2 = 25^2$ – то это прямоугольник.

⇒ длина другой диагонали – 25 см.

Ответ: 25 см.

10.2.B02



а) Дано: $ABCD$ – параллелограмм, AK – биссектриса. $BK = 7$ см, $CK = 12$ см.

Найти периметр.

Решение:

Т.к. $AD \parallel BC$, то $\angle KAD = \angle BKA = \angle BAK \Rightarrow AB = BK = 7$ см $\Rightarrow P = 2(7 + (7 + 12)) = 52$ см.

Ответ: 52 см.

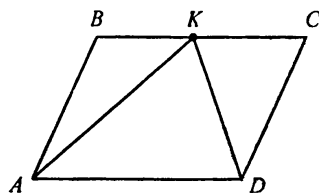
б) Дано: $ABCD$ – параллелограмм (см. рис. пункта а)). AK – биссектриса, $BK = 6$ см, $CK = 14$ см. Найти периметр.

Решение:

Аналогично, $AB = BK = 6$ см $\Rightarrow P = 2(6 + (6 + 14)) = 52$ см

Ответ: 52 см.

10.2.B03



а) Дано: $ABCD$ – параллелограмм, AK и DK – биссектрисы, $BC = 44$ см. Найти AB .

Решение:

По предыдущей задаче, $AB = BK$ и $CK =$

$CD \Rightarrow AB = BK = CK = \frac{1}{2} BC = 22$ см.

Ответ: 22 см.

б) Дано: $ABCD$ – параллелограмм, AK и DK – биссектрисы, $AB = 24$ см (см. рис. пункта а)). Найти BC .

Решение:

Из пункта а) следует, что $AB = \frac{1}{2} BC \Rightarrow BC = 2AB \Rightarrow BC = 48$ см.

Ответ: 48 см.

10.2.B04

а) Нет, т.к. 2 половинки диагоналей и сторона должны образовывать треугольник.

б) Нет, т.к. 2 половинки диагоналей и сторона должны образовывать треугольник.

10.2.B05

а) Площадь $\triangle MCD$ в 2 раза меньше площади параллелограмма

$$\left(S_{\triangle MCD} = \frac{1}{2} h \cdot CD, S(ABCD) = h \cdot CD \right) \Rightarrow S(ABCD) = 38 \cdot 2 = 76 \text{ см}^2.$$

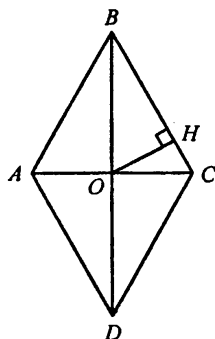
Ответ: 76 см².

б) Площадь параллелограмма 2 раза больше площади $\triangle MCB$

$$\left(S(MCD) = \frac{1}{2} h \cdot CB, S(ABCD) = h \cdot CB \right) \Rightarrow S(MCD) = \frac{1}{2} \cdot 42 = 21 \text{ см}^2.$$

Ответ: 21 см².

10.2.B06



а) Дано: $ABCD$ – ромб, OH – высота, $OH = 15$ см, $BD = 60$ см. Найти углы ромба.

Решение:

$$BO = 60 : 2 = 30 \text{ см},$$

$$\sin \angle OBC = \frac{OH}{OB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle OBC = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \angle B = 2\angle OBC = 60^\circ \Rightarrow \angle C = 120^\circ.$$

Ответ: 60°, 120°, 60°, 120°.

б) Дано: $ABCD$ – ромб, OH – высота, $OH = 20$ см, $BD = 80$ см. (см. рис. пункта а)). Найти углы ромба.

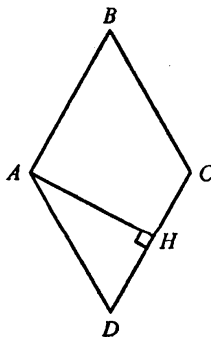
Решение:

$$BO = 80 : 2 = 40 \text{ см},$$

$$\sin \angle OBC = \frac{OH}{OB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle OBC = 30^\circ \Rightarrow \angle B = 60^\circ \Rightarrow \angle C = 120^\circ.$$

Ответ: 60°, 120°, 60°, 120°.

10.2.B07



а) Дано: $ABCD$ – ромб, AH – высота, $HD = 8$ см, $CH = 2$ см. Найти AK .

Решение:

$$AD = CD = 8 + 2 = 10 \Rightarrow AH =$$

$$= \sqrt{AD^2 - DH^2} = 6 \text{ см}$$

Ответ: 6 см.

б) Дано: $ABCD$ – ромб (см. рис. пункта а)), $DH = 6$ см, $CH = 4$. Найти AH .

Решение:

$$AD = CD = 6 + 4 = 10 \text{ см} \Rightarrow AH =$$

$$= \sqrt{AD^2 - DH^2} = 8 \text{ см}$$

Ответ: 8 см.

10.2.В08

а) Пусть a – сторона квадрата, по условию

$$\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 3 \Rightarrow \frac{5}{4}a^2 = 9 \Rightarrow S = a^2 = \frac{36}{5}$$

Ответ: $\frac{36}{5}$.

б) Пусть a – сторона квадрата, по условию

$$\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 4 \Rightarrow \frac{5}{4}a^2 = 16 \Rightarrow S = a^2 = \frac{64}{5}$$

Ответ: $\frac{64}{5}$.

10.2.В09

а) Один угол $\frac{102^\circ}{2} = 51^\circ \Rightarrow$ смежный с ним $180^\circ - 51^\circ = 129^\circ$.

Ответ: $51^\circ, 51^\circ, 129^\circ, 129^\circ$.

б) Один угол $52^\circ : 2 = 26^\circ \Rightarrow$ смежный с ним $180^\circ - 26^\circ = 154^\circ$.

Ответ: $26^\circ, 26^\circ, 154^\circ, 154^\circ$.

10.2.В10

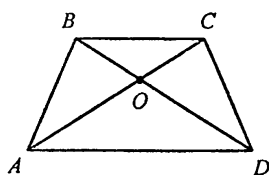
а) x – одно основание, средняя линия $17x \Rightarrow$ другое основание $2 \cdot (17x) - x = 33x$, что в 33 раза больше 1-го основания.

Ответ: в 33 раза.

б) x – одно основание, средняя линия $16x \Rightarrow$ другое основание $2 \cdot (16x) - x = 31x$, что в 31 раз больше 1-го основания.

Ответ: в 31 раз.

10.2.В11



а) Дано: $ABCD$ – трапеция, $BC = 16$ см, $AD = 20$ см, $AC = 18$ см. Найти AO , OC .

Решение:

$$\triangle AOD \sim \triangle COD \Rightarrow \frac{AD}{BC} = \frac{AO}{OC} = \frac{20}{16} = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{AO}{AC} = \frac{5}{9} \Rightarrow AO = \frac{5}{9} AC = 10 \text{ см}, OC =$$

$$= AC - AO = 8 \text{ см}$$

Ответ: 10 см, 8 см.

б) Дано: $ABCD$ – трапеция, $BC = 12$ см, $AD = 18$ см, $AC = 20$ см. (см. рис пункта а)). Найти AO , OC .

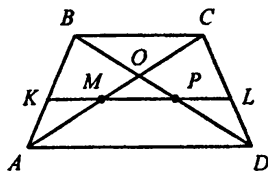
Решение:

$$\triangle AOD \sim \triangle COD \Rightarrow \frac{AD}{BC} = \frac{AO}{OC} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{AO}{AC} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow AO = \frac{3}{5} \cdot 20 = 12 \text{ см}, OC = 20 - 12 = 8 \text{ см}$$

Ответ: 12 см, 8 см.

10.2.B12



а) Дано: $ABCD$ – трапеция, $BC = 12$ см, $AD = 18$ см. KL – средняя линия.

Найти KM , MP , PL .

Решение:

$$KL = \frac{1}{2}(AD + BC) = 15 \text{ см.}$$

в $\triangle ACD$ – ML – средняя линия $\Rightarrow$

$$\Rightarrow ML = \frac{1}{2}AD = 9 \text{ см}$$

$$\text{в } \triangle BAC \text{ – } PL \text{ – средняя линия} \Rightarrow PL = \frac{1}{2}BC = 6 \text{ см}$$

$$\Rightarrow MP = 3 \text{ см}, KM = 6 \text{ см.}$$

Ответ: 6 см, 3 см, 6 см.

б) Дано: $ABCD$ – трапеция, $BC = 10$ см, $AD = 16$ см. KL – средняя линия, (см. рис. пункта а)). Найти KM , MP , PL .

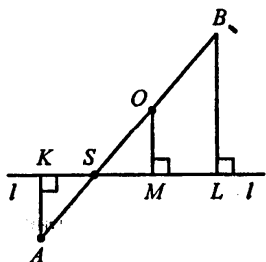
Решение:

$$KL = \frac{1}{2}(AD + BC) = 13 \text{ см.}$$

$$\text{в } \triangle ACD \text{ – } ML \text{ – средняя линия} \Rightarrow ML = \frac{1}{2}AD = 8 \text{ см}$$

$$\text{в } \triangle BAC \text{ – } PL \text{ – средняя линия} \Rightarrow PL = \frac{1}{2}BC = 5 \text{ см}$$

10.2.B13



а) Дано: AK , OM , BL – перпендикуляры к l , $AK = 12$ см, $BL = 36$ см, O середина AB .

Найти OM .

Решение:

$$\triangle AKS \sim \triangle BLS \Rightarrow AS : SB = \frac{AK}{BL} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AS}{AB} = \frac{1}{4}$$

$$AO : OB = 1 : 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow SO = \frac{1}{4}AB \Rightarrow \frac{SO}{OB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{SO}{SB} = \frac{1}{3}$$

$$\Delta SOM \sim \Delta SBL \Rightarrow \frac{SO}{SB} = \frac{OM}{BL} = \frac{1}{3} \Rightarrow OM = \frac{1}{3} BL = 12 \text{ см.} \quad \text{Ответ: 12 см.}$$

б) Дано: AK, OM, BL – перпендикуляры к l (см. рис. пункта а).
 $AK = 24 \text{ см}, BL = 30 \text{ см}$. Найти OM .

Решение:

$$\Delta AKS \sim \Delta BLS \Rightarrow \frac{AS}{SB} = \frac{AK}{BL} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{AS}{AB} = \frac{4}{9} \Rightarrow AO = OB \Rightarrow \frac{SO}{AB} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{SO}{OB} = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{SO}{SB} = \frac{1}{10}. \Delta SOM \sim \Delta SBL \Rightarrow \frac{OM}{BL} = \frac{SO}{SB} = \frac{1}{10} \Rightarrow OM = \frac{1}{10} BL = 3$$

Ответ: 3 см.

10.2.B14

а) Биссектрисы пересекутся под прямым углом

$$\Rightarrow AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26 \text{ см.} \quad \text{Ответ: 26 см.}$$

б) Биссектрисы пересекутся под прямым углом

$$\Rightarrow AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{24^2 + 18^2} = 30 \text{ см.} \quad \text{Ответ: 30 см.}$$

10.2.B15

а) Расстояние от середины AD до середины AB – средняя линия $\Delta ABD \Rightarrow BD$ (диагональ) $= 2 \cdot 6 = 12 \text{ см}$. Расстояние от середины AD до середины CD – средняя линия $\Delta ADC \Rightarrow AC$ (диагональ) $= 12 \cdot 2 = 24 \text{ см}$.

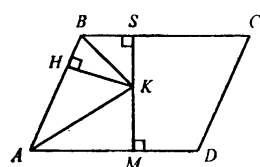
Ответ: 12 см, 24 см.

б) Аналогично пункту а), диагонали равны $2 \cdot 8 = 16 \text{ см}$ и $14 \cdot 2 = 28 \text{ см}$.

Ответ: 16 см, 28 см.

Уровень С

10.2.C01



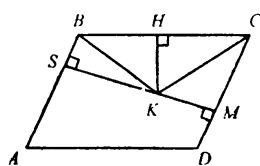
а) Дано: $ABCD$ – параллелограмм, AK, BK – биссектрисы, KH – высота к AB , $KH = 5 \text{ см}$, $BC = 11 \text{ см}$. Найти $S(ABCD)$.

Решение: Проведем $KS \perp BC$, $KM \perp AD$;

$$\Delta AHK = \Delta AMK \Rightarrow KH = KM = 5 \text{ см.}$$

$$\Delta BHK = \Delta BSK \Rightarrow KH = KS = 5 \text{ см.}$$

$$\Rightarrow MS = MK + KS = 10 \text{ см} \text{ – высота параллелограмма.} \Rightarrow S(ABCD) = BC \cdot MS = 110 \text{ см}^2. \quad \text{Ответ: } 110 \text{ см}^2.$$

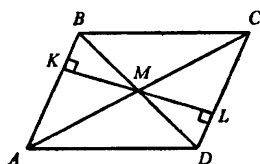


б) Дано: $ABCD$ – параллелограмм, BK, CK – биссектрисы, KH – высота к BC , $KH = 7 \text{ см}$, $AB = 9 \text{ см}$. Найти $S(ABCD)$.

Решение: Проведем $KS \perp BA$, $KM \perp CD$, аналогично $KS = KH = KM = 7 \text{ см} \Rightarrow MS = 14 \text{ см}$ – высота $\Rightarrow S(ABCD) = MS \cdot AB = 9 \cdot 14 = 126 \text{ см}^2$.

Ответ: 126 см^2 .

10.2.C02

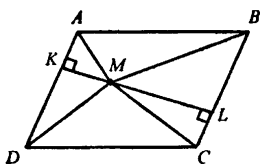


а) Дано: $ABCD$ – параллелограмм,
 $S(AMB) + S(MCD) = 46 \text{ см}^2$. Найти $S(ABCD)$.

Решение: Проведем $KL \perp AB$ и $ML \perp CD$

$$\Rightarrow S(AMB) + S(MCD) = \frac{1}{2} MK \cdot AB + \frac{1}{2} ML \cdot CD =$$

$$= \frac{1}{2} KL \cdot AB = \frac{1}{2} S(ABCD) \Rightarrow S_{ABCD} = 92 \text{ см}^2. \text{ Ответ: } 92 \text{ см}^2.$$



б) Дано: $ABCD$ – параллелограмм,
 $S(BMC) + S(AMD) = 42 \text{ см}^2$. Найти $S(ABCD)$.

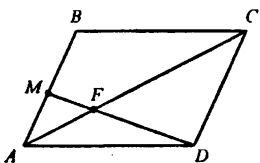
Решение: Проведем $KM \perp AD$ и $ML \perp BC$

$$\Rightarrow S(AMB) + S(BMC) =$$

$$= \frac{1}{2} MK \cdot AD + \frac{1}{2} ML \cdot BC = \frac{1}{2} KL \cdot AD =$$

$$= \frac{1}{2} S(ABCD) \Rightarrow S(ABCD) = 84 \text{ см}^2. \text{ Ответ: } 84 \text{ см}^2.$$

10.2.C03



а) Дано: $ABCD$ – параллелограмм, $AM : MB = 3 : 4$. $S(AFD) = 63 \text{ см}^2$. Найти $S(ABCD)$.

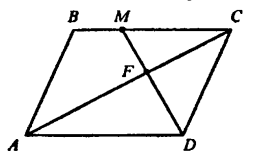
Решение:

$$\triangle AMF \sim \triangle CDF \Rightarrow \frac{MF}{FD} = \frac{AM}{CD} = \frac{AM}{AB} = \frac{3}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{S(AFD)}{S(AMF)} = \frac{FD}{MF} = \frac{7}{3} \Rightarrow S(AMF) = \frac{3}{7} \cdot 63 = 27 \text{ см}^2$$

$$S(AMD) = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot h = \frac{3}{14} \cdot AB \cdot h = \frac{3}{14} S(ABCD) = 27 + 63 = 90 \text{ см}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(ABCD) = \frac{14}{3} \cdot 90 = 420 \text{ см}^2. \text{ Ответ: } 420 \text{ см}^2.$$



б) Дано: $ABCD$ – параллелограмм, $BM : MC = 2 : 5$. $S(CFD) = 56 \text{ см}^2$. Найти $S(ABCD)$.

Решение:

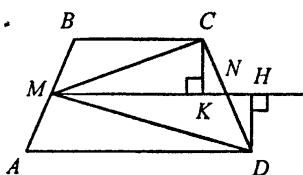
$$\triangle CFM \sim \triangle AFD \Rightarrow \frac{AF}{CF} = \frac{AD}{MC} = \frac{BC}{MC} = \frac{7}{5};$$

$$\frac{S(AFD)}{S(CFD)} = \frac{AF}{CF} = \frac{7}{5} \Rightarrow S(AFD) = \frac{7}{5} \cdot 56 \text{ см}^2; S(ACD) = 56 + \frac{7}{5} \cdot 56 = 56 \cdot \frac{12}{5} \text{ см}^2$$

$$\Rightarrow S(ABCD) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} AC \cdot h \right) = 2S(ACD) = \frac{24 \cdot 56}{5} = 268,8 \text{ см}^2.$$

Ответ: $268,8 \text{ см}^2$.

10.2.C04



а) Дано: $ABCD$ – трапеция, M – середина AB . $S(MCD) = 28 \text{ см}^2$. Найти $S(ABCD)$.

Решение: Проведем среднюю линию MN и опустим на нее выоты DH и CK , т.к. N – середина CD , $\triangle KCN = \triangle DHN \Rightarrow CK = DH$ и $(CK+DH) = h$ – высота трапеции.

$$S(MCD) = S(MCN) + S(MDN) =$$

$$= \frac{1}{2} MNCK + \frac{1}{2} MN \cdot DH = \frac{1}{2} MH \cdot h = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (AD + BC) \right) \cdot h = \frac{1}{2} S(ABCD)$$

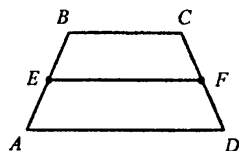
$$\Rightarrow S(ABCD) = 2S(MCD) = 56 \text{ см}^2. \quad \text{Ответ: } 56 \text{ см}^2.$$

б) Дано: (см. рис. пункта а)). Трапеция $ABCD$, M – середина AB , $S(ABCD) = 26 \text{ см}^2$. Найти $S(MCD)$.

Решение: Из пункта а) следует: что $S(ABCD) = 2S(MCD) \Rightarrow S(MCD) = 13 \text{ см}^2$.

Ответ: 13 см^2 .

10.2.C05



а) Дано: Трапеция $ABCD$, $AD = 42 \text{ см}$, $BC = 14 \text{ см}$. $CF : FD = 4 : 3$. Найти EF .

Решение:

$$FD = \frac{3}{7} CD, AE = \frac{3}{7} AB \quad (\text{это следует из того, что}$$

высоты из B и C к EF относятся к высотам из E и F к AD как $3 : 4$).

$$\begin{cases} \overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} \\ \overline{AD} = \overline{AE} + \overline{EF} + \overline{FD} = \frac{3}{7}(\overline{AB} + \overline{CD}) + \overline{EF} \Rightarrow \overline{EF} = \frac{3}{7}\overline{BC} = \frac{4}{7}\overline{AD} \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overline{EF} = \frac{3}{7}\overline{BC} + \frac{4}{7}\overline{AD} \Rightarrow EF = \frac{3}{7} \cdot 14 + \frac{4}{7} \cdot 42 = 30 \text{ см}. \quad \text{Ответ: } 30 \text{ см}.$$

б) Дано: (см. рис. пункта а)). $CF : FD = 5 : 2$, $AD = 56 \text{ см}$, $BC = 28 \text{ см}$. Найти EF .

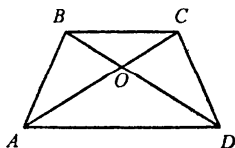
Решение: По тем же соображениям $AE = \frac{2}{7} AB$, $FD = \frac{2}{7} CD$

$$\begin{cases} \overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} \\ \overline{AD} = \frac{2}{7}\overline{AB} + \overline{EF} + \frac{2}{7}\overline{CD} \Rightarrow \overline{EF} = \frac{5}{7}\overline{AD} + \frac{2}{7}\overline{AB} \Rightarrow EF = \frac{5}{7} \cdot 56 + \frac{2}{7} \cdot 28 = 48 \text{ см}. \end{cases}$$

Ответ: 48 см .

10.2.C06

а) Дано: трапеция $ABCD$, $AC = 10 \text{ см}$, $BD = 24 \text{ см}$, $BC = 7 \text{ см}$, $AD = 19 \text{ см}$. Найти угол между BD и AC .



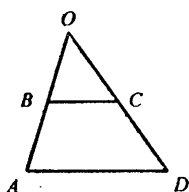
Решение:

$$\triangle AOD \sim \triangle BOC \Rightarrow \frac{BO}{OD} = \frac{BC}{AD} = \frac{CO}{OA} = \frac{7}{19} \Rightarrow BO = \frac{7}{26} BD, CO = \frac{7}{26} AC$$

$$\Rightarrow BO = \frac{12 \cdot 7}{13} \text{ см}, CO = \frac{5 \cdot 7}{13} \text{ см, по теореме косинусов}$$

$$\Rightarrow \cos \angle BOC = \frac{BO^2 + CO^2 + BC^2}{2BO \cdot OC} = \frac{7^2 \left(\frac{144}{169} + \frac{25}{169} - 1 \right)}{2BO \cdot OC} = 0 \Rightarrow \angle BOC = 90^\circ$$

Ответ: 90° .



б) Дано: $ABCD$ – трапеция, $AB = 15$ см, $CD = 20$ см, $BC = 6$ см, $AD = 31$ см. Найти $\angle AOD$.

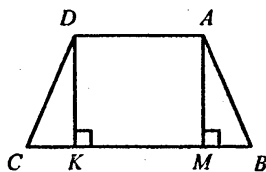
Решение: $\triangle BOC \sim \triangle AOD \Rightarrow$

$$\frac{OB}{OA} = \frac{BC}{AD} = \frac{6}{31} \Rightarrow \frac{OB}{OB + 15} = \frac{6}{31} \Rightarrow OB = \frac{18}{5} \text{ см.}$$

$$\Rightarrow \frac{OC}{OD} = \frac{BC}{AD} = \frac{6}{31} = \frac{OC}{OC + 20} \Rightarrow OC = \frac{24}{5} \text{ см.}$$

Т.к. $OB^2 + OC^2 = BC^2 \Rightarrow \angle BOC = 90^\circ$. Ответ: 90° .

10.2.C07



а) Дано: трапеция $ABCD$. $\angle B = 60^\circ$, $\angle BCD = 135^\circ$, $CD = 36$ см. Найти AB .

Решение: Опустим высоты DK и AM , $DK = AM$ (рисунок немного некорректен).

$$DK = CD \cdot \sin(180^\circ - \angle BCD), AM = AB \cdot \sin \angle ABC$$

$$\Rightarrow AB = CD \cdot \frac{\sin(180^\circ - \angle BCD)}{\sin \angle ABC} = 36 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \text{ см}$$

Ответ: $36 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ см.

б) Дано: трапеция $ABCD$, $\angle ABC = 120^\circ$, $\angle BCD = 45^\circ$, $AB = 24$ см. (см. рис. пункта а)). Найти CD .

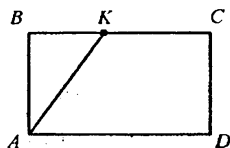
Решение: Опустим высоты DK и AM (рисунок немного некорректен).

$$DK = CD \cdot \sin \angle BCD, AM = AB \cdot \sin(180^\circ - \angle ABC)$$

$$\Rightarrow CD = \frac{AD \cdot \sin(180^\circ - \angle BCD)}{\sin \angle BCD} = 24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 24 \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ см. Ответ: } 24 \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ см.}$$

10.2.C08

а) Дано: $ABCD$ – прямоугольник, AK – биссектриса. $AB : AD = 3 : 5$. Найти $S(ABK) : S(AKCD)$.



Решение:

Несложно видеть, что $AB = BK \Rightarrow \frac{BK}{BC} = \frac{AB}{AD} = \frac{3}{5}$

$$S(ABK) = \frac{1}{2} AB^2; S(AKCD) = \frac{1}{2} AB(KC + AD) = \frac{1}{2} AB\left(\frac{2}{5}AD + AD\right) = \\ = \frac{7}{10} AB \cdot AD = \frac{7}{10} AB \cdot \frac{5}{3} BA = \frac{7}{6} AB^2 \Rightarrow S(ABK) : S(AKCD) = \frac{3}{7}. \text{ Ответ: } \frac{3}{7}$$

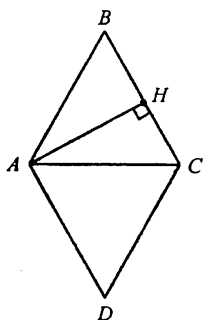
б) Дано: $ABCD$ – прямоугольник (см. рис. пункта а)). AK – биссектриса $AD : AB = 7 : 4$. Найти $S(AKCD) : S(ABK)$.

Решение:

$$AB = BK \Rightarrow \frac{BK}{BC} = \frac{4}{7}. S(ABK) = \frac{1}{2} AB \cdot BK = \frac{1}{2} AB^2;$$

$$S(ABCD) = AB \cdot BC = \frac{7}{4} AB^2 \Rightarrow \frac{S(ABCD)}{S(ABK)} = \frac{7}{2} \Rightarrow \frac{S(AKCD)}{S(ABK)} = \frac{5}{2}. \text{ Ответ: } \frac{5}{2}.$$

10.2.C09



а) Дано: $ABCD$ – ромб, AH – высота, $S(AHB) = 30 \text{ см}^2$, $S(AHCD) = 70 \text{ см}^2$. Найти AH .

Решение:

$$S(ABCD) = 100 \text{ см}^2, S(ABC) = 50 \text{ см}^2, S(AHB) = 30 \text{ см}^2$$

$$\Rightarrow \frac{S(ABC)}{S(AHB)} = \frac{50}{30} = \frac{\frac{1}{2} AH \cdot BC}{\frac{1}{2} AH \cdot BH} = \frac{BC}{BH} \Rightarrow Bh = \frac{3}{5} BC$$

$$AH = x, x^2 = AB^2 - BH^2 = \frac{16}{25} AB^2 \Rightarrow B = \frac{5}{4} x$$

$$S(ABC) = \frac{1}{2} x \cdot BC = \frac{5}{8} x^2 = 50 \Rightarrow x^2 = 80 \Rightarrow x = 4\sqrt{5} \text{ см}^2$$

Ответ: $4\sqrt{5} \text{ см}^2$.

б) Дано: $ABCD$ – ромб, AH – высота, $S(ABH) = 40 \text{ см}^2$, $S(AHCD) = 60 \text{ см}^2$ (см. рис. пункта а)). AK – высота. Найти AK .

Решение:

$$S(ABC) = 50 \text{ см}^2, S(AHB) = 40 \text{ см}^2 \Rightarrow \frac{BH}{DC} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow x = AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{AB^2 - \frac{16}{25} AB^2} = \frac{3}{5} AB$$

$$S(ABC) = \frac{1}{2} x \cdot \frac{5}{3} x = 50 \Rightarrow x^2 = 60 \Rightarrow x = 2\sqrt{15} \text{ см}^2. \text{ Ответ: } 2\sqrt{15} \text{ см}^2.$$

10.2.C10

а) Дано: $A(-2; 2)$, $B(-2; 5)$, $C(2; 7)$, $D(6; -2)$. Найти $S(ABCD)$.

Решение:

$$\overrightarrow{AC}\{4; 9\}, \overrightarrow{BD}\{8; -7\}, |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{97}, |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{113}$$

$$\cos(\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD}) = \frac{32 - 63}{\sqrt{97} \cdot \sqrt{113}} = -\frac{31}{\sqrt{97} \cdot \sqrt{113}},$$

$$\sin(\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD}) = \frac{100}{\sqrt{97} \cdot \sqrt{113}} \Rightarrow$$

$$S(ABCD) = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BD}| \cdot \sin(\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD}) = 50 \text{ см}^2.$$

Ответ: 50 см^2 .

б) Дано: $A(-3; 1)$, $B(-3; 9)$, $C(2; 12)$, $D(9; 1)$. Найти $S(ABCD)$.

Решение:

$$\overrightarrow{AC}\{5; 11\}, \overrightarrow{BD}\{12; -8\}, |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{146}, |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{208}$$

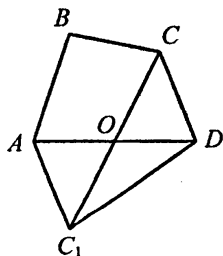
$$\cos(\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD}) = \frac{5 \cdot 12 - 11 \cdot 8}{\sqrt{146} \cdot \sqrt{208}} = -\frac{28}{\sqrt{146} \cdot \sqrt{208}}$$

$$\sin(\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD}) = \frac{172}{\sqrt{146} \cdot \sqrt{208}}$$

$$S(ABCD) = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BD}| \cdot \sin(\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{2} \cdot 172 = 86 \text{ см}^2.$$

Ответ: 86 см^2 .

10.2.C11



а) Дано: $ABCD$ – выпуклый четырехугольник, C_1 – симметрична относительно середины AD .

$$S(ABCC_1) = 37 \text{ см}^2.$$

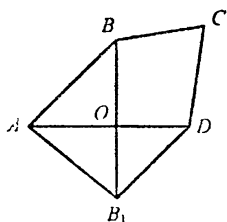
Найти $S(ABCD)$.

Решение:

Т.к. O – середина AD и $CO = OC_1$ то

$$\begin{aligned} S(AOC_1) &= S(COD) \Rightarrow S(ABCC_1) = \\ &= S(ABCO) + S(AOC_1) = S(ABCO) + S(COD) = \\ &= S(ABCD) \end{aligned}$$

Ответ: 37 см^2 .



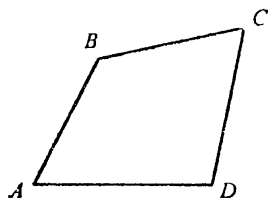
б) Дано: $ABCD$ – выпуклый четырехугольник.
 B_1 – симметрична относительно середины AD .
 $S(ABCD) = 31 \text{ см}^2$. Найти $S(BCDB_1)$.

Решение:

O – середина AD , $BO = OB_1 \Rightarrow S(AOB) = S(OB_1D) \Rightarrow$
 $\Rightarrow S(ABCD) = S(BCDB_1) = 31 \text{ см}^2$.

Ответ: 31 см^2 .

10.2.C12



а) Дано: $ABCD$ – выпуклый четырехугольник.

$\cos \angle B = \frac{5}{6}$, $AB = 6$, $BC = 4$, $CD = 5$, $AD = 8$.

Найти $\cos \angle D$.

Решение:

По теореме косинусов:

$$AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle B = AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cdot \cos \angle D$$

$$\Rightarrow \cos \angle D = \frac{AB^2 + BC^2 - AD^2 - CD^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle B}{2AD \cdot CD} =$$

$$= \frac{64 + 25 - 36 - 16 + 40}{80} = \frac{47}{80}$$

Ответ: $\frac{47}{80}$.

б) Дано: $ABCD$ – выпуклый четырехугольник (см. рис. пункта а)).

$\cos \angle A = -\frac{2}{3}$, $AB = 2$, $BC = 3$, $CD = 7$, $AD = 6$. Найти $\cos \angle C$.

Решение:

По теореме косинусов:

$$AB^2 + AD^2 - 2\cos \angle A \cdot AB \cdot AD = CD^2 + BC^2 - 2BC \cdot CD \cdot \cos \angle C$$

$$4 + 36 + 16 = 49 + 9 - 42\cos \angle C \Rightarrow \cos \angle C = -\frac{1}{21}$$

Ответ: $-\frac{1}{21}$.

10.2.C13

а) Пусть a, b, c, d – стороны четырехугольника.

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 48 \\ b + c + d = 48 \\ c + d + a = 48 \\ d + a + b = 48 \end{cases} \Rightarrow 3(a + b + c + d) = 64 \text{ см.}$$

Ответ: 64 см.

б) Пусть a, b, c, d – стороны четырехугольника.

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b+c=72 \\ b+c+d=72 \\ c+d+a=72 \\ d+a+b=72 \end{cases} \Rightarrow 3(a+b+c+d) = 96 \text{ см.}$$

Ответ: 96 см.

10.2.C14

а) Возьмем произвольную сторону пятиугольника, т.е. сумма ее любой другой стороны равна 6 см, то остальные 4 стороны равны между собой, но тогда взяв другую сторону и повторив эти же рассуждения получим, что все стороны пятиугольника равны $\Rightarrow P = 6 \cdot 5 = 30$ см.

Ответ: 30 см.

б) Аналогично, $P = 7 \cdot 4 = 28$ см.

Ответ: 28 см.

10.2.C15

а) Повторив рассуждения предыдущей задачи, получим, что пятнадцатиугольник правильный. $\Rightarrow$ все углы равны $\alpha = \frac{180(15)}{15} = 156^\circ$

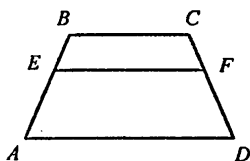
Ответ: 156° .

б) Аналогично, двенадцатиугольник правильный $\Rightarrow$ все углы равны по $\frac{180^\circ(12-2)}{12} = 150^\circ$

Ответ: 150° .

Уровень D

10.2.D01



а) Дано: $AD = 33$ см, $BC = 11$ см, $ABCD$ – трапеция, $EF \parallel AD$. $S(AEFD) : S(EFCD) = 27 : 5$.
Найти EF .

Решение:

Пусть $AE : AB = K \Rightarrow$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \\ \overrightarrow{AD} = K(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{EF} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{EF} = K\overrightarrow{BC} + (1-K)\overrightarrow{AD}$$

$$\Rightarrow EF = K \cdot BC + AD - K \cdot AD \Rightarrow K = \frac{AD - EF}{AD - BC} = \frac{33 - EF}{22}$$

$$S(ABCD) = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot h = 22h,$$

$$S(AEFD) = \frac{1}{2}(AD + EF) \cdot K \cdot h = \frac{Kh \cdot (33 + EF)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{S(ABCD)}{S(AEFG)} = \frac{32}{27} = \frac{44}{K(33 + EF)} \Rightarrow \frac{32}{27} = \frac{44 \cdot 22}{33^2 - EF^2}$$

$$\Rightarrow EF^2 = 33^2 - \frac{44 \cdot 22 \cdot 27}{32} = \frac{1089}{4} \Rightarrow EF = \frac{33}{2} \text{ см.}$$

Ответ: $\frac{33}{2}$ см.

б) Дано: $ABCD$ – трапеция (см. рис. пункта а)), $AD = 24$ см, $BC = 8$ см, $S(AEFD) : S(EFCB) = 21 : 11$. Найти EF .

Решение:

Пусть $AE : AB = K \Rightarrow$ (из пред. пункта) $K = \frac{AD - EF}{AD - BC} = \frac{24 - EF}{16}$

$$S(ABCD) = \frac{1}{2}(AD + BC)h = 16h;$$

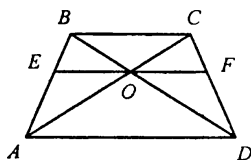
$$S(AEFD) = \frac{1}{2}(AD + EF) \cdot Kh = \frac{1}{2}kh(24 + EF)$$

$$\Rightarrow \frac{S(ABCD)}{S(AEFG)} = \frac{32}{21} = \frac{32}{k(24 + FE)} = \frac{33 \cdot 16}{24^2 - EF^2} \Rightarrow$$

$$EF^2 = 24^2 - 16 \cdot 21 = 240 \Rightarrow EF = \sqrt{240} = 4\sqrt{15}.$$

Ответ: $4\sqrt{15}$.

10.2.D02



а) Дано: $ABCD$ – трапеция, $EF \parallel AD$.
 $AD = 12$ см, $BC = 24$ см. Найти EF .

Решение:

$$\triangle BCO \sim \triangle DAO \Rightarrow CO : OA = BO : OD = \frac{BC}{AD} = 2$$

$$\Rightarrow CO : AC = \frac{2}{3}; AO : AC = \frac{1}{3}$$

$$\triangle COF \sim \triangle ACB \Rightarrow \frac{OE}{BC} = \frac{AO}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow OE = \frac{1}{3} \cdot 24 = 8 \text{ см} \Rightarrow EF = 16 \text{ см.}$$

Ответ: 16 см.

б) Дано: $ABCD$ – трапеция, $EF \parallel AD$ (см. рис. пункта а)).

$AD = 10$, $BC = 15$ см. Найти EF .

Решение:

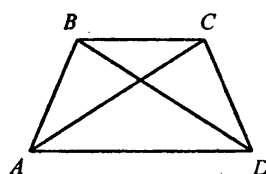
$$\triangle BCO \sim \triangle DAO \Rightarrow \frac{CO}{OA} = \frac{BO}{OD} = \frac{BC}{AD} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{CO}{AC} = \frac{3}{5} = \frac{BO}{BD}$$

$$\triangle COF \sim \triangle COD \Rightarrow OF = \frac{CO}{AC} \cdot AD = \frac{3}{5} \cdot 10 = 6 \text{ см}$$

$$\triangle BOE \sim \triangle BDA \Rightarrow OE = \frac{BO}{BD} \cdot AD = \frac{3}{5} \cdot 10 = 6 \text{ см.} \Rightarrow EF = 12 \text{ см.}$$

Ответ: 12 см.

10.2.D03



а) Дано: $ABCD$ – трапеция, $AD = 9$ см, $BC = 3$ см, $AB = 2$ см, $AC = 4$ см. Найти BD .

Решение:

$\angle ABC + \angle BAD = 180^\circ$, тогда по теореме косинусов:

$$\cos \angle ABC = \frac{BC^2 + AB^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{9 + 4 - 16}{2 \cdot 2 \cdot 3} = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \cos \angle BAD = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{по теореме косинусов:}$$

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos \angle BAD = 4 + 81 - 9 = 76 \Rightarrow BD = 2\sqrt{19}$$

Ответ: $2\sqrt{19}$.

б) Дано: (см. рис. пункта а)). $ABCD$ – трапеция, $AD = 8$ см, $BC = 4$ см, $CD = 3$ см, $BD = 2$ см. Найти AC .

Решение:

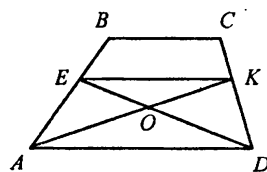
$$\angle BCD + \angle CDA = 180^\circ, BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cdot \cos \angle BCD.$$

$$\Rightarrow \cos \angle BCD = \frac{BD^2 + BC^2 - CD^2}{-2BC \cdot CD} = \frac{16 + 9 - 4}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8} \Rightarrow \cos \angle CDA = -\frac{7}{8}$$

$$\Rightarrow AC^2 = CD^2 + AD^2 - 2CD \cdot AD \cdot \cos \angle CDA = 9 + 64 + 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \frac{7}{8} = 115. \Rightarrow AC = \sqrt{115}$$

Ответ: $\sqrt{115}$.

10.2.D04



а) Дано: трапеция $ABCD$, AK – биссектриса $AD = 12$ см, $BC = 8$ см, $CK : KD = 3 : 4$. Найти AB .

Решение:

Проведем $EK \parallel AD$, тогда

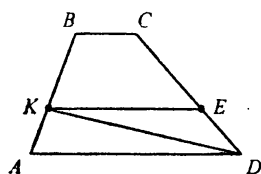
$$\frac{BE}{EA} = \frac{CK}{KD} = \frac{3}{4}; \frac{AE}{AB} = \frac{KD}{CD} = \frac{4}{7}$$

$$\begin{cases} \overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} \\ \overline{AD} = \frac{4}{7}\overline{AB} + \overline{EK} + \frac{4}{7}\overline{CD} \end{cases} \Rightarrow \overline{EK} = \frac{3}{7}\overline{AD} + \frac{4}{7}\overline{BC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow EK = \frac{3}{7}AD + \frac{4}{7}BC = \frac{36}{7} + \frac{32}{7} = \frac{68}{7} \text{ см. Т.к. } AO - \text{ биссектриса } \triangle AED \text{ то}$$

$$\frac{AE}{AD} = \frac{EO}{OD} = \frac{EK}{AD} = \frac{68}{84} = \frac{17}{21} \Rightarrow AE = \frac{17}{21} \cdot 12 = \frac{68}{7} \Rightarrow AB = \frac{7}{4}AE = 17 \text{ см.}$$

Ответ: 17 см.



б) Дано: трапеция $ABCD$, DK – биссектриса $AD = 14$ см, $BC = 5$ см, $AK : KB = 2 : 7$. Найти CD .

Решение:

Проведем $EK \parallel AD$, тогда $BK : KA = CE : ED = 7 : 2$

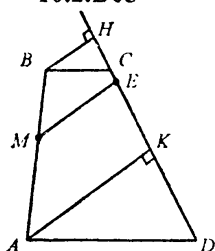
$$\Rightarrow \frac{AK}{AB} = \frac{ED}{CD} = \frac{2}{9}$$

$$\begin{cases} \overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} \\ \overline{AD} = \frac{2}{9}(\overline{AB} + \overline{CD}) + \overline{EK} \end{cases} \Rightarrow EK = \frac{7}{9}AD + \frac{2}{9}BC = \frac{98}{9} + \frac{10}{9} = 12 \text{ см}$$

$$\angle KDA = \angle EKD = \angle EDK \Rightarrow KE : ED = 12 \text{ см} \Rightarrow CD = \frac{9}{2}ED = 54 \text{ см}$$

Ответ: 54 см.

10.2.D05



а) Дано: трапеция $ABCD$, $AK \perp CD$, K – середина CD , M – середина AB , $AK = 24$, $S(BCK) = \frac{1}{6}S(ADK)$. Найти расстояние от M до CD .

Решение:

Опустим M и B – перпендикуляры на CD .

$$ME \text{ и } BH. \frac{S(ADK)}{S(BCK)} = \frac{AK}{BH} = 6 \Rightarrow BH = 4$$

$$\text{в трапеции } ABHK - ME - \text{ средняя линия} \Rightarrow ME = \frac{24 + 4}{2} = 14 \text{ см.}$$

Ответ: 14 см.

б) Дано: (см. рис. пункта а)), $ABCD$ – трапеция, $AK \perp CD$, K – середина CD , M – середина AB , $AK = 18$ см, $S(BCK) = \frac{1}{9}S(ADK)$.

Решение:

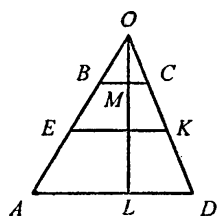
Опустим M и B – перпендикуляры на CD , ME и BH .

$$\frac{S(ADK)}{S(BCK)} = \frac{\frac{1}{2}AK \cdot KD}{\frac{1}{2}CK \cdot BH} = \frac{AK}{BH} = 9 \Rightarrow BH = 2.$$

В трапеции $ABHK$ – ME – средняя линия $\Rightarrow ME = \frac{18+2}{2} = 10$ см.

Ответ: 10 см.

10.2.D06



а) Дано: трапеция $ABCD$, $\angle BAD = 19^\circ$, $\angle CDA = 71^\circ$
 $AE = EB$, $BM = MC$, $CK = KD$, $DC = CA$. $EK = 12$,
 $ML = 10$ или $EK = 10$, $ML = 12$. Найти BC и AD .

Решение:

Пусть $AD : BC = x$, $\angle AOD = 90^\circ \Rightarrow$

$$OL = \frac{1}{2} AD = \frac{x}{2} BC.$$

$$EK = \frac{1}{2}(x+1)BC, \frac{OM}{OL} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{x}$$

$$ML = \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot OL = \frac{x-1}{x} \cdot \frac{x}{2} BC = \frac{(x-1)}{2} \cdot \frac{2EK}{(x+1)}$$

$$\Rightarrow ML(x+1) = (x-1)EK \Rightarrow ML = 10 \text{ см}, EK = 12 \text{ см}$$

$$x = \frac{ML + EK}{EK - ML} = 11 \Rightarrow AD = 11 \text{ см}, BC = 1 \text{ см}.$$

Ответ: 11 см, 1 см.

б) Дано: трапеция $ABCD$, $\angle BAD = 17^\circ$, $\angle CDA = 73^\circ$. $AE = EB$, $BM = MC$,
 $CK = KD$, $LD = LA$ (см. рис. пункта а)). $EK = 14$ см, $ML = 8$ см или $EK = 8$ см,
 $ML = 14$ см. Найти BC и AD .

Решение:

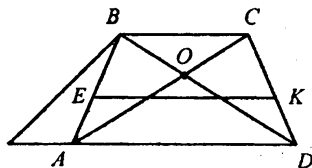
Пусть $AD : BC = x$, повторяя рассуждения пункта а) получим формулу

$$x = \frac{ML + EK}{EK - ML}, \Rightarrow EK = 14 \text{ см}, ML = 8 \text{ см}. \Rightarrow x = \frac{22}{6} = \frac{11}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC = 6 \text{ см}, AD = 22 \text{ см}.$$

Ответ: 6 см, 22 см.

10.2.D07



а) Дано: $ABCD$ – трапеция, EK – средняя
 линия. $EK = 2,5$ см, $AC = 4$ см, $BD = 3$ см.
 Найти $S(ABCD)$.

Решение:

Из точки B проведем $BC_1 \parallel AC \Rightarrow$

$$\Rightarrow AC_1 + AD = BC + AD = 2EK = 5 \text{ см}.$$

Т.к. $BC_1 = AC = 4$ см, и $BC_1^2 + BD^2 = C_1D^2$, то $C_1BD = 90^\circ \Rightarrow \angle AOD = 90^\circ$

$$\Rightarrow S(ABCD) = \frac{1}{2} AC \cdot BD = 6 \text{ см}^2. \text{ Ответ: } 6 \text{ см}^2.$$

б) Дано: $ABCD$ – трапеция, EK – средняя линия. $EK = 6,5$ см, $AC = 5$ см, $BD = 12$ см. (см. рис. пункта а)). Найти $S(ABCD)$.

Решение:

Сделав построение, как и в пункте а) и повторив рассуждения, также получим, что $\angle AOD = 90^\circ \Rightarrow S(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30 \text{ см}^2$.

Ответ: 30 см^2 .

10.2.D08

а) Нет, т.к. с одной стороны по неравенству треугольника сторона квадрата ($a < 16+1$), т.е. ($a < 7$), а с другой либо a , либо диагональ

$a\sqrt{2} > 10$, т.е. $a > \frac{10}{\sqrt{2}}$. Но $a > \frac{10}{\sqrt{2}} > 7 > a$, что невозможно.

Ответ: нет.

б) Аналогичными рассуждениями показывается, что если такое возможно, то $a > \frac{16}{\sqrt{2}} > 11 > a$ – противоречие.

Ответ: нет.

10.2.D09

а) Середины противоположных сторон являются вершинами параллелограмма, площадь которого в 2 раза меньше площади четырехугольника, а т.к. диагонали равны, то этот параллелограмм – ромб с диагоналями 12 см и 16 см.

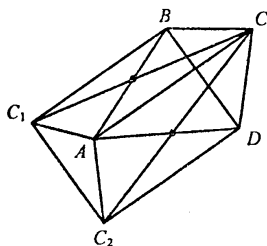
$$\Rightarrow S_{\text{ромба}} = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 12 = 96 \text{ см}^2 \Rightarrow S = 96 \cdot 2 = 192 \text{ см}^2.$$

Ответ: 180 см^2 .

б) Аналогично рассуждая, получим, что $S = 10 \cdot 18 = 180 \text{ см}^2$.

Ответ: 180 см^2 .

10.2.D10



а) Дано: $ABCD$ – выпуклый четырехугольник, $S(ABCD) = 19 \text{ см}^2$. C_1 – симметрична C относительно середины AB . C_2 – симметрична C относительно середины AD . Найти $S(C_1BDC_2)$.
Решение:

Т.к. CC_1 и AB точкой пересечения делятся пополам, то C_1BCA – параллелограмм, аналогично $ACDC_2$ параллелограмм $\Rightarrow BC_1AC_2 = \triangle BCD$.

$$S(ABC) + S(ACD) = \frac{1}{2} S(C_1BCA) + \frac{1}{2} S(ACDC_2) = S(ABCD)$$

$$\text{Но } S(C_1BCA) + S(ACDC_2) = S(C_1BDC_2) = 2S(ABCD) = 38 \text{ см}^2.$$

Ответ: 38 см^2 .

б) Дано: (см. рис. пункта а)). $ABCD$ – выпуклый четырехугольник, $S(C_1BDC_2) = 38 \text{ см}^2$. C_1 – симметрична C относительно середины AB . C_2 – симметрична C относительно середины AD . Найти $S(ABCD)$.

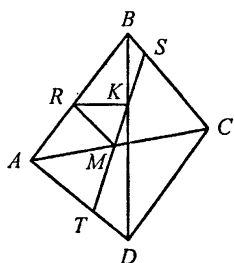
Решение:

Рассуждая также, как и в пункте а) получим, что

$$S(ABCD) = \frac{1}{2} S(C_1BDC_2) = 19 \text{ см}^2.$$

Ответ: 19 см^2 .

10.2.D11



а) Дано: $ABCD$ – выпуклый четырехугольник. $BC = 6 \text{ см}$, $AD = 8 \text{ см}$, M – середина AC , K – середина BD , $\angle CST = 27^\circ$, $\angle ATS = 63^\circ$. Найти KM .

Решение:

R – середина AB , соединим RK и RM ,

$$RM = \frac{1}{2} BC = 3 \text{ см}, RM \parallel BC \Rightarrow \angle RMK = 27^\circ$$

$$RK = \frac{1}{2} AD = 4 \text{ см}, RK \parallel AD \Rightarrow \angle RKM = 63^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle KRM = 90^\circ \Rightarrow KM = \sqrt{RK^2 + RM^2} = 5 \text{ см}.$$

Ответ: 5 см .

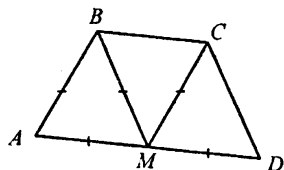
б) Дано: (в условии есть опечатка, поэтому считаем, что в условии рисунок, как в пункте а)). $BC = 10 \text{ см}$, $AD = 24 \text{ см}$, $\angle CST = 33^\circ$, $\angle ATS = 57^\circ$. M – середина AC , K – середина BD . Найти KM .

Решение: Рассуждая, как и в пункте а) получим что

$$KM = \sqrt{\left(\frac{1}{2} BC\right)^2 + \left(\frac{1}{2} AD\right)^2} = 13 \text{ см}$$

Ответ: 13 см .

10.2.D12



а) Дано: $ABCD$ – выпуклый четырехугольник. M – середина AD , $BC = 4 \text{ см}$, $AM = BM = CM = DM$. $\angle B = 128^\circ$, $\angle C = 112^\circ$. Найти AD .

Решение:

Пусть $\angle BAM = \alpha = \angle MBA$,

$\angle MBC = \angle MCB = \beta$, $\angle MCD = \angle MDC = \gamma$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 360^\circ \\ \alpha + \beta = 128^\circ \\ \beta + \gamma = 112^\circ \end{cases} \Rightarrow 60^\circ = \beta. \text{ В } \triangle BMC, \angle BMC = 180^\circ - 60^\circ \cdot 2 = 60^\circ$$

$$\Rightarrow BC = BM = AM = MD = \frac{1}{2} AD \Rightarrow AD = 8 \text{ см}. \text{ Ответ: } 8 \text{ см}.$$

б) Дано: (см. рис. пункта а)). $ABCD$ – выпуклый четырехугольник
 M – середина AD , $BC = 6$ см, $\angle B = 116^\circ$, $\angle C = 124^\circ$. Найти AD .

Решение:

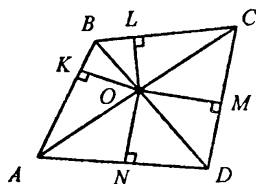
Пусть $\angle BAM = \angle MBA = \alpha$, $\angle MBC = \beta$, $\angle MCD = \angle MDC = \gamma$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 360^\circ \\ \alpha + \beta = 116^\circ \\ \beta + \gamma = 124^\circ \end{cases} \Rightarrow \beta = 60^\circ \Rightarrow \triangle BMC - \text{равносторонний} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AD = 2BC = 12 \text{ см.}$$

Ответ: 12 см.

10.2.D13



а) Дано: $ABCD$ – выпуклый четырехугольник.
 $OK = OL = OM = ON = 8$ см, $AC = 20$ см, O – середина BD . Найти $S(ABCD)$.

Решение:

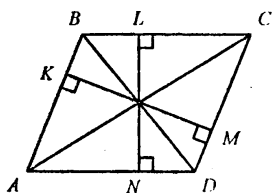
Т.к. $OK = OL = OM = ON = 8$ см, то O – точка пересечения биссектрис четырехугольника, т.к. $BO = OD \Rightarrow \triangle ABD$ и $\triangle CDB$ – равнобедренные.

Более того, $\triangle ABD = \triangle CDB \Rightarrow ABCD$ – ромб. $LC = \sqrt{OC^2 - OL^2} = 9$
 $\triangle OLC \sim \triangle OBC \Rightarrow$

$$\Rightarrow K = \frac{LC}{OC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \Rightarrow S(BOC) = \frac{S(LOC)}{K^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{9} \cdot 8 \cdot 6 = \frac{200}{3} \text{ см}^2.$$

$$\Rightarrow S(ABCD) = 4S(BOC) = \frac{800}{3} \text{ см}^2.$$

Ответ: $\frac{800}{3} \text{ см}^2$.



б) Дано: $ABCD$ – выпуклый четырехугольник.
 $OK = OL = OM = ON = 9$ см, $BO = 30$ см.
 Найти $S(ABCD)$.

Решение:

Аналогично показывается, что $ABCD$ – ромб.

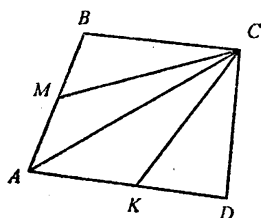
$$BK = \sqrt{\left(\frac{1}{2}BD\right)^2 - OK^2} = 12$$

$$S(OBK) = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 = 54 \text{ см}^2, \triangle OKB \sim \triangle AOB \Rightarrow K = \frac{BO}{BK} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}.$$

$$\Rightarrow S(ABCD) = 4S(AOB) = 4S(OBK) \cdot \frac{25}{16} = \frac{54 \cdot 4 \cdot 25}{16} = \frac{675}{2} \text{ см}^2.$$

Ответ: $\frac{675}{2} \text{ см}^2$.

10.2.D14



а) Дано: $ABCD$ – выпуклый четырехугольник.
 M – середина AB , K – середина AD ,
 $S(AMCK) = 6 \text{ см}^2$. Найти $S(ABCD)$.
 Решение:

$$\frac{S(MBC)}{S(MCA)} = \frac{\frac{1}{2} MB \cdot MC \cdot \sin \angle BMC}{\frac{1}{2} MA \cdot MC \cdot \sin \angle CMA} = 1$$

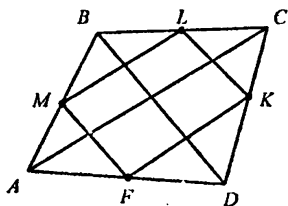
$$\Rightarrow S(MBC) = S(MCA), \text{ и } S(AKC) = S(CKD) \Rightarrow S(MCKA) = S(AMC) + S(ACK) = \\ = \frac{1}{2} S(ABC) + \frac{1}{2} S(ACD) = \frac{1}{2} S(ABCD) \Rightarrow S(ABCD) = 12 \text{ см}^2.$$

Ответ: 12 см^2 .

б) Задача аналогична пункту а). $\Rightarrow \frac{1}{2} S(ABCD) = S(AMCK) = 4 \text{ см}^2$.

Ответ: 4 см^2 .

10.2.D15



а) Дано: $ABCD$ – выпуклый четырехугольник.
 F, M, K – середины AD, AB, CD , $FM = 6\sqrt{3}$, $KF = 10 \text{ см}$, $\angle MFK = 120^\circ$.
 Найти $S(ABCD)$.

Решение: C – середина BC , ML – средняя линия $\triangle ABC$, FK – средняя линия $\triangle ADC \Rightarrow$

$$MC = FK = \frac{1}{2} AC \Rightarrow MCKF \text{ – параллелограмм.}$$

$$S(AMF) + S(MBL) + S(LCK) + S(KDF) = \\ = \frac{1}{4} S(ABD) + \frac{1}{4} S(ABC) + \frac{1}{4} S(CDA) + \frac{1}{4} S(BCD) = \frac{1}{4} (2S(ABCD)) = \\ = \frac{1}{2} S(ABCD) \Rightarrow S(MLKF) = \frac{1}{2} S(ABCD) \Rightarrow S(ABCD) = 2S(MCKF) = \\ = 6\sqrt{3} \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 180 \text{ см}^2.$$

Ответ: 180 см^2 .

б) Дано: (см. рис. пункта а)). $ABCD$ – выпуклый четырехугольник.
 F, M, K – середины AD, AB, CD . $FM = 8\sqrt{2} \text{ см}$, $KF = 12 \text{ см}$, $\angle MKF = 135^\circ$.
 Найти $S(ABCD)$.

Решение:

L – середина BC . Рассуждая аналогично, получим

$$S(ABCD) = 2S(MLKF) = 2 \cdot 8\sqrt{2} \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 192 \text{ см}^2.$$

Ответ: 192 см^2 .

§ 3. Окружности

Уровень А

10.3.A01

а) $2\pi R = l = 16\pi \Rightarrow R = 8 \Rightarrow S = \pi R^2 = 64\pi$. Ответ: 64π .

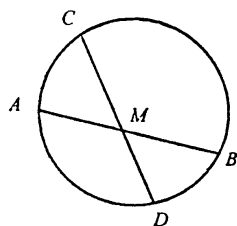
б) $2\pi R = l = 14\pi \Rightarrow R = 7 \Rightarrow S = \pi R^2 = 49\pi$. Ответ: 49π .

10.3.A02

а) $\frac{S_{\text{круга}}}{S_{\text{прям}}} = \frac{64\pi}{192} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow S_{\text{круга}} \text{ больше. Ответ: } S_{\text{круга}} > S_{\text{прям}}$

б) $\frac{S_{\text{круга}}}{S_{\text{прям}}} = \frac{36\pi}{144} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow S_{\text{прям}} \text{ больше. Ответ: } S_{\text{круга}} < S_{\text{прям}}$

10.3.A03



а)

$$MC \cdot MD = AM \cdot MB \Rightarrow MA = \frac{MC \cdot MD}{MB} = \frac{6 \cdot 4}{8} = 3 \text{ см.}$$

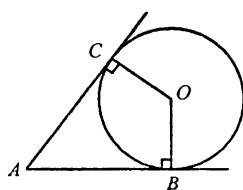
Ответ: 3 см.

б)

$$MC \cdot MD = AM \cdot MB \Rightarrow MA = \frac{MC \cdot MD}{MB} = \frac{4 \cdot 9}{3} = 12 \text{ см.}$$

Ответ: 12 см.

10.3.A04



а) $\angle BAC = 360^\circ - \angle OCA - \angle COB - \angle CBO =$
 $= 180^\circ - \angle BOC = 180^\circ - 147^\circ = 33^\circ$

Ответ: 33°

б) $\angle BOC = 360^\circ - \angle OCA - \angle CAB - \angle CBO =$
 $= 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - 47^\circ = 133^\circ.$

Ответ: 133° .

10.3.A05

а) $\frac{5}{12} \cdot 360^\circ = 150^\circ$

Ответ: 150° .

б) $\frac{3}{8} \cdot 360^\circ = 135^\circ$

Ответ: 135° .

10.3.A06

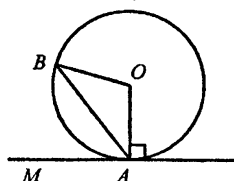
a) $\sqrt{15^2 - \left(\frac{18}{2}\right)^2} = 12 \text{ cm.}$

Ответ: 12 cm.

б) $2\sqrt{20^2 - 16^2} = 44 \text{ cm.}$

Ответ: 44 cm.

10.3.A07



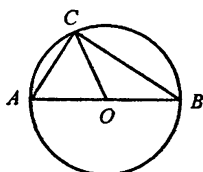
a) $\angle MAB = \frac{1}{2} \angle BOA = 14^\circ$

Ответ: 14° .

б) $\angle AOB = 2 \angle MAB = 74^\circ$

Ответ: 74° .

10.3.A08



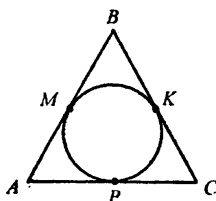
a) $\angle ACB = 90^\circ \Rightarrow \angle AOC = 2 \angle OCB = 78^\circ$

Ответ: 78° .

б) $\angle C = 90^\circ \Rightarrow \angle OCB = \frac{1}{2} \angle AOC = 23^\circ$

Ответ: 23° .

10.3.A09



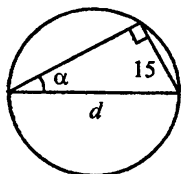
a) $AP = AM, MB = BK, KC = PC. P = AB + BC + AC = AP + AM + BK + BM + KC + PC = 2(AP + BM + CK) = 26 \text{ cm}$

Ответ: 26 cm.

б) $P = AB + BC + AC = AP + AM + MB + BK + KC + PC = 2(AM + BK + CP) = 22 \text{ cm.}$

Ответ: 22 cm.

10.3.A10



a) $d = \frac{15}{\sin \alpha} = \frac{15}{\frac{3}{7}} = 35 \text{ cm.}$ Ответ: 35 cm.

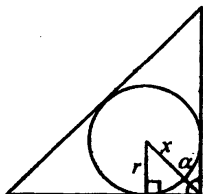
б) $d = \frac{16}{\frac{4}{9}} = 36$ Ответ: 36 cm.

10.3.A11

$$r = x \sin \frac{\alpha}{2}$$

a) $r = 18 \cdot \sin 60^\circ = 9\sqrt{3} \text{ cm.}$ Ответ: $9\sqrt{3} \text{ cm.}$

б) $r = 26 \cdot \sin 45^\circ = 13\sqrt{2} \text{ cm.}$ Ответ: $13\sqrt{2} \text{ cm.}$



10.3.A12

$$R = \sqrt{\frac{l^2}{4} + x^2}$$

а) $R = \sqrt{100 + 576} = 26$ см. *Ответ: 26 см.*

б) $R = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ см. *Ответ: 13 см.*

10.3.A13

$$R = 2r$$

а) $R = 84$ см. *Ответ: 84 см.*

б) $r = \frac{36}{2} = 18$ см. *Ответ: 18 см.*

10.3.A14

а) a – сторона квадрата, $r = \frac{a}{2}$, $d = a\sqrt{2} \Rightarrow a = 12 \Rightarrow r = 6$ см.

Ответ: 6 см.

б) Радиус окружности – половина диаметра, т.е. $R = \frac{a\sqrt{2}}{2} = 8$ см.

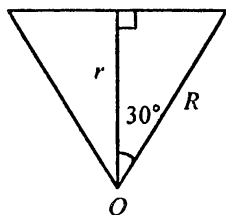
Ответ: 8 см.

10.3.A15

$$R \cos 30^\circ = r \Rightarrow r = R \frac{\sqrt{3}}{2}$$

а) $R = \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{36}{\sqrt{3}} = 12\sqrt{3}$

б) $r = R \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$.



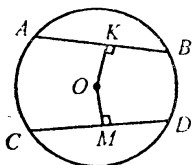
Уровень В

10.3.B01

а) Нет, т.к. диаметр окружности должен быть больше каждой из сторон a и $d = 22 < 24$.

б) Нет, т.к. диаметр окружности больше каждой из сторон a и $d = 34 < 35$.

10.3.B02



а) Дано: хорды AB и CD , $OK \perp AB$, $OM \perp CD$.

O – центр окружности. $AB = 10$ см, $OK = 12$ см, $OM = 5$ см. Найти CD .

Решение:

$$OB = \sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + OK^2} = 13 \text{ см} \Rightarrow CD = 2\sqrt{OB^2 - OM^2} =$$

$= 26$ см. *Ответ: 26 см.*

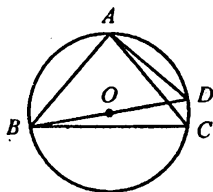
б) Дано: (см. рис. пункта а)). AB и CD – хорды, O – центр окружности.
 $OK \perp AB$, $OM \perp CD$, $CD = 16$ см, $AB = 12$ см, $OK = 8$ см. Найти OM .

Решение:

$$OB = \sqrt{OK^2 + \left(\frac{1}{2}AB\right)^2} = 10, \quad OM = \sqrt{OD^2 - \left(\frac{1}{2}CD\right)^2} = 6 \text{ см.}$$

Ответ: 6 см.

10.3.B03



а) Дано: AB , BC – хорды, O – центр окружности.
 $\angle ABO = 42^\circ$. Найти $\angle ACB$.

Решение:

BD – диаметр, $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ - \angle ABD = 48^\circ$

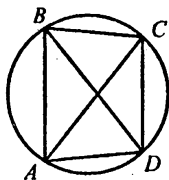
Ответ: 48° .

б) Дано: AB , BC – хорды, O – центр окружности.
 $\angle ABO = 36^\circ$ (см. рис. пункта а)). Найти $\angle ACB$.

Решение: BD – диаметр, $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ - \angle ABD = 54^\circ$

Ответ: 54° .

10.3.B04



а) Дано: в окружность вписан $ABCD$.

$\angle BAD = 75^\circ$, $\angle AOB = 37^\circ$. Найти $\angle ACD$.

Решение:

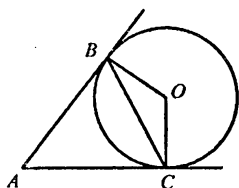
$\angle ACD + \angle ADB + \angle BAD = 180^\circ \Rightarrow \angle ACD = 70^\circ$.

Ответ: 70° .

б) Дано: в окружность вписан $ABCD$ (см. рис. пункта а)).
 $\angle ACD = 64^\circ$, $\angle ADB = 46^\circ$. Найти $\angle BAD$.

Решение: $\angle ACD + \angle ADB + \angle BAD = 180^\circ \Rightarrow \angle BAD = 70^\circ$. Ответ: 70° .

10.3.B05



а) Дано: O – центр окружности, AB , AC – касательные
 $\angle A = 40^\circ$. Найти углы $\angle BOC$.

Решение:

$\angle BOC = 180^\circ - \angle A = 140^\circ$, $\angle OBC = \angle OCB \Rightarrow$

$\angle OBC = \angle OCB = \frac{180^\circ - 140^\circ}{2} = 20^\circ$

Ответ: 20° , 20° , 140° .

б) Дано: O – центр окружности, AB , AC – касательные $\angle BOC = 50^\circ$. (см. рис. пункта а)). Найти углы $\angle ABC$.

Решение: $\angle BAC = 180^\circ - \angle BOC = 130^\circ$, $AB = AC \Rightarrow \angle ABC = \angle ACB =$
 $= \frac{180^\circ - 130^\circ}{2} = 25^\circ$. Ответ: 25° , 25° , 130° .

10.3.B06

а) Дуга, стягиваемая двумя соседними точками равна

$$\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ \Rightarrow \cup A_1 A_3 = \cup A_1 A_2 + \cup A_2 A_3 = 90^\circ \Rightarrow \angle A_1 A_7 A_3 = \frac{1}{2} \cup A_1 A_3 = 45^\circ.$$

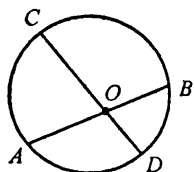
Ответ: 45° .

б) Дуга, стягиваемая двумя соседними точками равна

$$\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ \Rightarrow \cup A_2 A_9 A_5 = \frac{1}{2} \cup A_2 A_3 = \frac{1}{2} (\cup A_2 A_3 + \cup A_3 A_4 + \cup A_4 A_5) = 60^\circ$$

Ответ: 60° .

10.3.B07



а) Дано: AB, CD – хорды,

$$\cup AC : \cup CB : \cup BD : \cup DA = 2 : 3 : 5 : 10$$

Найти угол между AB и CD .

Решение:

$$\text{Пусть } \cup AC = 2x \Rightarrow \cup AC + \cup CB + \cup BD + \cup DA = 360^\circ = 2x + 3x + 5x + 10x \Rightarrow x = 18^\circ \Rightarrow$$

$$\cup AC = 36^\circ, \cup BD = 90^\circ \Rightarrow \angle COA = \frac{1}{2} (\cup AC + \cup BD) = 63^\circ$$

Ответ: 63° .

б) Дано: AB, CD – хорды, $\cup AC : \cup CB : \cup BD : \cup DA = 3 : 5 : 2 : 4$ (см. рис. пункта а)). Найти угол между AB и CD .

Решение:

$$\text{Пусть } \cup BD = 2x \Rightarrow \cup AC = 3x, \cup CB = 5x, \cup DA = 4x \Rightarrow 2x + 3x + 4x + 5x =$$

$$= 360^\circ \Rightarrow x = \frac{180^\circ}{7} \Rightarrow \cup AC = \frac{180^\circ \cdot 3}{7}, \cup BD = \frac{180^\circ \cdot 2}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle COA = \frac{1}{2} (\cup AC + \cup BD) \Rightarrow \angle COA = \frac{450^\circ}{7}. \text{ Ответ: } \frac{450^\circ}{7}.$$

10.3.B08

а) Пусть $\cup AB = 3x \Rightarrow \cup BC = 4x, \cup CD = 5x, \cup DA = 6x$

$$\Rightarrow 3x + 4x + 5x + 6x = 360^\circ \Rightarrow x = 20^\circ.$$

$$\cup BC = 80^\circ, \cup DA = 120^\circ \text{ угол } AB \text{ и } CD \text{ равен } \frac{1}{2} (\cup DA - \cup BC) = 20^\circ.$$

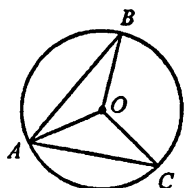
Ответ: 20° .

б) Пусть $\cup DA = 3x \Rightarrow \cup AB = 6x, \cup BC = 5x, \cup CD = 4x$

$$\Rightarrow x = 20^\circ, \cup BC = 100^\circ, \cup AD = 60^\circ \Rightarrow \text{угол между } AB \text{ и } CD \text{ равен}$$

$$\frac{1}{2} (\cup BC - \cup AD) = 20^\circ. \text{ Ответ: } 20^\circ.$$

10.3.B09



а) Дано: AB и AC – хорды, O – центр окружности
 $\angle ABO = 23^\circ$, $\angle ACO = 32^\circ$, $\angle BAC$ – острый.

Найти $\angle BAC$.

Решение:

$AO = OB \Rightarrow \angle BAO = \angle ABO$, $AO = OC \Rightarrow \angle OAC = \angle OCA \Rightarrow \angle BAC = \angle BAO + \angle OAC = \angle OBA + \angle OCA = 55^\circ$.

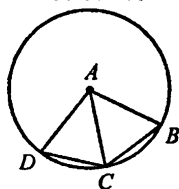
Ответ: 55° .

б) Дано: AB и AC – хорды, O – центр окружности (см. рис. пункта а)).
 $\angle BOC = 180^\circ$, $\angle ABO = 17^\circ$, $\angle ACO = 71^\circ$. Найти $\angle BOC$.

Решение: По предыдущему пункту $\angle BAC = \angle ABO + \angle ACO = 88^\circ$
 $\Rightarrow \angle BOC = 2\angle BAC = 176^\circ$

Ответ: 176° .

10.3.B10



а) Дано: A – центр окружности с радиусом $AB = AC = AD$.
 $ABCD$ – выпуклый четырехугольник.

$\angle ABC = 54^\circ$, $\angle ADC = 43^\circ$. Найти $\angle BAD$.

Решение:

$\angle ADC = \angle ACD = 43^\circ$, $\angle ACB = \angle ABC = 54^\circ$
 $\Rightarrow \angle BAD = 360^\circ - 2\angle ADC - 2\angle ABC = 166^\circ$.

Ответ: 166° .

б) Дано: (см. рис. пункта а)). A – центр окружности с радиусом $AB = AC = AD$.
 $ABCD$ – выпуклый четырехугольник. $\angle ABC = 67^\circ$, $\angle ADC = 78^\circ$

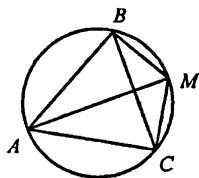
Найти $\angle BAD$.

Решение:

Из предыдущего пункта $\angle BAD = 360^\circ - 2(\angle ADC + \angle ABC) = 70^\circ$

Ответ: 70° .

10.3.B11



а) $\angle BAM = \angle MAC \Rightarrow \cup BM = \cup MC \Rightarrow BM = CM = 14$ см.

Ответ: 14 см.

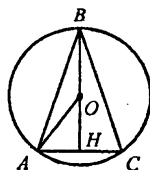
б) $\angle BAM = \angle MAC \Rightarrow \cup BM = \cup MC \Rightarrow BM = CM = 12$ см.

Ответ: 12 см.

10.3.B12

а) $BO = AO = R = 5$, $BH = 8 \Rightarrow OH = 3 \Rightarrow AH = \sqrt{AO^2 - OH^2} =$
 $= \sqrt{25 - 9} = 4$ см $\Rightarrow AC = 8$ см. $S = \frac{1}{2} BH \cdot AC = 16$ см².

Ответ: 16 см².



б) $BO = AO = R = 10$ см, $AC = 12$ см, $OH = \sqrt{R^2 - \left(\frac{1}{2}AC\right)^2} = 8$ см $\Rightarrow BH =$
 $= 18$ см $\Rightarrow S = \frac{1}{2}BH \cdot AC = 108$ см².
 Ответ: 108 см².

10.3.B13

а) Т.к. в эту трапецию можно вписать окружность, то суммы противоположных сторон равны $\Rightarrow$ полусумма оснований равна

$$\frac{1}{2}(10+16) = 13 \text{ см, высота } 10 \text{ см} \Rightarrow S = 10 \cdot 13 = 130 \text{ см}^2.$$

Ответ: 130 см².

б) Т.к. в эту трапецию можно вписать окружность, то суммы противоположных сторон равны $\Rightarrow$ полусумма оснований равна

$$\frac{1}{2}(12+18) = 15 \text{ см} \Rightarrow S = 12 \cdot 15 = 180 \text{ см}^2.$$

Ответ: 180 см².

10.3.B14

а) Суммы противоположных сторон равны $\Rightarrow$ это ромб $\Rightarrow P = 4 \cdot 5 = 20$ см.

Ответ: 20 см.

б) Сумма противоположных сторон равна $180^\circ \Rightarrow$ это прямоугольник $\Rightarrow$ вторая диагональ равна 7 см.

Ответ: 7 см.

10.3.B15

а) Суммы противоположных сторон равны, длина средней линии – полусумма оснований – равна $\frac{1}{2} \cdot 16 = 8$ см.

Ответ: 8 см.

б) Трапеция равнобокая, т.к. сумма противоположных углов равна 180° и сумма углов, принадлежащих боковой стороне равна 180° .

$\Rightarrow$ два угла по 37° и 2 угла по $(180^\circ - 37^\circ) = 143^\circ$.

Ответ: $37^\circ, 37^\circ, 143^\circ, 143^\circ$.

Уровень С

10.3.C01

а) $\angle A = 180^\circ - \angle B - \angle C = 30^\circ$.

По теореме синусов $\frac{BC}{\sin \angle A} = 2R = 16$ см $\Rightarrow BC = 16 \cdot \sin 30^\circ = 8$ см.

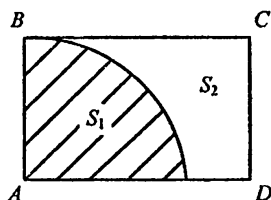
Ответ: 8 см.

б) (в условии скорее всего опечатка $\angle B = 63^\circ$, $\angle C = 87^\circ$)

$$\angle A = 180^\circ - \angle B - \angle C = 30^\circ, R = \frac{BC}{2 \sin \angle A} = 12 \text{ см.}$$

Ответ: 12 см.

10.3.C02



$$\text{а) } S_1 = \frac{1}{4} \pi \cdot AB^2 = 16\pi$$

$$S_2 = 8 \cdot 12 - 16\pi = 96 - 16\pi = 16(6 - \pi)$$

$$\pi > 6 - \pi \Rightarrow S_1 > S_2.$$

Ответ: той, что лежит внутри окружности.

$$\text{б) } S_1 = \frac{1}{4} \pi \cdot AB^2 = \frac{49}{4} \pi$$

$$S_2 = 7 \cdot 14 - \frac{49}{4} \pi = \frac{49}{4} (8 - \pi), \pi < 8 - \pi \Rightarrow S_1 > S_2.$$

Ответ: той, что лежит внутри окружности.

10.3.C03

а) Найдем меньший угол, пусть он равен $6x \Rightarrow 6x + 7x + 23x = 180^\circ \Rightarrow x = 5$.

$$\Rightarrow \text{меньший угол равен } 30^\circ. \Rightarrow R = \frac{12}{2 \cdot \sin 30^\circ} = 12 \text{ см.}$$

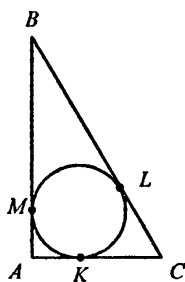
Ответ: 12 см.

б) Найдем меньший угол, пусть он равен $4x \Rightarrow 4x + 9x + 11x = 180^\circ \Rightarrow$

$$x = 7,5^\circ \Rightarrow 4x = 30^\circ \Rightarrow \text{меньшая из сторон равна } 2R \sin 30^\circ = 14 \text{ см.}$$

Ответ: 14 см.

10.3.C04



а) Дано: $\triangle ABC$, $\angle A = 90^\circ$, M, K, L — точки касания вписанной окружности, $AK = 7$ см, $KC = 8$ см.

Найти диаметр описанной окружности.

Решение:

Пусть $BM = x = BL$, $AK = AM = 7$ см, $KC = CL = 8$ см.

$$\Rightarrow (7+x)^2 + 15^2 = (x+8)^2 \Rightarrow (2x+15)^2 = 225 \Rightarrow x = 10,5 \text{ см.}$$

$$\Rightarrow d = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} (10,5 + 8) = \frac{11,5}{2} \text{ см.}$$

$$\text{Ответ: } \frac{11,5}{2} \text{ см.}$$

б) Дано: $\triangle ABC$, $\angle A = 90^\circ$, M, K, L — точки касания вписанной окружности, $AK = 5$ см, $KC = 6$ см. (см. рис. пункта а).

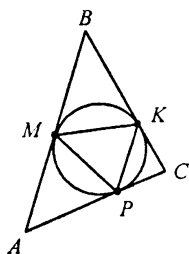
Найти диаметр описанной окружности.

Решение:

Пусть $BM = x = BL$, $AK = AM = 5$ см, $KC = CL = 6$ см $\Rightarrow (5+x)^2 + 11^2 = (6+x)^2 \Rightarrow (2x+11) = 121 \Rightarrow x = 55$ см $\Rightarrow d = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(55+8) = \frac{63}{2}$ см.

Ответ: $\frac{63}{2}$ см.

10.3.C05



а) $\angle B = \frac{1}{2}(\angle MPK - \angle MKP) = \angle MKP + \angle KMP - \angle MPK$

$\angle A = \angle KMP + \angle MPK - \angle MKP$

$\angle C = \angle MPK + \angle MKP - \angle KMP$

$\Rightarrow$ Углы треугольника $46^\circ, 68^\circ, 66^\circ$.

Ответ: $46^\circ, 68^\circ, 66^\circ$.

б) Из тех же самых формул следует, что углы треугольника равны, $28^\circ, 88^\circ, 64^\circ$.

Ответ: $28^\circ, 88^\circ, 64^\circ$.

10.3.C06

а) $A(1; 2)$, $B(5; 3)$, $D(1; 18)$. Трапеция равнобокая.

$S_{ABD} = S_{ACD}$, $\overline{AB}\{4; 1\}$, $\overline{AD}\{0; 16\} \Rightarrow \cos \angle(\overline{AB}; \overline{AD}) = \frac{16}{16\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\Rightarrow \sin \angle(\overline{AB}; \overline{AD}) = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow S(ABCD) = 2S(ABD) =$

$= 2 \cdot \frac{1}{2} |\overline{AB}| \cdot |\overline{AD}| \cdot \sin \angle(\overline{AB}, \overline{AD}) = \sqrt{17} \cdot 16 \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} = 64 \text{ см}^2$.

Ответ: 64 см^2 .

б) $A(3; 2)$, $B(4; 7)$, $C(16; 7)$. Трапеция равнобокая.

$S_{(ABD)} = S_{(ACD)}$, $\overline{BA}\{1; 5\}$, $\overline{BC}\{12; 0\} \Rightarrow \cos \angle(\overline{BA}; \overline{BC}) = \frac{12}{12\sqrt{26}}$

$\Rightarrow \sin \angle(\overline{BA}; \overline{BC}) = \frac{5}{\sqrt{26}} \Rightarrow S(ABCD) = 2S(ABC) =$

$= 2 \left(\frac{1}{2} |\overline{BA}| \cdot |\overline{BC}| \cdot \sin \angle(\overline{BA}, \overline{BC}) \right) = \sqrt{26} \cdot 12 \cdot \frac{5}{\sqrt{26}} = 60 \text{ см}^2$.

Ответ: 60 см^2 .

10.3.C07

а) $A(3; -5)$, $B(28; -5)$, $C(19; 7)$. $\overline{AC}\{16; -12\}$, $\overline{BC}\{-9; -12\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow \triangle ABC$ – прямоугольный $\Rightarrow$ центр окружности

$$\left(\frac{28+3}{2}; -5\right) = (15,5; -5). R = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| = 12,5$$

Ответ: $(x-15,5)^2 + (y+5)^2 = (12,5)^2$.

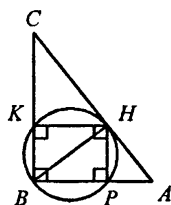
б) $A(5; -3), B(5; 22), C(17; 13)$.

$\overrightarrow{AC}\{12; 16\}, \overrightarrow{BC}\{12; -9\} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow \triangle ABC$ – прямоугольный

$\angle ABC = 90^\circ \Rightarrow$ центр окружности $\left(5; \frac{22-3}{2}\right) = \left(5; \frac{19}{2}\right). R = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| = \frac{25}{2}$.

Ответ: $(x-5)^2 + \left(y - \frac{19}{2}\right)^2 = \left(\frac{25}{2}\right)^2$.

10.3.C08



а) $\angle B = 90^\circ, \angle HKB = \angle HPB = 90^\circ$ – как опирающиеся на диаметр $\Rightarrow B K H P$ – прямоугольник.

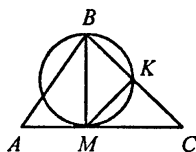
$\Rightarrow PK = BH = 14$ см.

Ответ: 14 см.

б) Аналогично, $PK = BH = 12$ см.

Ответ: 12 см.

10.3.C09



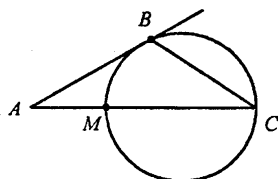
а) $BK = KC, \triangle BMK = \triangle CMK \Rightarrow BM = MC \Rightarrow$

$$AC = \frac{13}{8} MC = \frac{13}{8} \cdot 4 = \frac{13}{2} \text{ см. Ответ: } \frac{13}{2} \text{ см.}$$

б) Аналогично, $BK = KC, BM = MC;$

$$MC = \frac{9}{16} AC = \frac{9}{2} \text{ см. Ответ: } \frac{9}{2} \text{ см.}$$

10.3.C10



а) $AB = 9$ см, $AC = 12$ см.

Пусть M – точка пересечения окружности и AC .

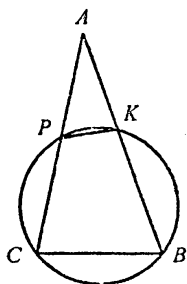
$$\Rightarrow AM \cdot AC = AB^2 \Rightarrow AM = \frac{AB^2}{AC} = \frac{81}{12} = \frac{27}{4}$$

$$MC = AC - AM = \frac{21}{4} \text{ см. Ответ: } \frac{21}{4} \text{ см.}$$

б) $AB = 16$ см, $MC = 10$ см, пусть $AC = x \Rightarrow AC \cdot AM = AB^2 = x(x-10) = 16^2;$
 $x^2 - 10x - 256 = 0 \Rightarrow D = 281 \Rightarrow x = 5 + \sqrt{281}$

Ответ: $5 + \sqrt{281}$.

10.3.C11



$$a) \triangle AKP \sim \triangle ACB \Rightarrow$$

$$\frac{PK}{CB} = \frac{AK}{AC} \Rightarrow PK = \frac{CB}{AC} \cdot AK = \frac{6}{1,5} = 4 \text{ см.}$$

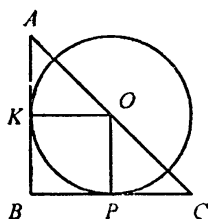
Ответ: 4 см.

$$б) \triangle AKP \sim \triangle ACB \Rightarrow$$

$$\frac{PK}{CB} = \frac{AP}{AB} \Rightarrow PK = AP \cdot \frac{CB}{AB} = \frac{5}{2,5} = 2 \text{ см.}$$

Ответ: 2 см.

10.3.C12



$$a) K, P - \text{точки касания } AB \text{ и } BC.$$

$$\text{В } \triangle AKO, \angle AKO = 90^\circ, OK = r = 2 \text{ см}$$

$$\Rightarrow AK = \sqrt{AO^2 - OK^2} = 1 \Rightarrow AB = AK + KB = AK + OP = 3 \text{ см. } \triangle AKO \sim \triangle ABC \Rightarrow$$

$$\frac{AK}{AB} = \frac{OK}{BC} \Rightarrow BC = \frac{OK \cdot AB}{AK} = \frac{2 \cdot 3}{1} = 6 \text{ см.}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} AB \cdot BC = 9 \text{ см}^2.$$

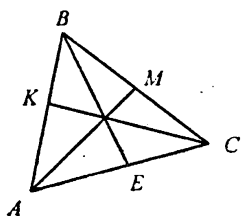
Ответ: 9 см². (в условии скорее всего опечатка $OA = \sqrt{10}$.)

б) Аналогично, $AK = \sqrt{AO^2 - OK^2} = 1 \text{ см} \Rightarrow AB = 1 + 3 = 4 \text{ см} \Rightarrow$
т.к. $\triangle AKO \sim \triangle ABC$.

$$\frac{AK}{KO} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow BC = \frac{KO \cdot AB}{AK} = \frac{3 \cdot 4}{1} = 12 \text{ см} \Rightarrow S = \frac{1}{2} BC \cdot AB = 24 \text{ см}^2.$$

Ответ: 24 см².

10.3.C13



$$a) CK - \text{третья медиана, } AM = BE = 7 \text{ см}$$

$$\triangle AOE = \triangle BOM \Rightarrow BM = AE = MC$$

$$\Rightarrow \text{т.к. } \angle OMC + \angle OEC = 180^\circ \Rightarrow \angle OEA = \angle OMC$$

$$\Rightarrow \triangle AOE = \triangle COM \Rightarrow CO = AO = \frac{2}{3} AM = \frac{14}{3} \text{ см.}$$

Ответ: 7 см.

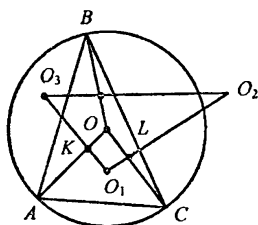
$$б) CK - \text{третья медиана, } AM = BE, AB = 8\sqrt{3}$$

По тем же соображениям, что и в пункте а). AM

$$= BE = CK \Rightarrow \triangle ABC \text{ равносторонний. } \Rightarrow CK = \sqrt{AC^2 - \frac{1}{4} AB^2} = 12 \text{ см.}$$

Ответ: 12 см.

10.3.C14



$$r = \frac{7}{2} = 3,5 \text{ см.}$$

Ответ: 3,5 см.

б) По тем же соображениям, что и в пункте а). Радиус описанной около $\triangle ABC$ окружности в 2 раза больше радиуса вписанной в $\triangle O_1O_2O_3$. Окружности и равен 10 см.

Ответ: 10 см.

10.3.C15

$$\angle DBC = 53^\circ, \angle CDB = 64^\circ$$

а) Из равенства углов $\angle ABD$ и $\angle ACD$ следует, что четырехугольник описанный, т.е. если описать вокруг $\triangle ABD$ окружность, то она пройдет через C .

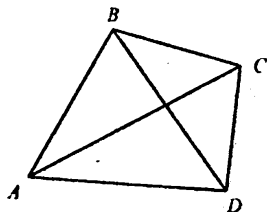
$$\Rightarrow \angle A = \angle CAD + \angle BAC = \angle DBC + \angle CDB = 117^\circ$$

Ответ: 117° .

б) По тем же соображениям четырехугольник является описанным

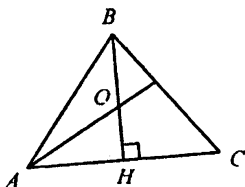
$$\Rightarrow \angle D = \frac{1}{2} \angle ABC = \angle BAC + \angle BCA = 79^\circ$$

Ответ: 79° .



Уровень D

10.3.D01



а) Дано: $\triangle ABC$. AK – биссектриса, BH – высота, $BO : OH = 5 : 4$, $BC = 12$ см. Найти радиус окружности, описанной около ABC .

Решение: Т.к. AO – биссектриса $\triangle ABH$, то

$$\frac{AB}{AH} = \frac{BO}{OH} = \frac{5}{4} = \frac{1}{\cos \angle BAH}$$

$$\Rightarrow \cos \angle BAH = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin \angle BAH = \frac{3}{5} \Rightarrow R = \frac{BC}{2 \sin \angle BAH} = \frac{12}{2 \cdot \frac{3}{5}} = 10 \text{ см.}$$

Ответ: 10 см.

б) Дано: $\triangle ABC$ (см. рис. пункта а). AK – биссектриса, BH – высота, $R = 13$ см, $BC = 24$ см. Найти $BO : OH$.

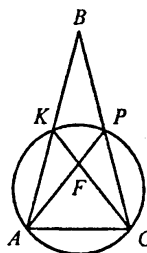
Решение:

По аналогичным соображениям $\frac{BO}{OH} = \frac{1}{\cos \angle BAH}$

$$\sin \angle BAH = \frac{BC}{2R} = \frac{24}{26} = \frac{12}{13} \Rightarrow \cos \angle BAH = \frac{5}{13} \Rightarrow \frac{BO}{OH} = \frac{13}{5}$$

Ответ: 13 : 5.

10.3.D02



а) Дано: $\triangle ABC$, окружность проходит через A и C и пересекает AB и BC в точках K и P .

$\angle ABC = 81^\circ$, $AC = 6$ см, $\angle AKC = 10 \angle KAP$. Найти R .

Решение:

$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\angle AC - \angle KP) = \angle AKC - \angle KAP = \frac{9}{10} \angle AKC = 81^\circ$$

$$\Rightarrow \angle AKC = 90^\circ \Rightarrow R = \frac{1}{2} AC = 3 \text{ см. Ответ: 3 см.}$$

б) Дано: $\triangle ABC$, (см. рис. пункта а)), окружность проходит через A и C и пересекает AB и BC в точках K и P . $\angle ABC = 58^\circ$, $\angle ACF - \angle AKC = 32^\circ$. Найти R .

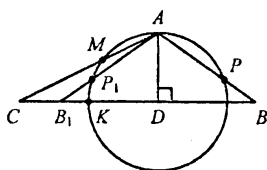
Решение:

$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\angle AC - \angle KC) = \angle AFC - \angle AKC = \frac{1}{2}(\angle AC + \angle KP - \angle AC)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \angle KP = 32^\circ \Rightarrow \angle AKC = 32^\circ + 58^\circ = 90^\circ. \Rightarrow R = \frac{AC}{2} = 4 \text{ см.}$$

Ответ: 4 см.

10.3.D03



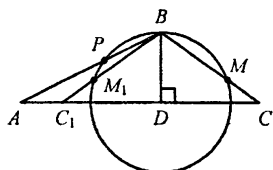
а) Дано: $\triangle ABC$, $\angle A$ – тупой, AD – высота к BC . Окружность с центром в D и радиусом DA пересекает AB и AC в точках P и M , $AB = 9$ см, $AP = 8$ см, $AM = 6$ см. Найти AC .

Решение:

Пусть B_1 – симметричная относительно D точка B , тогда $AB_1 = 9$ см, $AP_1 = 8$ см.

$$\angle ACB = \frac{1}{2}(90^\circ - \angle MK) = \frac{1}{2} \angle MA = \angle MP_1A \Rightarrow \triangle AMP_1 = \triangle AB_1C \Rightarrow$$

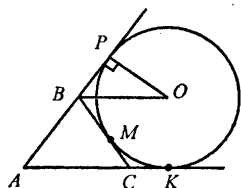
$$\Rightarrow \frac{AM}{AP_1} = \frac{AB_1}{AC} \Rightarrow AC = \frac{AP_1 \cdot AB_1}{AM} = \frac{8 \cdot 9}{6} = 12 \text{ см. Ответ: 12 см.}$$



б) Дано: $\triangle ABC$, $\angle B$ – тупой, BD – высота к AC . Окружность с центром в точке D и радиусом DA пересекает AB и BC в точках P и M . $BC = 12$ см, $BP = 6$ см, $BM = 10$ см. Найти BA .
Решение:

Аналогично, пусть C_1 – симметрична относительно $D \Rightarrow BM_1 = BM = 10$ см, $BC_1 = BC = 12$ см. $\triangle BM_1P \sim \triangle BAC_1 \Rightarrow \Rightarrow \frac{BA}{DC_1} = \frac{BM_1}{BP} \Rightarrow AB = \frac{BC_1 \cdot BM_1}{BP} = \frac{12 \cdot 10}{6} = 20$ см. Ответ: 20 см.

10.3.D04



а) Дано: $\triangle ABC$, $\angle B = 120^\circ$, $\frac{1}{2}P - AB = 7\sqrt{3}$ см.

Окружность касается BC и продолжений AB и AC в точках P и K . Найти радиус этой окружности.

Решение:

$BP = BM$, $MC = CK \Rightarrow P = AB + BM + MC + CK = AB + BP + AC + CK = AP + AK$, но $AP = AK$

$\Rightarrow \frac{1}{2}P = AP \Rightarrow BP = \frac{1}{2}P - AB = 7\sqrt{3}$. O – центр окружности, BO – биссектриса $\angle PBC \Rightarrow \angle PBO = \frac{1}{2}\angle PBC = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ABC) = 30^\circ$

$\Rightarrow R = OP = BP \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 7$ см. Ответ: 7 см.

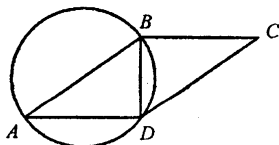
б) Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 60^\circ$ (см. рис. пункта а)). $\frac{1}{2}P - AC = 4\sqrt{3}$ см.

Найти радиус окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC .

Решение: Аналогично пункту а), получим, что $CK = 4\sqrt{3}$ см.

$\angle OCK = \frac{1}{2}\angle BCK = 60^\circ \Rightarrow OK = CK \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 12$ см. Ответ: 12 см.

10.3.D05

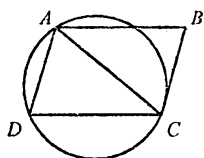


а) Дано: $ABCD$ – параллелограмм, $\angle C = 15^\circ$, $BD = 4$ см. Окружность, описанная около ABD касается CD . Найти $S(ABCD)$.

Решение: $\angle A = 15^\circ$, т.к. DC – касательная, то $\angle BDC = \angle BAD = 15^\circ \Rightarrow AD = BD = BC = 4$ см.

$S(ABCD) = 2S(ADB) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DM \cdot \sin \angle ADB = 4 \cdot 4 \cdot \sin 150^\circ = 8$ см².

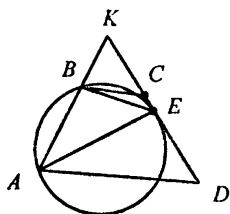
Ответ: 8 см².



б) Дано: $ABCD$ – параллелограмм, $\angle B = 75^\circ$, $AC = 6$ см. Окружность, описанная около ACD касается BC . Найти $S(ABCD)$.

Аналогично, $AB = AC = DC = 6$ см, $\angle ACD = 180^\circ - 2\angle ADC = 30^\circ \Rightarrow S(ABCD) = 2S(ACD) = 2 \cdot \frac{1}{2} AC \cdot DC \cdot \sin \angle ACD = 18 \text{ см}^2$. Ответ: 18 см^2 .

10.3.D06



а) Дано: $ABCD$ – трапеция. $AD = 36$ см, $BC = 12$ м, $\angle A + \angle D = 90^\circ$. Найти радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся прямой CD , если $AB = 16$ см.

Решение:

Пусть AB и CD пересекаются в точке $K \Rightarrow \angle AKD = 90^\circ$, окружность касается CD в точке E .

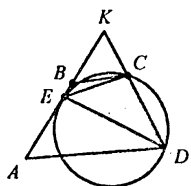
$$\triangle BKC \sim \triangle AKD \Rightarrow \frac{BK}{AK} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{3} \Rightarrow \text{т.к. } AB = 10 \text{ см}$$

$$\Rightarrow KB = 5 \text{ см. } KE^2 = KB \cdot KA = 5 \cdot 15 = 75 \Rightarrow KE = 5\sqrt{3}$$

$$\tan \angle KBE = \frac{5}{5\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \angle KBE = 30^\circ, BE = \sqrt{KB^2 + KE^2} = 10 \text{ см}$$

$$\angle ABE = 150^\circ, AE = \sqrt{AK^2 + KE^2} = 10\sqrt{3} \Rightarrow R = \frac{AE}{2 \sin \angle ABE} = 10 \text{ см.}$$

Ответ: 10 см.



б) Дано: $ABCD$ – трапеция. $AD = 50$ см, $BC = 30$ м, сумма углов при основании равна 90° , $CD = 16$ см. Найти радиус окружности, проходящей через точки C и D и касающейся прямой AB .

Решение:

Аналогично, $AB \cap CD = K$, окружность касается

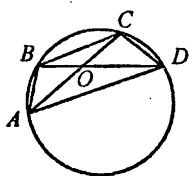
$$AB \text{ в } E. \triangle BKC \sim \triangle AKC \Rightarrow \frac{KC}{KD} = \frac{3}{5} \Rightarrow KC = 24 = 3 \cdot 8$$

$$KE = \sqrt{KC \cdot KD} = \sqrt{24 \cdot 40} = 8\sqrt{15}; EC = \sqrt{EK^2 + KC^2} = 16\sqrt{6};$$

$$\sin \angle ECK = \frac{EK}{EC} = \frac{8\sqrt{15}}{16\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}; ED = \sqrt{EK^2 + KD^2} = 8\sqrt{15+25} =$$

$$= 8\sqrt{40} = 16\sqrt{10} \Rightarrow R = \frac{ED}{2 \sin \angle ECD} = \frac{16\sqrt{10}}{2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}} = 32 \text{ см. Ответ: } 32 \text{ см.}$$

10.3.D07



а) Дано: $ABCD$ – описанный четырехугольник.
 $\cup AB : \cup BC : \cup CD : \cup DA = 1 : 5 : 2 : 10$, $AC = 5$ см,
 $BD = 8$ см. Найти $S(ABCD)$.

Решение:

Пусть $\cup AB = x \Rightarrow x + 5x + 2x + 10x = 360^\circ \Rightarrow x = 20^\circ$

$$\Rightarrow \angle AOB = \frac{1}{2}(\cup CD + \cup AB) = 30^\circ$$

$$\Rightarrow S(ABCD) = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \angle AOB = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 10 \text{ см}^2.$$

Ответ: 10 см^2 .

б) Дано: $ABCD$ – описанный четырехугольник. (см. рис. пункта а)).
 $\cup AB : \cup BC : \cup CD : \cup DA = 1 : 12 : 5 : 18$, $AC = 7$ см, $BD = 4$ см. Найти $S(ABCD)$.

Решение:

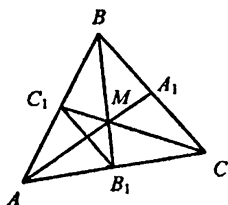
Пусть $\cup AB = x_1 \Rightarrow x + 12x + 5x + 18x = 360^\circ \Rightarrow x = 10^\circ$

$$\Rightarrow \angle AOB = \frac{1}{2}(\cup AB + \cup CD) = 30^\circ$$

$$\Rightarrow S(ABCD) = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \angle AOB = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 7 \text{ см}^2.$$

Ответ: 7 см^2 .

10.3.D08



а) Дано: AA_1 , BB_1 , CC_1 – медианы $\triangle ABC$.

$BC = 4\sqrt{3}$ см, $\angle BAC = 47^\circ$, $\angle BMC = 133^\circ$

Найти AA_1 .

Решение:

Четырехугольник AC_1MB_1 – вписанный
 $\angle AC_1M + \angle AB_1M = 180^\circ = \angle AB_1M + \angle MB_1C \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle AC_1M = \angle MB_1C \Rightarrow \triangle AC_1M \sim \triangle MB_1C$

$$\Rightarrow \frac{C_1C}{AC} = \frac{\frac{1}{2}AC}{\frac{2}{3}C_1C} \Rightarrow AC^2 = \frac{4}{3}C_1C_2 \Rightarrow AC = \frac{2}{\sqrt{3}}CC_1$$

$$\angle MAC = \angle B_1C_1M \Rightarrow \triangle CAM \sim \triangle CC_1B_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{2}{3}AA_1}{\frac{1}{2}BC} = \frac{\frac{2}{3}CC_1}{\frac{1}{2}AC} \Rightarrow \frac{AA_1}{BC} = \frac{CC_1}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AA_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}BC = 6 \text{ см}.$$

Ответ: 6 см.

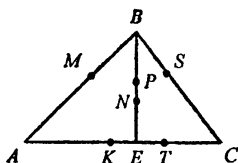
б) Дано: AA_1, BB_1, CC_1 – медианы $AA_1 = 3\sqrt{3}$. $\angle BAC = 54^\circ$, $\angle BMC = 126^\circ$.
Найти BC (см. рис. пункта а).

Решение:

С помощью таких же рассуждений, получим, что $BC = \frac{2}{\sqrt{3}} AC = 6$ см.

Ответ: 6 см.

10.3.D09



а) Дано: $\triangle ABC$; BE – медиана, $AB - BC = 4$ см.
 M, N, K – точки касания сторон $\triangle ABE$ вписанной окружностью. P, S, T – точки касания сторон $\triangle BEC$ вписанной окружностью. Найти PN .

Решение:

$AK = AM, MB = BN, BP = BS, SC = ST, EK = EN, ET = EP$;
 $AE = EC \Rightarrow AK + KE = ET + TC \Rightarrow AK - TC = ET - KE = EP - EN = PN \Rightarrow$
 $\Rightarrow AM - SC = PN, BN - BP = PN = BM - BS \Rightarrow AB - BC = (AM + MB) - (BS + SC) =$
 $= (AM - SC) + (MB - BS) = 2PN \Rightarrow PN = \frac{1}{2} (AB - BC) = 2$ см.

Ответ: 2 см.

б) Дано: $\triangle ABC$ (см. рис. пункта а)); BE – медиана, $BC - AB = 6$ см.

M, N, K – точки касания сторон $\triangle ABE$ вписанной окружностью.

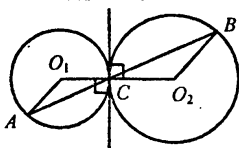
P, S, T – точки касания сторон $\triangle BEC$ вписанной окружностью. Найти PN .

Решение:

С помощью таких же рассуждений получим, что $PN = \frac{1}{2} (BC - AB) = 3$ см.

Ответ: 3 см.

10.3.D10



а) Дано: Две окружности с центрами в O_1 и O_2 – касаются в точке C . AB – проходит через C , $AC = 6$ см, $BC = 7$ см, радиус первой окружности 12 см.
Найти радиус второй окружности.

Решение:

Т.к. окружности касаются, то C – лежит на прямой $O_1O_2 \Rightarrow$

$$\triangle AO_1C \sim \triangle BO_2C \Rightarrow \frac{O_1C}{O_2C} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow O_2C = \frac{O_1C \cdot BC}{AC} = 14 \text{ см.}$$

Ответ: 14 см.

б) Дано: (см. рис. пункта а)). Две окружности с центрами в O_1 и O_2 – касаются в точке C . AB проходит через C , $AC = 4$ см, радиус первой – 8 см, радиус второй – 10 см. Найти BC .

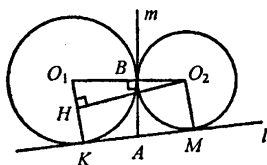
Решение:

Рассуждая аналогично, получим

$$\frac{BC}{AC} = \frac{CO_2}{CO_1} \Rightarrow BC = \frac{AC \cdot CO_2}{CO_1} = \frac{4 \cdot 10}{8} = 5$$

Ответ: 5 см.

10.3.D11



а) Дано: Окружность с центром O_1 , касается окружности с центром в O_2 в точке B , радиус первой 4 см. m – общая касательная через точку B , l – другая общая касательная. $m \cap l = A$, $AB = 6$ см. Найти радиус второй окружности.

Решение:

$$AK = AB = AM \Rightarrow KM = 2AK = 12 \text{ cm.}$$

Пусть r – радиус второй окружности. Проведем $O_2H \parallel l \Rightarrow O_2H = KM = 12$ см, $O_1H = O_1K - O_2M = |4 - r|$ (H – может лежать и выше O_1), $O_1O_2 = r + 4 \Rightarrow O_1O_2^2 = O_1H^2 + O_2H^2 \Rightarrow (r + 4)^2 = 144 + (r - 4)^2 \Rightarrow 8(2r) = 144 \Rightarrow r = 9$.

Ответ: 9 см.

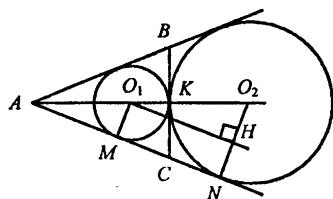
б) Дано: (см. рис. пункта а). $O_1K = 18$ см, $O_2M = 8$ см. Найти AB .

Решение:

Действуя также, получим, что $AB = \frac{1}{4}\sqrt{O_1O_2^2 - O_1H^2} = \frac{1}{4}\sqrt{26^2 - 10^2} = 6$.

Ответ: 6 см.

10.3.D12



а) Дано: Две окружности касаются внешним образом в точке K , радиусы окружностей 5 см и 15 см. Окружности вписаны в угол A , общая касательная пересекает угол A в точках B и C . Найти радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$.

Решение:

Из предыдущей задачи следует, что $KC = \frac{1}{4} \sqrt{O_1 O_2^2 - O_2 H^2} =$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{20^2 - 10^2} = \frac{5}{2} \sqrt{3} \Rightarrow BC = 2KC = 5\sqrt{3} \text{ (т.к. } \triangle ABC \text{ равнобедренный).}$$

$$\sin \angle O_2 O_1 H = \frac{O_2 H}{O_2 O_1} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle O_2 O_1 H = \angle O_2 A_1 N = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BAC = 60^\circ \Rightarrow R = \frac{BC}{2 \sin \angle BAC} = \frac{5\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 5 \text{ cm.} \quad \text{Ответ: 5 cm.}$$

б) Дано: Две окружности с центрами в O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке K (см. рис. пункта а)). Радиусы окружностей 4 см и 12 см. Общая касательная пересекает угол A в B и C . Найти радиус описанной около $\triangle ABC$ окружности.

Решение:

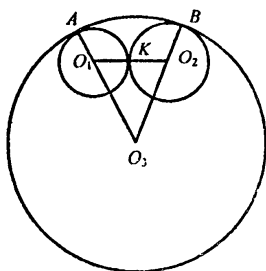
$$\text{Аналогично а)}, KC = \frac{1}{4} \sqrt{O_1O_2^2 - O_2H^2} = \frac{1}{4} \sqrt{16^2 - 8^2} = 2\sqrt{3},$$

$$BC = 2KC = 4\sqrt{3}, \sin \angle O_2O_1H = \frac{O_2H}{O_2O_1} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle O_2O_1H = \angle O_2AN = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BAC = 60^\circ \Rightarrow R = \frac{BC}{2 \sin \angle BAC} = \frac{4\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 4 \text{ см.}$$

Ответ: 4 см.

10.3.D13



а) Дано: Две окружности, касающиеся внешним образом, касаются третьей внутренним образом радиуса 14. Найти периметр $O_1O_2O_3$ (O_1, O_2, O_3 – центры окружностей).

Решение:

$$\text{Т.к. } O_1K = O_1A, O_2K = O_2B \Rightarrow$$

$$P = O_3O_1 + O_1K + KO_2 + O_2O_3 = O_3O_1 + O_1A + O_3O_2 + O_2B = O_3A + O_3B = 14 + 14 = 28 \text{ см}$$

Ответ: 28 см.

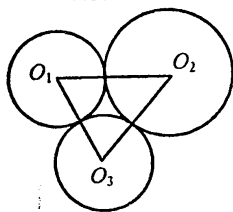
б) Дано: Две окружности (O_1, O_2), касающиеся внешним образом, касаются третьей O_3 внутренним образом, радиус третьей 11. Найти периметр $O_1O_2O_3$.

Решение:

$$\text{Аналогично, } P(\triangle O_1O_2O_3) = 2 \cdot 11 = 22 \text{ см.}$$

Ответ: 22 см.

10.3.D14



а) Дано: Три окружности (O_1, O_2, O_3) радиусами 2 см, 3 см и 10 см попарно касаются внешним образом. Найти радиус окружности, вписанной в $\triangle O_1O_2O_3$.

Решение:

$$\text{Стороны } \triangle O_1O_2O_3: (2+3) = 5 \text{ см;}$$

$$(2+10) = 12 \text{ см; } (3+10) = 13 \text{ см}$$

Это прямоугольный треугольник.

$$r = \frac{2S}{P} = \frac{5 \cdot 12}{5 + 12 + 13} = 2 \text{ см.} \quad \text{Ответ: 2 см.}$$

б) Дано: Три окружности (O_1, O_2, O_3) радиусами 4 см, 8 см и 12 см попарно касаются внешним образом. Найти радиус окружности, вписанной в $\Delta O_1 O_2 O_3$.

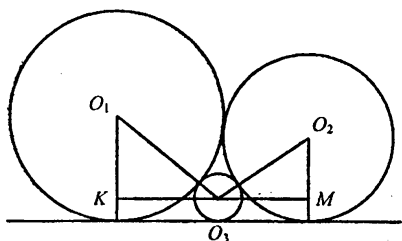
Решение:

Стороны $\Delta O_1 O_2 O_3$: 12 см, 16 см, 20 см – это прямоугольный треугольник.

$$\Rightarrow r = \frac{2S}{P} = \frac{12 \cdot 16}{12 + 16 + 20} = 4 \text{ см.}$$

Ответ: 4 см.

10.3.D15



а) Дано: Две окружности радиусами 36 см и 49 см касаются внешним образом друг друга и некоторой прямой. Найти радиус окружности, касающейся 2-х данных и некоторой прямой.

Решение:

Пусть r – радиус этой окружности, сделаем построение, указанное на

рисунке. По одной из предыдущих задач

$$KM = \sqrt{(49 + 36)^2 - (49 - 36)^2} = \sqrt{2(36)(2 \cdot 49)} = 2 \cdot 6 \cdot 7 = 84 \text{ см}$$

Далее $O_1 K = 49 - r$, $O_2 M = 36 - r$, $O_1 O_3 = 49 + r$, $O_2 O_3 = 36 + r$

$$\Rightarrow \sqrt{O_1 O_3^2 - O_1 K^2} + \sqrt{O_2 O_3^2 - O_2 M^2} = 84$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{49r} + 2\sqrt{36r} = 84 \Rightarrow 13\sqrt{r} = 42 \Rightarrow r = \left(\frac{42}{13}\right)^2 \text{ см.}$$

Ответ: $\left(\frac{42}{13}\right)^2$ см.

б) Дано: Две окружности радиусами 25 см и 64 см касаются внешним образом друг друга и некоторой прямой. Найти радиус большей окружности, касающейся 2-х данных и прямой.

Решение:

Пусть это окружность с центром O_2 и радиусом R . Тогда

$$KM = \sqrt{(64 + R)^2 - (64 - R)^2} = 16\sqrt{R}$$

$$KO_1 = \sqrt{(64 + 25)^2 - (64 - 25)^2} = 80$$

$$O_1 M = \sqrt{(64 + 25)^2 - (R - 25)^2} = 10\sqrt{R}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow KM = KO_1 + O_1 M \\ &80 = 26\sqrt{R}, R = \left(\frac{40}{13}\right)^2 \end{aligned}$$

Ответ: $\left(\frac{40}{13}\right)^2$ см.

Приложение 2

Задачи по теории вероятностей и статистике

Уровень А

11.1A01

а) $6000 \cdot 0,0059 = 35,4 \approx 35$

Ответ: ≈ 35 рекламаций.

б) $7000 \cdot 0,0118 = 82,6 \approx 83$

Ответ: ≈ 83 рекламации.

11.1A02

а) Всего $15+11 = 26$ карандашей $\Rightarrow$ вероятность того, что достанет синий

ний $\frac{15}{26}$. Ответ: $\frac{15}{26}$.

б) Всего $19+15 = 34$ карандаша $\Rightarrow$ вероятность того, что достанут синий

$\frac{19}{34}$. Ответ: $\frac{19}{34}$.

11.1A03

а) Упорядочим выборку: 14,1; 14,1; 14; 1; 14; 4; 15,9; 26; 37; 29,3; 32,5; 35.

Среднее арифметическое 22,24; медиана $\frac{15,9+26}{2} = 20,95$; мода – 14,1.

б) Упорядочим выборку: 22,9; 25; 1; 31,3; 32; 34,6; 43,9; 44,5; 44,5; 44,5; 44,8.

Среднее арифметическое 36,81; медиана $\frac{43,96+34,6}{2} = 39,25$; мода – 44,5

11.1A04

а) $p = \frac{4957}{5000}$.

Ответ: $\frac{4957}{5000}$.

б) $p = \frac{4959}{5000}$.

Ответ: $\frac{4959}{5000}$.

11.1A05

а) Всего продано $197+321+207+352+112 = 1189$ билетов $\Rightarrow p = \frac{321}{1189}$.

Ответ: $\frac{321}{1189} \approx 0,27$.

б) Всего продано $276+221+217+367+107 = 1188$ билетов $\Rightarrow p = \frac{217}{1188}$.

Ответ: $\frac{217}{1188} \approx 0,18$.

11.1A06

а) $\frac{29}{2500} \cdot 100\% = 1,16\%$

Ответ: 1,16%.

б) $\frac{37}{1600} \cdot 100\% = 2,3125\%$

Ответ: 2,3125%.

11.1A07

а) Неисправных $1000 - 57 = 943 \Rightarrow$ частота изготовления неисправных $\frac{943}{1000} \cdot 100 = 94,3\%$. Ответ: 94,3%.

б) Неисправных $1000 - 47 = 953 \Rightarrow$ частота изготовления неисправных $\frac{953}{1000} \cdot 100 = 95,3\%$. Ответ: 95,3%.

11.1A08

а) Упорядочим: 129; 129; 130; 141; 142; 144; 145; 147; 150; 151
медиана 143; мода – 129, размах ряда – $151 - 129 = 22$.

б) Упорядочим: 147; 148; 15; 151; 154; 155; 159; 168; 169; 169
медиана 155; мода – 169, размах ряда – 22.

11.1A09

а) Вероятность появления кролика-альбиноса $p = \frac{1}{100} \Rightarrow$ за год родится примерно 14 альбиносов. Ответ: 14.

б) Вероятность появления кролика-альбиноса $p = \frac{1}{100} \Rightarrow$ за год родится примерно $400 \cdot \frac{1}{100} = 4$ альбиноса. Ответ: 4.

11.1A10

а) Упорядочим: 12,6; 12,7; 12,7; 12,7; 12,7; 12,8; 12,9; 13; 13,1; 13,2; 13,3.
мода – 12,7, медиана 12,8, размах 0,7.

б) Упорядочим: 14,6; 14,6; 14,7; 14,7; 14,7; 14,7; 14,8; 15; 15,1; 15,2; 15,3
мода – 14,7, медиана 14,7, размах 0,7.

Уровень В**11.1.B01**

а) Пусть там было x монет, потом стало $(x-15)$ двухрублевых и 30 рублевых, по условию $\frac{x-15}{(x-15)+30} = \frac{11}{26} \Rightarrow \frac{x-15}{x+15} = \frac{11}{26} \Rightarrow 26x - 26 \cdot 15 = 11x + 11 \cdot 15 \Rightarrow 15x = 15 \cdot (26 + 11) \Rightarrow x = 37$.

Ответ: 37.

б) Пусть в шкатулке было x монет. Потом стало $x-7$ двухрублевых и 14 рублевых по условию $\frac{x-7}{(x-7)+14} = \frac{31}{45} \Rightarrow \frac{x-7}{x+7} = \frac{31}{45} \Rightarrow x = 38$.

Ответ: 38.

11.1.B02

а) Всего $19+28+37 = 84$ человека, из них $19+37 = 56$ человек работают в банке $\Rightarrow p = \frac{56}{84} = \frac{2}{3}$. Ответ: $\frac{2}{3}$.

б) Всего $35+27+46 = 108$ человек, из них $46+35 = 81$ работает в банке $\Rightarrow p = \frac{81}{108} = \frac{3}{4}$. Ответ: $\frac{3}{4}$.

11.1.B03

а) Всего продано $356+206+180+320+123 = 1185$ билетов в европейские страны $206+180+320 = 706$ билетов.

$\Rightarrow p = \frac{706}{1185} \approx 0,60$. Ответ: $\approx 0,60$.

б) Всего продано $171+248+248+420+122 = 1209$ билетов в европейские страны $248+248+420 = 916$ билетов.

$\Rightarrow p = \frac{916}{1209} \approx 0,76$. Ответ: $\approx 0,76$.

11.1.B04

а) Площадь между маленьким и средним кругом равна $S = \pi(7^2 - 1) = 48\pi$. Площадь мишени $\pi 8^2 = 64\pi \Rightarrow p = \frac{48\pi}{64\pi} = \frac{3}{4}$.

Ответ: $\frac{3}{4}$.

б) Площадь между маленьким и средним кругом равна $\pi 5^2 - \pi 4^2 = 9\pi$.

Площадь мишени равна $49\pi \Rightarrow p = \frac{9\pi}{49\pi} = \frac{9}{49}$.

Ответ: $\frac{9}{49}$.

11.1.B05

а) Всего отходит $12+5+9+1 = 27$ электричек. До Пчелкино идут $5+9+1 = 15$ электричек $\Rightarrow p = \frac{15}{27} = \frac{5}{9}$.

Ответ: $\frac{5}{9}$.

б) Всего отходит $6+2+4+3 = 15$ электричек. До Ершово едет $2+4+3 = 9$ электричек $\Rightarrow p = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$.

Ответ: $\frac{3}{5}$.

11.1.B06

а) Площадь листа бумаги $12^2 = 144 \text{ см}^2$, площадь поверхности не содержащей точек между малым и большим кругом равна $(144 - 36\pi) = 144 - 35\pi$.

$$\Rightarrow p = \frac{144 - 35\pi}{144}. \text{ Ответ: } \frac{144 - 35\pi}{144}.$$

б) Площадь листа $10^2 = 100$, площадь поверхности не содержащей точек между малым и большим кругом равна $(100 - 9\pi) + \pi = 100 - 8\pi$.

$$\Rightarrow p = \frac{100 - 8\pi}{144}. \text{ Ответ: } \frac{25 - 2\pi}{25}.$$

11.1.B07

а) Пусть стороны прямоугольника a и b

$$\Rightarrow \text{площадь ромба равна } ab - 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}a \right) \cdot \left(\frac{1}{2}b \right) \right) = \frac{ab}{2}$$

$$\Rightarrow p = \frac{S_{\text{ромба}}}{S_{\text{пря.}}} = \frac{1}{2}, \text{ количество точек } 2700 \cdot \frac{1}{2} = 1350$$

Ответ: 1350.

б) Аналогично $\frac{S_{\text{ромба}}}{S_{\text{пря.}}} = \frac{1}{2} = p \Rightarrow$ количество точек в ромбе

$$5300 \cdot \frac{1}{2} = 2650 \text{ точек.}$$

Ответ: 2650 точек.

11.1.B08

а) $\frac{47}{0,0012} \approx 39200$

Ответ: ≈ 39200 .

б) $\frac{49}{0,0005} = 98000$

Ответ: 98000.

11.1.B09

а) Количество родившихся девочек: $5000 - 2489 = 3911$

$$\Rightarrow \text{частота рождения девочек: } \frac{2511}{5000} 100\% = 50,22\%. \text{ Ответ: } 50,22\%.$$

б) Количество родившихся девочек: $2000 - 1077 = 923$

$\Rightarrow$ частота их рождения $\frac{923}{2000} \cdot 100\% = 46,15\%$. *Ответ:* 46,15%.

11.1.B10

а) Вероятность того, что среди всех птиц мы найдем окольцованную, равна $\frac{2}{75} \Rightarrow$ всего птиц $\frac{125 \cdot 75}{2} \approx 4690$ птиц.

Ответ: ≈ 4690 птиц.

б) Вероятность того, что среди всех птиц популяции встретится окольцованная, равна $\frac{7}{125} \Rightarrow$ численность популяции $\frac{100 \cdot 125}{7} \approx 1790$ птиц.

Ответ: ≈ 1790 птиц.

Уровень С

11.1.C01

а) Фигура – прямоугольник со сторонами 14 и 8. Тогда круг будет лежать в этом прямоугольнике, если центр круга отстоит на расстоянии ≥ 1 от сторон прямоугольника и лежит внутри прямоугольника, т.е. лежит в прямоугольнике со сторонами 12 см и 6 см.

$\Rightarrow p = \frac{6 \cdot 12}{14 \cdot 8} = \frac{9}{14}$. *Ответ:* $\frac{9}{14}$.

б) Фигура – прямоугольник со сторонами 12 и 10. рассуждая аналогично получим, что центр круга лежит в прямоугольнике со сторонами 6 и 4.

$\Rightarrow p = \frac{6 \cdot 4}{12 \cdot 10} = \frac{1}{5}$. *Ответ:* $\frac{1}{5}$.

11.1.C02

а) Можно считать, что на координатной плоскости из квадрата с вершиной в $(0; 0)$, стороной 1 и сторонами параллельным осям, наугад выбирается точка. Тогда $y \leq 0,2x$ если точка лежит ниже прямой $y = 0,2x$,

площадь треугольника с вершинами в $(0; 0)$, $\left(1; \frac{1}{5}\right)$, $(1; 0)$ равна

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{1}{10} \Rightarrow p = \frac{S_{\text{треуг.}}}{S_{\text{кв.др}}} = \frac{1}{10}$. *Ответ:* $\frac{1}{10}$.

б) Рассуждая аналогично, получим, что точки должны лежать ниже прямой $y = 0,6x$, т.е. в треугольнике с вершинами $(0; 0)$; $(1; 0)$; $\left(1; \frac{3}{5}\right)$ – его площадь.

$S_{\text{треуг.}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot 1 = \frac{3}{10} \Rightarrow p = \frac{S_{\text{треуг.}}}{S_{\text{кв.др}}} = \frac{3}{10}$. *Ответ:* $\frac{3}{10}$.

11.1.C03

а) Сумма будет равна 4, если выпадет одна из следующих комбинаций: (1; 3), (2; 2), (3; 1) вероятность выпадения каждой комбинации равна

$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$, тогда вероятность того, что выпадет в сумме и равна

$$3 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{12}. \text{ Ответ: } \frac{1}{12}.$$

б) Сумма будет равна 5, если выпадет одна из следующих комбинаций:

(1; 4), (2; 3), (3; 2), (4; 1) вероятность выпадения каждой $\frac{1}{36} \Rightarrow$ искомая

вероятность равна $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$. Ответ: $\frac{1}{9}$.

11.1.C04

а) Второй может стать на $8 \cdot 9 - 1 = 71$ перекресток. Из них $7 + 8 = 15$ — находятся на одной улице с 1-м.

$$\Rightarrow p = \frac{15}{71}. \text{ Ответ: } \frac{15}{71}.$$

б) Второй может стать на один из $5 \cdot 10 - 1 = 49$ перекрестков. Из них $4 + 9 = 13$ находятся на одной улице с 1-м.

$$\Rightarrow p = \frac{13}{49}. \text{ Ответ: } \frac{13}{49}.$$

11.1.C05

а) Вероятность того, что выпадет 6 равна

$$p_6 = 1 - 3 \cdot \frac{1}{14} - 2 \cdot \frac{2}{7} = 1 - \frac{3}{14} - \frac{8}{14} = \frac{3}{14}. \text{ Т.к. } 12 = 6 + 6, \text{ то за два бросания}$$

выпадет 12 с вероятностью $\frac{3}{14} \cdot \frac{3}{14} = \frac{9}{196}$. Ответ: $\frac{9}{196}$.

б) Вероятность того, что выпадет 6 равна

$$p_6 = 1 - 3 \cdot \frac{1}{18} - 2 \cdot \frac{2}{9} = 1 - \frac{3}{18} - \frac{8}{18} = \frac{7}{18}. \text{ Т.к. } 12 = 6 + 6, \text{ то за два бросания}$$

выпадет 12 с вероятностью $\frac{7}{18} \cdot \frac{7}{18} = \frac{49}{324}$. Ответ: $\frac{49}{324}$.

11.1.C06

а) Пусть x — монет было в шкатулке, потом стало $(x-5)$ — двухрублевых и 10 рублевых, тогда по условию

$$\frac{x-5}{x+5} = 3 \cdot \frac{10}{x+5} \Rightarrow x-5 = 30 \Rightarrow x = 35. \text{ Ответ: } 35 \text{ монет.}$$

б) Пусть x – монет было в шкатулке, потом стало $(x-17)$ – двухрублевых и 34 рублевых, всего $x+17$ монет. Тогда по условию

$$\frac{x-17}{x+17} = 2 \cdot \frac{34}{x+17} \Rightarrow x = 2 \cdot 34 + 17 = 85 \text{ монет.}$$

Ответ: 85 монет.

11.1.C07

Задачу можно интерпретировать, как случайный выбор точки $(x; y)$ на координатной плоскости из квадрата с вершинами $(0; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 1)$, $(1; 0)$. Тогда точки где

а) $y \leq 4x$, не лежат выше прямой $y = 4x$, т.е. в треугольнике с вершинами $(0; 0)$, $\left(\frac{1}{4}; 1\right)$, $(0; 1)$ площадью $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{8}$, т.е. площадь фигуры, где $y \leq 4x$ равна $\frac{7}{8}$, а площадь всего квадрата 1 $\Rightarrow p = \frac{7}{8}$. Ответ: $\frac{7}{8}$.

б) $y \leq 5,6x$, не лежат выше прямой $y = 5,6x$, т.е. в треугольнике с вершинами $(0; 0)$, $(0; 1)$, $\left(\frac{1}{5,6}; 1\right)$, площадью $\frac{1}{2} \cdot \frac{10}{56} = \frac{5}{56}$, т.е. площадь фигуры, где $y \leq 5,6x$ равна $1 - \frac{5}{56} = \frac{51}{56}$, а площадь всего квадрата 1.

$$\Rightarrow p = \frac{51}{56}. \text{ Ответ: } \frac{51}{56}.$$

11.1.C08

а) Вначале вероятность вытащить "М" равна $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$; потом вероятность вытащить "а" равна $\frac{4}{11}$, потом вероятность вытащить "М" равна $\frac{7}{10}$, и, наконец, вероятность вытащить "а" равна $\frac{3}{9} = \frac{1}{3} \Rightarrow p = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{28}{495}$. Ответ: $\frac{28}{495}$.

б) Вначале вероятность вытащить "н" равна $\frac{10}{16} = \frac{5}{8}$; вероятность вытащить "А" на втором шаге равна $\frac{6}{15}$, вероятность вытащить "н" на третьем шаге $\frac{9}{14}$ и вероятность вытащить "а" на четвертом шаге

$$\frac{5}{13} \Rightarrow p = \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{5}{13} = \frac{45}{728}. \text{ Ответ: } \frac{45}{728}.$$

11.1.C09

а) Ряд оценок 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5.

Среднее арифметическое – $3,4 \approx 3$, мода – 2, медиана – 4.

Ответ: выгодный – медиана, невыгодный – мода.

б) Ряд оценок 2, 2, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5

Среднее арифметическое – $3,6 \approx 4$, мода – 5, медиана – 3.

Ответ: выгодный – мода, невыгодный – медиана.

11.1.C10

а) На 1 га $25+35+20+26 = 106$ хвойных деревьев $\Rightarrow$ на 200 га 21200 хвойных деревьев.

На 1 га $16+18+27+30 = 91$ лиственное дерево $\Rightarrow$ на 200 га 18200 лиственных деревьев. Всего 39400 деревьев.

Ответ: 39400 деревьев, 18200 лиственных.

б) На 1 га $24+23+17+28 = 92$ хвойных дерева. $14+10+35+27 = 86$ лиственных деревьев. На 200 га 18400 хвойных и 17200 лиственных деревьев, всего 35600 деревьев.

Ответ: 35600 деревьев, 17200 лиственных.

Уровень D

11.1.D01

а) Треугольник можно будет составить, если после 3-х выборов останется либо отрезок длины 3 см, либо отрезок длины 16 см, это возможно с вероятностью $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Ответ: $\frac{1}{2}$.

б) Треугольник можно будет составить, если после 3-х выборов останется либо 27 см, либо отрезок 7 см, это возможно с вероятностью $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Ответ: $\frac{1}{2}$.

11.1.D02

а) Вероятность того, что автобус не подойдет в первые полчаса равна $\frac{4}{5}$, тогда вероятность того, что он пойдет в последующие 30 мин. равна $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$. Тогда вероятность того, что автобус не подойдет в течение часа равна $\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{25} = \frac{9}{25}$. Ответ: $\frac{9}{25}$.

б) Вероятность того, что автобус не подойдет в первые 20 мин. равна $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$, тогда вероятность того, что он пойдет в следующие 20 мин.

равна $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25} \Rightarrow$ вероятность того, что он пойдет в течение 40 мин

равна $\frac{2}{5} + \frac{6}{25} = \frac{16}{25}$, вероятность того, что он не пойдет в течение 40 мин

равна $1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$, вероятность того, что он пойдет в следующие 20

мин. равна $\frac{3}{5} \cdot \frac{9}{25} = \frac{27}{125} \Rightarrow$ вероятность того, что автобус пойдет в течение

часа равна $\frac{2}{5} + \frac{6}{25} + \frac{27}{125} = \frac{107}{125}$. Ответ: $\frac{107}{125}$.

11.1.D03

а) Вероятность достать 2 разных леденца из правого кармана равна $\frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} + \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{7}{15}$, вероятность достать 2 разных леденца из левого

кармана равна $\frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} + \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{16}{45} \Rightarrow$ вероятность того, что Мальвина

достала леденцы из правого кармана равна

$$p = \frac{\frac{7}{15}}{\frac{7}{15} + \frac{16}{45}} = \frac{21}{21+16} = \frac{21}{37}. \text{ Ответ: } \frac{21}{37}.$$

б) Вероятность достать 2 разных леденца из правого кармана равна $13 \cdot \frac{5}{12} + \frac{5}{13} \cdot \frac{8}{12} = \frac{20}{39}$, а из левого $\frac{9}{15} \cdot \frac{6}{14} + \frac{6}{15} \cdot \frac{9}{14} = \frac{18}{35} \Rightarrow$ вероятность того, что Мальвина достала леденцы из правого кармана равна

$$\frac{\frac{20}{39}}{\frac{20}{39} + \frac{18}{35}} = \frac{20 \cdot 35}{20 \cdot 35 + 18 \cdot 39} = \frac{700}{1402} = \frac{350}{701}. \text{ Ответ: } \frac{350}{701}.$$

11.1.D04

а) Вторая клякса не соприкоснется с первой, если ее центр лежит вне круга радиуса 1 в центре, а сам центр кляксы лежит в прямоугольнике размерами $(18-1)$ на $(27-1)$ см.

Отсюда $p = \frac{26 \cdot 17 - \pi}{26 \cdot 17} = \frac{442 - \pi}{442}$. Ответ: $\frac{442 - \pi}{442}$.

б) Вторая клякса не соприкоснется с первой, если ее центр лежит вне круга радиуса $2 \cdot 0,4 = 0,8$ с центром в центре прямоугольника, сам центр

кляксы лежит в прямоугольнике с размерами $18-0,8 = 17,2$ см на $27-0,8 = 26,2$ см.

$$\Rightarrow p = \frac{17,2 \cdot 26,2 - 0,8^2 \pi}{17,2 \cdot 26,2} = \frac{450,64 - 0,64\pi}{450,64} = \frac{563,3 - 0,8\pi}{563,3}.$$

Ответ: $\frac{563,3 - 0,8\pi}{563,3}.$

11.1.D05

а) Вероятность выбросить грань с 5 равна $1 - \frac{3}{4} - \frac{2}{20} = \frac{3}{20}.$

За 2 бросания выпадет 11, если выпадет одна из следующих комбинаций (5; 6) или (6; 5), вероятность этого равна

$$\frac{1}{20} \cdot \frac{3}{20} + \frac{3}{20} \cdot \frac{1}{20} = \frac{3}{200}. \quad \text{Ответ: } \frac{3}{200}.$$

б) Вероятность выбросить грань с 5 равна $1 - \frac{3}{8} - \frac{2}{4} = \frac{1}{8}.$

За 2 бросания выпадет 11, если выпадет одна из следующих комбинаций (5; 6) или (6; 5), вероятность этого равна

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}. \quad \text{Ответ: } \frac{1}{16}.$$

11.1.D06

а) Выпускник мог встретить $37+48+29-1 = 113$ однокурсника, из них $37+29-1 = 65$ изучали инженерное дело $\Rightarrow p = \frac{65}{113}.$ Ответ: $\frac{65}{113}.$

б) Выпускник мог встретить одного из $47+46+17-1 = 109$ своих однокурсников, из которых $47+16 = 63$ изучали инженерное дело $\Rightarrow p = \frac{63}{109}.$ Ответ: $\frac{63}{109}.$

11.1.D07

а) В клубе 9 блондинов, 10 брюнетов, вероятность того, что блондин встретит блондина, а потом брюнета равна $\frac{8}{18} \cdot \frac{10}{17} = \frac{40}{153}.$ Ответ: $\frac{40}{153}.$

б) В клубе 17 блондинов, 6 брюнетов.

Вероятность того, что блондин встретит вначале блондина, а потом брюнета равна

$$\frac{16}{22} \cdot \frac{6}{21} = \frac{48}{231}. \quad \text{Ответ: } \frac{48}{231} = \frac{16}{77}.$$

11.1.D08

а) Площадь копии примерно равна $\frac{640}{960} \cdot 1 \text{ м}^2 = \frac{2}{3} \text{ м}^2$

$\Rightarrow$ площадь фигуры $10 \cdot \frac{2}{3} \approx 6,67 \text{ м}^2$. Ответ: $\approx 6,67 \text{ м}^2$.

б) Площадь копии $\frac{570}{1210} \cdot 1 \text{ м}^2$

$\Rightarrow$ площадь фигуры $\frac{570}{1210} \cdot 20 \approx 9,42$. Ответ: $\approx 9,42$.

11.1.D09

а) Упорядочим выборку: -3; -2; 2; 2,5; 4, чтобы медиана была равна

$1: \frac{1}{2}(x+2)=1 \Rightarrow x=0$. Ответ: 0.

б) Упорядочим выборку: -6; -4; -1; 1; 1,5, медиана равна -2; если

$\frac{1}{2}(x-1)=-2 \Rightarrow x=-3$, x - стертое число. Ответ: -3.

11.1.D10

а) Пусть x - неизвестная оценка, по условию

$\frac{5 \cdot 10 + (2+3+4)3+x}{20}$ - целое $\Rightarrow \frac{77+x}{20}$ - целое $\Rightarrow x=3$.

Ответ: 3.

б) Пусть x - неизвестная оценка, по условию

$\frac{16 \cdot 5 + (2+3+4) \cdot 5+x}{32} = K \Rightarrow \frac{125x}{32} = K \Rightarrow x=3$.

Ответ: 3.

Приложение 3. Примерные варианты экзаменационных работ

Экзаменационные работы по алгебре для общеобразовательных классов

Экзаменационная работа 1

Вариант 1

$$1. \sqrt{65^2 - 56^2} = \sqrt{(65 - 56)(65 + 56)} = \sqrt{9 \cdot 121} = 3 \cdot 1 = 33.$$

$$2. \frac{15x^4 y^6 z^9}{5x^3 y^2 z^4} = 3xy^4 z^5.$$

$$3. \frac{3x^2 + 5x + 2}{3} = \frac{5x^2 + 2x + 3}{5}; 15x^2 + 25x + 10 = 15x^2 + 6x + 9, 19x = -1, x = -\frac{1}{19}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{1}{19}$$

$$4. 3(2x-3) - 2(3x-2) \leq 1-4x; 6x-9-6x+4 \leq 1-4x; 4x \leq 6; x \leq \frac{3}{2}. \text{ Ответ: } \left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$$

$$5. \begin{cases} \frac{1}{x-7} = \frac{1}{y-5} \\ 5x+7y=58 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-5-x+7=0 \\ 5x+7y=58 \\ x \neq 7 \\ y \neq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-2 \\ 5x+7(x-2)=58 \\ x \neq 7 \\ y \neq 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x-2 \\ 12x=72 \\ x \neq 7 \\ y \neq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases}. \text{ Ответ: } (6; 4).$$

$$6. \begin{cases} (x+6)^2 < (x+4)^2 \\ 6x+13 > 5x-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+6-x-4)(x+6+x+4) < 0 \\ x > -20 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(2x+10) < 0 \\ x > -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+5 < 0 \\ x > -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -5 \\ x > -20 \end{cases}. x \in (-20; -5) \text{ Ответ: } (-20; -5).$$

$$7. 1) y = -5. \quad 2) y = -2 \text{ при } x = 1, x = 5. \quad 3) y_{\text{наим.}} = -6$$

$$4) y \text{ возрастает на } [3; +\infty), \text{ убывает на } (-\infty; 3].$$

$$8. \text{ Цена товара в марте } 30000 + 30000 \cdot 0,04 = 31200, \text{ в июле цену снизили на } 31200 \cdot 0,04 = 1248. \text{ Цена товара стала равна } 31200 - 1248 = 29952.$$

$$\text{Ответ: } 29952.$$

$$9. \min(\sqrt{x^2+9} + \sqrt{y^2+81}) = \sqrt{9} + \sqrt{81} = 3 + 9 = 12.$$

$$10. \frac{1}{x-7} > \frac{1}{x+8}; \frac{x+8-x+7}{(x-7)(x+8)} > 0; \frac{15}{(x-7)(x+8)} > 0$$

$$x \in (-\infty; -8) \cup (7; +\infty). \text{ Ответ: } (-\infty; -8) \cup (7; +\infty).$$

Вариант 2

$$1. \sqrt{58^2 - 42^2} = \sqrt{(58-42)(58+42)} = \sqrt{16 \cdot 100} = 4 \cdot 10 = 40.$$

$$2. \frac{54x^7y^3z^5}{6x^2yz^4} = 9x^5y^2z.$$

$$3. \frac{4x^2+7x+3}{4} = \frac{7x^2+3x+4}{7}$$

$$28x^2+49x+21 = 28x^2+12x+16; 37x = -5; x = -\frac{5}{37}. \text{ Ответ: } -\frac{5}{37}$$

$$4. 4(3x-4)-3(4x-3) \leq 1-5x; 12x-16-12x+9 \leq 1-5x; 5x \leq 8, x \leq \frac{8}{5}$$

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; \frac{8}{5}\right].$$

$$5. \begin{cases} \frac{1}{x-9} = \frac{1}{y-3} \\ 4x+9y=50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-9=y-3 \\ 4x+9y=50 \\ x \neq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+6 \\ 4y+24+9y=50 \\ x \neq 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y+6 \\ 13y=26 \\ x \neq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=8 \end{cases}. \text{ Ответ: } (8; 2).$$

$$6. \begin{cases} (x+5)^2 < (x+3)^2 \\ 5x+12 > 4x-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+5-x-3)(x+5+x+3) < 0 \\ x > -21 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(2x+8) < 0 \\ x > -21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 < 0 \\ x > -21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -4 \\ x > -21 \end{cases}. x \in (-21; -4)$$

$$\text{Ответ: } (-21; -4).$$

$$7. 1) y = 5; \quad 2) y = 2 \text{ при } x = -7, x = -3 \quad 3) y_{\text{наиб.}} = 6$$

$$4) y \text{ возрастает на } (-\infty; -5], \text{ убывает на } [-5; +\infty).$$

$$8. \text{ Цена товара в мае } -20000+20000 \cdot 0,06 = 21200, \text{ цена товара в авт} \\ -21200-21200 \cdot 0,06 = 19928.$$

$$\text{Ответ: } 19928.$$

$$9. \min(\sqrt{x^2+16} + \sqrt{y^2+25}) = \sqrt{16} + \sqrt{25} = 4 + 5 = 9.$$

$$10. \frac{1}{x-8} < \frac{1}{x+7}; \frac{x+7-x+8}{(x-8)(x+7)} < 0; \frac{15}{(x-8)(x+7)} < 0$$

$$x \in (-7; 8). \text{ Ответ: } (-7; 8).$$

Экзаменационная работа 2

Вариант 1

$$1. x^{56}y^{54} - x^{55}y^{55} = x^{55}y^{54}(x-y)$$

$$2. \frac{x-4}{x+4} = 5; x-4 = 5x+20; 4x = -24; x = -6. \text{ Ответ: } -6.$$

$$3. \sqrt{308} - \sqrt{92} < \sqrt{972} - \sqrt{46}, \text{ т.к. } \sqrt{308} < \sqrt{972}, \sqrt{92} > \sqrt{46}.$$

$$4. \begin{cases} 5x+y=-2 \\ 7x-y=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x=-12 \\ 5x+y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}. \text{ Ответ: } (-1; 3).$$

$$5. 1) y = 6 \text{ при } x = -5; x = 3. \quad 2) y_{\text{наим.}} = -2.$$

$$6. \frac{5}{3x-2} < \frac{4}{2-3x}; \frac{9}{3x-2} < 0; x < \frac{2}{3}. \text{ Ответ: } \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right).$$

$$7. \begin{cases} x^2+9x+8 \leq 0 \\ -0,3x \geq 2,4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x+8) \leq 0 \\ x \leq -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-8; -1] \\ x \leq -8 \end{cases} \Rightarrow x = -8.$$

Ответ: -8.

$$8. \frac{b_3+b_8}{b_2+b_7} = 13; \frac{b_1q^2+b_1q^7}{b_1q+b_1q^6} = 13; \frac{q+q^6}{1+q^5} = 13; \frac{q(1+q^5)}{1+q^5} = 13 \Rightarrow q = 13$$

Ответ: 13.

$$9. y = \frac{x^3-2x^2}{x-2} = \frac{x^2(x-2)}{x-2} = \begin{cases} x^2, x \neq 2 \\ \text{не определено, } x = 2 \end{cases}$$

Прямая $y = c$ пересекает график в единственной точке при $c = 0$; $c = 4$.

$$10. \begin{cases} (x-2y)2 = 11(x-2y) \\ 2x+y=50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=0 \\ 2x+y=50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x=100 \\ x-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=20 \\ y=10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=11 \\ 2x+y=50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x=111 \\ x-2y=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{111}{5} \\ y=\frac{28}{5} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (20; 10); \left(\frac{111}{5}; \frac{28}{5}\right).$$

Вариант 2

- $x^{34}y^{32} - x^{33}y^{33} = x^{33}y^{32}(x-y)$
- $\frac{x+3}{x-3} = 4$; $x+3 = 4x-12$; $3x = 15$; $x = 5$. Ответ: 5.
- $\sqrt{668} - \sqrt{97} < \sqrt{878} - \sqrt{44}$, т.к. $\sqrt{668} < \sqrt{878}$, $\sqrt{97} > \sqrt{44}$.
- $\begin{cases} 3x+y=13 \\ 4x-y=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x=28 \\ 3x+y=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$. Ответ: (4; 1).
- 1) $y = 6$ при $x = -3$, $x = 5$ 2) $y_{\text{наим}} = -2$.
- $\frac{2}{4x-3} > \frac{3}{3-4x}$; $\frac{5}{4x-3} > 0 \Rightarrow x > \frac{3}{4}$. Ответ: $\left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$.
- $\begin{cases} x^2+7x+6 \leq 0 \\ -0,7x \geq 4,2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x+6) \leq 0 \\ x \leq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-6; -1] \\ x \leq -6 \end{cases} \Rightarrow x = -6$ Ответ: -6.
- $\frac{b_6+b_4}{b_3+b_{10}} = 7$; $\frac{qb_3+qb_{10}}{b_3+b_{10}} = 7 \Rightarrow q = 7$. Ответ: 7.
- $y = -\frac{2x^2+x^3}{x+2} = -x^2 \frac{(x+2)}{x+2} = \begin{cases} -x^2, x \neq -2 \\ \text{не определено, } x = -2 \end{cases}$

Прямая $y = c$ пересекает график в единственной точке при $c = 0$, $c = -4$.

$$10. \begin{cases} (x-y)^2 = 9(3x-y) \\ x+3y=40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-y=0 \\ x+3y=40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x=40 \\ x+3y=40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x-y=9 \\ x+3y=40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x=67 \\ x+3y=40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{67}{10} \\ y=\frac{111}{10} \end{cases}$$

Ответ: (4; 12), $\left(\frac{67}{10}; \frac{111}{10}\right)$.

Экзаменационная работа 3

Вариант 1

- $5x-7 \geq 7x-5$, $2x \leq -2$, $x \leq -1$. Ответ: $(-\infty; -1]$.
- $56,78 \cdot 10^6 = 5,678 \cdot 10^7 < 5,687 \cdot 10^7$.
- $\frac{x-49}{\sqrt{x}-7} = \frac{(\sqrt{x}-7)(\sqrt{x}+7)}{\sqrt{x}-7} = \sqrt{x}+7$.
- $\frac{y^2-49}{4y+20} = 0$; $\frac{(y-5)(y+5)}{4(y+5)} = 0$; $y-5 = 0$; $y = 5$. Ответ: 5.

$$5. \begin{cases} 4x - 3y = -4 \\ 4x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 7 \\ 4x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{7}{2} \\ x = \frac{13}{8} \end{cases}. \text{ Ответ: } \left(\frac{13}{8}; \frac{7}{2}\right).$$

6. $y(3) = -1, y(-3) = 1$, середина этого отрезка имеет координаты $(0; 0)$.

7. Пусть x – количество страниц, которое беллетрист планирует набирать в день, тогда по условию:

$$\frac{480}{x} = \frac{480}{x+8} + 2; \quad \frac{480x + 3840 - 480x}{x(x+8)} = 2; \quad \frac{1920}{x(x+8)} = 1; \quad x^2 + 8x - 1920 = 0;$$

$$\frac{D}{4} = 1920 + 16 = 44^2; \quad x_{1,2} = -4 \pm 44; \quad x = 40.$$

Ответ: 40 страниц в день.

$$8. \begin{cases} \frac{14}{16x^2 - 9} > 0 \\ 4x - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{14}{(4x-3)(4x+3)} > 0 \\ 4x - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; -\frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}; +\infty\right) \\ x \in \left(-\infty; \frac{3}{4}\right) \end{cases}$$

$$x \in \left(-\infty; -\frac{3}{4}\right). \text{ Ответ: } \left(-\infty; -\frac{3}{4}\right).$$

$$9. \frac{1}{2-x} < \frac{x^2-5}{x-2}; \quad \frac{x^2-4}{x-2} > 0; \quad \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} > 0; \quad x \in (-2; 2) \cup (2; +\infty)$$

Ответ: $(-2; 2) \cup (2; +\infty)$.

10. 1) $7 \text{ ч} - 3 \text{ ч} = 4 \text{ ч}$.

2) 9 км.

3) от дома к озеру, т.к. время движения меньше.

Вариант 2

1. $3x - 8 \geq 8x - 3, 5x \leq -5, x \leq -1$. Ответ: $(-\infty; -1]$.

2. $4,567 \cdot 10^9 = 45,67 \cdot 10^8 < 45,76 \cdot 10^8$

3. $\frac{x-25}{\sqrt{x}-5} = \frac{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)}{\sqrt{x}-5} = \sqrt{x}+5$.

4. $\frac{y^2-9}{4y+12} = 0; \quad \frac{(y+3)(y-3)}{4(y+3)} = 0, y = 3$. Ответ: 3.

5. $\begin{cases} 3x + y = 3 \\ 3x + 3y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = -5 \\ 3x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{5}{3} \\ x = \frac{14}{9} \end{cases}$. Ответ: $\left(\frac{14}{9}; -\frac{5}{3}\right)$.

6. $y(2) = -1, y(-2) = 1$, тогда координаты середины указанного отрезка $(0; 0)$.

7. Пусть x – планируемая скорость набора прозаика, тогда по условию:

$$\frac{450}{x} = \frac{450}{x+5} + 3; \quad \frac{450x + 2250 - 450x}{x(x+5)} = 3; \quad \frac{2250}{x(x+5)} = 3; \quad \frac{750}{x(x+5)} = 1;$$

$$x^2 + 5x - 750 = 0, D = 25 + 3000 = 3025 = 55^2; \quad x_{1,2} = \frac{-5 \pm 55}{2} \Rightarrow x = 25$$

Ответ: 25 страниц в день.

$$8. \begin{cases} \frac{18}{4x^2 - 25} > 0 \\ 2x - 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{19}{(2x-5)(2x+5)} > 0 \\ 2x - 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}; +\infty\right) \\ x \in \left(-\infty; \frac{5}{2}\right) \end{cases}$$

$$x \in \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right). \text{ Ответ: } \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right).$$

$$9. \frac{2}{3-x} < \frac{x^2-11}{x-3}; \quad \frac{x^2-9}{x-3} > 0; \quad \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} > 0; \quad x \in (-3; 3) \cup (3; +\infty).$$

Ответ: $(-3; 3) \cup (3; +\infty)$.

10. 1) 10 ч – 4 ч = 6 ч.

2) 11 км

3) От дома к озеру т.к. время движения меньше.

Экзаменационная работа 4

Вариант 1

$$1. \frac{3}{4}x = 3\frac{3}{4}; \quad \frac{3}{4}x = \frac{15}{4}; \quad x = 5. \text{ Ответ: } 5.$$

$$2. \frac{5}{3x+2} \leq 0; \quad 3x+2 < 0, \quad x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right). \text{ Ответ: } \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right).$$

$$3. 12 = \sqrt{144} < \sqrt{168} < \sqrt{169} = 13. \text{ Ответ: } 12 \text{ и } 13.$$

$$4. \frac{24x^{10} - 24y^{24}}{10y^{24} - 10x^{10}} = \frac{24(x^{10} - y^{24})}{-10(x^{10} - y^{24})} = -2,4$$

$$5. y = x^2 - 4x - 5, \quad x_{\text{вер.}} = -\frac{-4}{2} = 2, \quad y_{\text{min}} = y(2) = 4 - 8 - 5 = -9. \text{ Ответ: } -9.$$

$$6. \begin{cases} \frac{15}{3-5x} > \frac{17}{3-5x} \\ \frac{2+3x}{4} < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{5x-3} > 0 \\ 3x < 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{5} \\ x < 6 \end{cases} \Rightarrow x \in \left(\frac{3}{5}; 6\right). \text{ Ответ: } \left(\frac{3}{5}; 6\right).$$

7. Количество вещества в 7 литрах 16% раствора равно $7 \cdot 0,16 = 1,12$, в 3-х литрах 6%-го раствора – $3 \cdot 0,06 = 0,18$, тогда в 10 литрах будет 1,3 некоторого вещества и концентрация будет $1,3:10 = 0,13$ т.е. 13%.

Ответ: 13%.

$$8. \begin{cases} 3x^2 - y = 7 \\ 5y - 3x^2 = -23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - y = 7 \\ 4y = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Ответ: (1; -4), (-1; -4).

$$9. \sqrt{b-30} = 2; b-30 = 4, b = 34. \text{ Тогда } \sqrt{b+30} = \sqrt{34+30} = 8. \text{ Ответ: } 8.$$

10. Цена акций 3 августа – 1496 руб., 17 августа – 1504 руб., 23 августа – 1518 руб. Доход Ивана $50(1504-1496) = 50 \cdot 8 = 400$ руб. Доход Леонида $30(1518-1496) = 30 \cdot 22 = 660$ руб. Т.е. доход Леонида больше дохода Ивана на 260 руб.

Вариант 2

$$1. \frac{2}{9}x = 4\frac{2}{9}; \frac{2}{9}x = \frac{38}{9}; x = 19. \text{ Ответ: } 19.$$

$$2. \frac{4}{2x+3} \geq 0, x > -\frac{3}{2}. \text{ Ответ: } \left(-\frac{3}{2}; +\infty\right).$$

$$3. 13 < \sqrt{169} < \sqrt{170} < \sqrt{196} = 14. \text{ Ответ: } 13 \text{ и } 14.$$

$$4. \frac{18x^2 - 18y^{18}}{12y^{18} - 12x^{12}} = \frac{18(x^{12} - y^{18})}{-12(x^{12} - y^{18})} = -\frac{3}{2}$$

$$5. y = x^2 + 6x - 7, x_{\text{верш.}} = -\frac{6}{2} = -3; y_{\text{наим.}} = y(x_{\text{верш.}}) = y(-3) = 9 - 18 - 7 = -16$$

Ответ: -16.

$$6. \begin{cases} \frac{12}{1-4x} > \frac{19}{1-4x} \\ \frac{3+4x}{3} < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{4x-1} > 0 \\ 4x < 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{4}, x \in \left(\frac{1}{4}; 3\right) \\ x < 3 \end{cases}. \text{ Ответ: } \left(\frac{1}{4}; 3\right).$$

7. Количество вещества в 8 литрах 9% раствора – $8 \cdot 0,09 = 0,72$, в 2-х литрах 4% раствора – $2 \cdot 0,04 = 0,08$, тогда в 10 литрах будет $0,72 + 0,08 = 0,8$ – некоторого вещества. Концентрация получившегося раствора – $0,8:10 = 0,08$, т.е. 8%. Ответ: 8%.

$$8. \begin{cases} 5x^2 - 4y = 17 \\ 6y - 5x^2 = -23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = -6 \\ 5x^2 - 4y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Ответ: (1; -3); (-1; -3).

$$9. \sqrt{b-28} = 5, b-28 = 25 \Rightarrow b = 53 \Rightarrow \sqrt{b+28} = \sqrt{53+28} = 9$$

10. Цена акций 5 мая – 492 руб. 19 мая – 512 руб. 25 мая – 516 руб. Доход Бориса $50(512-492) = 50 \cdot 20 = 1000$ руб. Андрея $10(516-492) = 10 \cdot 24 = 240$ руб. Доход Бориса больше дохода Андрея на 760 руб.

Экзаменационная работа 5

Вариант 1

$$1. (162^2 - 161^2):323 = (162-161)(162+161):323 = 1$$

$$2. \frac{a\sqrt{17}}{17\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{17}} = \sqrt{\frac{a}{17}}.$$

3. Т.к. $40 = 6 \cdot 5,72 + 5,68$, то на 40 руб. можно купить 6 баночек йогурта.

$$4. \frac{4}{x} - \frac{11}{4x} = 15; \frac{16-11}{4x} = 15; \frac{5}{4x} = 15; x = \frac{1}{12}. \text{ Ответ: } \frac{1}{12}.$$

$$5. \begin{cases} 4x+9 \leq 9x+4 \\ 1,7x < 51 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x \geq 5 \\ x < 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x < 30 \end{cases}, x \in [1; 30). \text{ Ответ: } [1; 30).$$

6. Прямая $y = -4$ пересекает график в 1-ой точке.

$$7. \frac{4}{4x^2-9} > 0; \frac{4}{(2x+3)(2x-3)} > 0, x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$$

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right).$$

$$8. \begin{cases} x^2 + 5y = (x-2)^2 - 20 \\ 4x + y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 5y = x^2 - 4x + 4 - 20 \\ 4x + y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 5y = -16 \\ 4x + y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = -8 \\ 4x + y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}. \text{ Ответ: } \left(-\frac{3}{2}; -2\right).$$

9. $y = ax^2 + bx + c$, т.к. ветви параболы вверх, то $a > 0$, $x_0 < 0 \Rightarrow -\frac{b}{2a} < 0 \Rightarrow$

$b > 0$, и т.к. $y(0) > 0$, то $c > 0$. Ответ: $a > 0, b > 0, c > 0$.

10. $b_2 \cdot b_{22} = b_1 q^2 \cdot b_1 q^{21} = b_1 q^{10} \cdot b_1 q^{13} = b_{11} \cdot b_{14}$. Пусть $x = b_{11}, y = b_{14}, x < y$ тогда

$$\begin{cases} x+y=28 \\ xy=75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=28 \\ x^2-28x+75=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=28 \\ (x-25)(x-3)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3, y=25 \\ x=25, y=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b_{14} - b_{11} + -(25-3) = + - 22. \text{ Ответ: } + - 22.$$

Вариант 2

$$1. (133^2 - 132^2) : 265 = (133 - 132)(133 + 132) : 265 = 1.$$

$$2. \frac{a\sqrt{11}}{11\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{11}} = \sqrt{\frac{a}{11}}.$$

3. $50 = 6 \cdot 7,16 + 7,04$ т.е. наибольшее число баночек – 6. Ответ: 6.

$$4. \frac{3}{x} - \frac{19}{5x} = 16; \frac{15-19}{5x} = 16; -\frac{4}{5x} = 16 \Rightarrow x = -\frac{1}{20}. \text{ Ответ: } -\frac{1}{20}.$$

$$5. \begin{cases} 5x+8 \leq 8x+5 \\ 2,3x < 46 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \geq 3 \\ x < 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x < 20 \end{cases} \Rightarrow x \in [1; 20). \text{ Ответ: } [1; 20).$$

6. Прямая $y = -1$ пересекает график в 1-ой точке.

$$7. \frac{9}{9x^2-4} < 0; \frac{9}{(3x-2)(3x+2)} < 0; x \in \left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right). \text{ Ответ: } \left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

$$8. \begin{cases} x^2+3y=(x+1)^2+12 \\ 2x-5y=-17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3y=x^2+2x+1+12 \\ 2x-5y=-17 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y-2x=13 \\ 2x-5y=-17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y=-4 \\ 3y-2x=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=-\frac{7}{2} \end{cases}. \text{ Ответ: } \left(-\frac{7}{2}; 2\right).$$

$$9. \text{ Ветви параболы вниз} \Rightarrow a < 0, x_{\text{верш.}} < 0 \Rightarrow -\frac{b}{2a} < 0 \Rightarrow b < 0, \text{ и } y(0) < 0 \Rightarrow c < 0.$$

$$\text{Ответ: } a < 0, b < 0, c < 0.$$

$$10. b_2 \cdot b_{12} = b_1 q \cdot b_1 q^{11} = b_1 q^7 \cdot b_1 q^5 = b_8 \cdot b_6; b_6 = x, b_8 = y, x < y$$

$$\begin{cases} x+y=16 \\ xy=28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=16 \\ x^2-16x+28=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=16 \\ (x-2)(x-14)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2, y=14 \\ y=2, x=14 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b_8 - b_6 = + - (y - x) = + - (14 - 2) = + - 12. \text{ Ответ: } + - 12.$$

**Экзаменационные работы по алгебре
для классов с углубленным изучением математики**

Экзаменационная работа 1

Вариант 1

$$1. 688 \cdot 690 > 689 \cdot 687, \text{ т.к. } 687 < 688, 689 < 690.$$

$$2. \frac{\sqrt{(x+3)(y+5)}}{\sqrt{-3-x}} = \frac{\sqrt{(-3-x)(-y-5)}}{\sqrt{-3-x}} = \sqrt{-y-5}.$$

$$3. \begin{cases} \frac{x^2}{13x+14y}=14 \\ 13x+14y=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ 13x+14y=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{1}{14} \\ x=-1 \\ y=\frac{27}{14} \end{cases}. \text{ Ответ: } \left(1; \frac{1}{14}\right); \left(-1; \frac{27}{14}\right).$$

$$4. 3x^2-4x+3 \leq 2x^2-3x+4 \leq 4x^2-5x+5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-4x+3 \leq 2x^2-3x+4 \\ 4x^2-5x+5 \geq 2x^2-3x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-1 \leq 0 \\ 2x^2-2x+1 \geq 0 \end{cases} \text{ — верно при любом } x$$

$$\Leftrightarrow x^2-x-1 \leq 0 \Leftrightarrow \left(x - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right) \left(x - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right) \leq 0 \Rightarrow x \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right].$$

$$\text{Ответ: } \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right].$$

$$5. \frac{x^2}{x-5} - \frac{x}{5-x} = \frac{30}{x-5}; \frac{x^2+x-30}{x-5} = 0; \frac{(x+6)(x-5)}{x-5} = 0 \Rightarrow x = -6.$$

Ответ: -6.

$$6. (x^2-6x+5)(x+3)^2 \leq 0, (x-5)(x-1)(x+3)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [1; 5] \cup \{-3\}$$

Ответ: $[1; 5] \cup \{-3\}$.

$$7. 1) 1+2 = 3 \text{ ч.}$$

$$2) (16 \text{ км} - 6 \text{ км}) : (6 \text{ ч} - 4 \text{ ч}) = 5 \text{ км/ч.}$$

$$3) (16 \text{ км} + 16 \text{ км}) : (3 \text{ ч} + 2 \text{ ч} + 5 \text{ ч}) = 32 \text{ км} : 10 \text{ ч} = 3,2 \text{ км/ч.}$$

$$8. \text{ Пусть сыну } x \text{ лет, отцу } 6x \text{ лет, по условию: } \frac{6x+1}{x+1} = 5 \Rightarrow 6x+1 = 5x+5 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 4$. Пусть через t лет сын будет младше отца в 3 раза, тогда

$$\frac{24+t}{4+t} = 3 \Rightarrow 24+t = 12+3t \Rightarrow t = 6. \text{ Ответ: через 6 лет.}$$

$$9. (2x-3)^6 < (3-2x)^3, (2x-3)^2 < -(2x-3) \Leftrightarrow (2x-3)(2x-3+1) < 0 \Leftrightarrow (2x-3)(x-1) < 0$$

$$\Rightarrow x \in \left(1; \frac{3}{2}\right). \text{ Ответ: } \left(1; \frac{3}{2}\right).$$

$$10. (a+3b)\sqrt{3} = (a+b+2)\sqrt{7}, \text{ т.к. } a \text{ и } b \text{ целые, то}$$

$$\begin{cases} a+3b=0 \\ a+b+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3b \\ -2a+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=-3 \end{cases}. \text{ Ответ: } (-3; 1).$$

Вариант 2

$$1. 685 \cdot 687 > 686 \cdot 684 \text{ т.к. } 685 > 684, 687 > 686.$$

$$2. \frac{\sqrt{(x+5)(y+4)}}{\sqrt{-5-x}} = \frac{\sqrt{(-x-5)(-y-4)}}{\sqrt{-5-x}} = \sqrt{-y-4}.$$

$$3. \begin{cases} \frac{x^2}{11x+12y} = 12 \\ 11x+12y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ 11x+12y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{12} \\ x = -1 \\ y = \frac{23}{12} \end{cases}. \text{ Ответ: } \left(1; \frac{1}{12}\right), \left(-1; \frac{23}{12}\right)$$

$$4. \begin{cases} 5x^2 - 6x - 1 \leq 4x^2 - 3x - 2 \\ 6x^2 - 7x + 2 \geq 4x^2 - 3x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 1 \leq 0 \\ 2x^2 - 4x + 4 \geq 0 \end{cases} \text{ — верно при любом } x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right].$$

$$5. \frac{x^2}{x-2} - \frac{7x}{2-x} = \frac{18}{x-2} \Leftrightarrow \frac{x^2+8x-18}{x-2} = 0; \frac{(x-2)(x+9)}{x-2} = 0 \Rightarrow x = -9.$$

Ответ: -9.

$$6. (x^2 - 5x + 4)(x + 2)^2 \leq 0, (x - 1)(x - 4)(x + 2)^2 \leq 0; x \in [1; 4] \cup \{-2\}.$$

Ответ: $[1; 4] \cup \{-2\}$.

$$7. 1) 3 + 2 = 5 \text{ ч} \quad 2) (16 \text{ км} - 8 \text{ км}) : (10 \text{ ч} - 7 \text{ ч}) = \frac{8}{3} \text{ км/ч.}$$

$$3) (16 \text{ км} + 16 \text{ км}) : (4 \text{ ч} + 3 \text{ ч} + 3 \text{ ч}) = 3,2 \text{ км/ч.}$$

8. Пусть x лет сыну, тогда $9x$ лет отцу. По условию $\frac{9x+1}{x+1} = 7$, $9x+1 = 7x+7$, $x = 3$. Пусть через t лет отец станет старше сына в 5 раз, т.е.

$$\frac{27+t}{3+t} = 5; 27+t = 15+5t \Leftrightarrow t = 3. \text{ Ответ: } 3.$$

$$9. (3x-4)^6 < (4-3x)^3, (3x-4)^2 < -(3x-4); (3x-4)(3x-4+1) < 0 \Leftrightarrow (3x-4)(3x-3) < 0 \Rightarrow x \in \left(1; \frac{4}{3}\right). \text{ Ответ: } \left(1; \frac{4}{3}\right).$$

10. $(a+b+4)\sqrt{5} = (3a-b)\sqrt{2}$, т.к. a и b целые, то

$$\begin{cases} a+b+4=0 \\ 3a-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3a \\ a+3a+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-3 \end{cases}. \text{ Ответ: } (-1; -3).$$

Экзаменационная работа 2

Вариант 1

$$1. 2m^2 + 5m + 3 = 2m^2 + 2m + 3m + 3 = 2m(m+1) + 3(m+1) = (2m+1)(m+1).$$

$$2. \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 5x + 4} = 0; \frac{(x-4)(x+3)}{(x-4)(x-1)} = 0 \Rightarrow x = -3. \text{ Ответ: } -3.$$

$$3. \sqrt{4\frac{5}{11}} - \sqrt{7\frac{4}{11}} + \sqrt{1\frac{5}{11}} - \sqrt{3\frac{3}{11}} = \sqrt{\frac{49}{11}} - \sqrt{\frac{81}{11}} + \sqrt{\frac{16}{11}} - \sqrt{\frac{36}{11}} = \frac{7}{\sqrt{11}} - \frac{9}{\sqrt{11}} + \frac{4}{\sqrt{11}} - \frac{6}{\sqrt{11}} = -\frac{4}{\sqrt{11}}.$$

$$4. \begin{cases} (x+2)^2 + (y-1)^2 = x^2 + y^2 + 1 \\ 6y + x = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + y^2 + 1 \\ 6y + x = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = -2 \\ 6y + x = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13y = 52 \\ 2x - y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 1 \end{cases}. \text{ Ответ: } (1; 4).$$

$$5. \frac{(4x-3)^2}{7x^2+3} \geq \frac{x^2}{7x^2+3}; \frac{(4x-3-x)(4x-3+x)}{7x^2+3} \geq 0$$

$$\frac{(3x-3)(5x-3)}{7x^2+3} \geq 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty; \frac{3}{5}\right] \cup [1; +\infty). \text{ Ответ: } \left(-\infty; \frac{3}{5}\right] \cup [1; +\infty).$$

6. Одно решение

$$7. \begin{cases} (x^2 - 4x + 3)^2 \leq 0 \\ x^3 + x^2 > 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2(x-3)^2 \leq 0 \\ x^2 + x^3 > 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, x=3 \\ x^2 + x^3 > 35 \end{cases} \Rightarrow x=3.$$

Ответ: 3

$$8. \frac{\sqrt{5x}}{x-3} = \frac{x+16}{\sqrt{5x}} \Rightarrow 5x = x^2 + 13x - 48; x^2 + 8x - 48 = 0$$

$\Rightarrow (x+4)(x-12) = 0$ т.к. $x > 0$, то $x = 12$. Ответ: 12.

9. Центр окружности в точке $(5; -2) \Rightarrow$ уравнение окружности

$$(x-5)^2 + (y+2)^2 = 4 \Rightarrow \text{уравнение функции } y = -2 - \sqrt{4 - (x-5)^2}.$$

$$10. \frac{1}{372} + \frac{2}{373} + \frac{3}{374} + \frac{4}{375} < \frac{1}{370} + \frac{2}{370} + \frac{3}{370} + \frac{4}{370} = \frac{10}{370} = \frac{1}{37}.$$

Вариант 2

$$1. 4m^2 + 9m + 5 = 4m^2 + 4m + 5m + 5 = 4m(m+1) + 5(m+1) = (4m+5)(m+1).$$

$$2. \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + x - 12} = 0; \frac{(x+5)(x-3)}{(x+4)(x-3)} = 0 \Rightarrow x = -5. \text{ Ответ: } -5.$$

$$3. \sqrt{1\frac{17}{19}} - \sqrt{2\frac{11}{19}} + \sqrt{1\frac{6}{19}} - \sqrt{3\frac{7}{19}} = \sqrt{\frac{36}{19}} - \sqrt{\frac{49}{19}} + \sqrt{\frac{25}{19}} - \sqrt{\frac{64}{19}} =$$

$$= \frac{6}{\sqrt{19}} - \frac{7}{\sqrt{19}} + \frac{5}{\sqrt{19}} - \frac{8}{\sqrt{19}} = -\frac{4}{\sqrt{19}}.$$

$$4. \begin{cases} (x+2)^2 + (y-4)^2 = x^2 + x^2 + 4 \\ 7y + x = 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = x^2 + y^2 + 4 \\ 7y + x = 23 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -4 \\ 7y + x = 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9y = 27 \\ 7y + x = 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 2 \end{cases}. \text{ Ответ: } (2; 3).$$

$$5. \frac{x^2}{3x^2 + 7} \geq \frac{(3x-2)^2}{3x^2 + 7} \Leftrightarrow \frac{((3x-2-x)(3x-2+x))}{3x^2 + 7} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x-2)(4x-2)}{3x^2 + 7} \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]. \text{ Ответ: } \left[\frac{1}{2}; 1\right].$$

6. Одно решение.

$$7. \begin{cases} (2-3x-4)^2 \leq 0 \\ x^3 + x^2 > 47 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2(x-1)^2 \leq 0 \\ x^3 + x^2 > 47 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4; x=1 \\ x^3 + x^2 > 47 \end{cases} \Rightarrow x=4$$

Ответ: 4.

$$8. \frac{x-2}{\sqrt{6x}} = \frac{\sqrt{6x}}{x+5}; x^2 + 3x - 10 = 6x, x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+2) = 0$$

Т.к. $x > 0$, то $x = 5$. Ответ: 5.

9. Центр окружности $(-5; 4)$, уравнение окружности $(x+5)^2+(y-1)^2=9$.

$\Rightarrow$ Уравнение функции $y=1+\sqrt{9-(x+5)^2}$

$$10. \frac{1}{482} + \frac{2}{483} + \frac{3}{484} + \frac{4}{485} < \frac{1}{480} + \frac{2}{480} + \frac{3}{480} + \frac{4}{480} = \frac{10}{480} = \frac{1}{48}.$$

Экзаменационная работа 3

Вариант 1

$$1. (x-0,5)2 = (x+0,04)2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-0,5 = x+0,04 \\ x-0,5 = -0,04-x \end{cases} \Leftrightarrow 2x = 0,45 \Rightarrow x = 0,23$$

Ответ: 0,23.

$$2. (3 \cdot 10^{-2})^3 = 27 \cdot 10^{-6} = 0,000027.$$

$$3. x + \sqrt{(x-11)^2} = x + 11 - x = 11, x < 11.$$

4. $y = 2 - x$ убывает при $x > 0$.

$$5. a_7 = a_1 + 6d = -40 \Rightarrow 10d = -10 \Rightarrow d = -1; a_{17} = a_1 + 16d = -50. \text{ Ответ: } -1.$$

$$6. \begin{cases} \frac{(x+4)^2}{5x^2+4} > \frac{(x+5)^2}{5x^2+4} \\ 0,9x > -8,1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+5) - (x+4)(x+5+x+4)}{5x^2+4} < 0 \\ x > -9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+9 < 0 \\ x > -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{9}{2} \\ x > -9 \end{cases} \Rightarrow x \in \left(-9; -\frac{9}{2}\right). \text{ Ответ: } \left(-9; -\frac{9}{2}\right).$$

$$7. \begin{cases} \frac{x}{y} - 18 \frac{y}{x} = 3 \\ x+3y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-18y^2-3xy}{xy} = 0 \\ x+3y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-6y)(x+3y)}{xy} = 0 \\ x+3y=9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-6y=0 \\ x+3y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6y \\ 9y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=6 \end{cases}. \text{ Ответ: } (6; 1).$$

$$8. (3x^2-4x+1)^4 \geq (2x^2-3x+3)^4; (3x^2-4x+1)^2 \geq (2x^2-3x+3)^2; \\ (3x^2-4x+1+2x^2-3x+3)(3x^2-4x+1-2x^2+3x-3) \geq 0; (5x^2-7x+4)(x^2-x-2) \geq 0; \\ 5x^2-7x+4 > 0 \text{ при любом } x. (x-2)(x+1) \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty).$$

Ответ: $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$.

9. Пусть x акций купил брокер, тогда он потратил $1000x$ рублей. Цена акций 5 июня – 1008 рублей. 13 июня – 1012 рублей. Тогда брокер получит $0,6x \cdot 1008 + 0,4x \cdot 1012 = 604,8x + 404,8x = 1009,6x$.

Т.е. он получил $\frac{1009,6x - 1000x}{1000x} \cdot 100\% = 0,96\%$ прибыли.

Ответ: 0,96 %.

10. Пусть x – сумма кредита, тогда по условию проценты, которые выплатит заемщик составят: $0,19x + 0,19 \cdot 0,9x + \dots + 0,19 \cdot 0,1x =$

$$= 0,19(1 + 0,9 + 0,8 + \dots + 0,1) = 0,019x(1 + 2 + \dots + 10) = 0,019x \frac{10 \cdot 11}{2} = 1,045x,$$

т.е. всего заемщик выплатит $1,045x + x = 2,045x$, что в 2,045 раз превысит сумму займа. *Ответ:* в 2,045 раз.

Вариант 2

$$1. (x + 0,06)^2 = (x - 0,2)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 0,06 = x - 0,2 \\ x + 0,06 = 0,2 - x \end{cases} \Rightarrow 2x = 0,14 \Leftrightarrow x = 0,07$$

Ответ: 0,07.

$$2. (11 \cdot 10^{-3})^2 = 121 \cdot 10^{-6} = 0,000121.$$

$$3. x - \sqrt{(12 - x)^2} = x - |12 - x| = x - x + 12 = 12, x > 12.$$

$$4. y = \frac{3}{x} \text{ убывает при } x < 0.$$

$$5. a_8 = a_1 + 7d = -22 \Rightarrow 12d = -36, d = -3. a_{20} = a_1 + 19d = -58. \text{ Ответ: } -3.$$

$$6. \begin{cases} \frac{(x+6)^2}{7x^2+6} > \frac{(x+7)^2}{7x^2+6} \\ 0,13x > -1,69 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{((x+7)-(x+6))(x+7+x+6)}{7x^2+6} < 0 \\ x > -13 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+13 < 0 \\ x > -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{13}{2} \\ x > -13 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-13; -\frac{13}{2}\right). \text{ Ответ: } \left(-13; -\frac{13}{2}\right).$$

$$7. \begin{cases} \frac{x}{y} - 16 \frac{y}{x} = 6 \\ x + 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 16y^2 - 6xy}{xy} = 0 \\ x + 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 8y)(x + 2y) = 0 \\ x + 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 8y = 0 \\ x + 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10y = 10 \\ x + 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 8 \end{cases}. \text{ Ответ: } (8; 1).$$

$$8. (3x^2 - 7x + 2)^4 \geq (2x^2 - 5x + 10)^4; (2x^2 - 7x + 2)^2 \geq (2x^2 - 5x + 10)^2; \\ (2x^2 - 7x + 2 - 2x^2 + 5x - 10)(3x^2 - 7x + 2 + 2x^2 - 5x + 10) \geq 0; (x^2 - 2x - 8)(5x^2 - 12x + 12) \geq 0; \\ 5x^2 - 12x + 12 > 0 \text{ при всех } x. (x - 4)(x + 2) \geq 0 \quad x \in (-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$$

Ответ: $(-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$.

9. Цена акций 1 июля – 1000 руб. 9 июля – 1008 руб. 13 июля – 1003 руб. Пусть брокер купил x акций, он потратил $1000x$ руб. Продав их, он получит $1008x \cdot 0,4 + 1003 \cdot x \cdot 0,6 = 1005x$ руб. Эта операция принесла ему $\frac{(1005 - 1000)x}{1000x} \cdot 100\% = 0,5\%$. *Ответ:* 0,5 %.

10. Пусть x – сумма кредита, тогда по условию заемщик должен выплатить

$$0,12x + \frac{1}{20}x + 0,12 \cdot \frac{9}{20}x + \frac{1}{20}x + \dots + 0,12 \cdot \frac{1}{20}x + \frac{1}{20}x =$$

$$= x + 0,12x \left(1 + \frac{19}{20} + \dots + \frac{1}{20} \right) = x + 0,006x(1 + 2 + \dots + 20) = 0,006x \cdot \frac{21 \cdot 20}{2} + x =$$

$$= 2,26x, \text{ что в } 2,26 \text{ раз превосходит сумму займа. Ответ: в } 2,26 \text{ раз.}$$

Экзаменационная работа 4

Вариант 1

$$1. \frac{\sqrt{2,8} \cdot \sqrt{4,2}}{\sqrt{0,24}} = \frac{\sqrt{7 \cdot 0,4 \cdot 7 \cdot 0,6}}{\sqrt{0,4 \cdot 0,6}} = 7.$$

$$2. \frac{27x^3 + 8y^3}{9x^2 - 6xy + 4y^2} = \frac{(3x + 2y)(9x^2 - 6xy + 4y^2)}{9x^2 - 6xy + 4y^2} = 3x + 2y.$$

$$3. 4x^4 + 3x^2 - 1 = 0, t = x^2 > 0; 4t^2 + 3t - 1 = 0, D = 9 + 16 = 25 = 5^2; t_1 = \frac{-3-5}{8} = -1 -$$

$$\text{не подходит; } t_2 = \frac{-3+5}{8} = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}. \text{ Ответ: } \pm \frac{1}{2}.$$

$$4. \frac{6}{x(x-3)} < \frac{5}{x(x-3)}; \frac{11}{x(x-3)} < 0, x \in (0; 3). \text{ Ответ: } (0; 3).$$

5. Цена акции 1 февраля – 1020 руб. 3 февраля – 1020 руб. 17 февраля – 1008 руб. На покупку акций брокер потратил 1020·50 руб. После продажи он получит 1020·20 + 1008·30. Убыток составит 1020·50 – 1020·20 – 1008·30 = 30(1020 – 1008) = 30·12 = 360 руб. Ответ: 360 руб.

$$6. \begin{cases} (x+12)(x+13) = 0 \\ \frac{13x+12y}{y+13} = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+12 = 0 \\ \frac{13x+12y}{y+13} = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -12 \\ 12(y-13) = 24(y+13) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -12 \\ y = -39 \end{cases}$$

Ответ: (–12; –39).

$$7. \text{ За } 36 \text{ минут } 1\text{-й пешеход пройдет } 5 \cdot \frac{36}{60} = 3 \text{ (км). Расстояние от него}$$

до пункта В станет равно $27 - 3 = 24$ (км). Далее, скорость сближения пешеходов будет равна $3 \text{ км/ч} + 5 \text{ км/ч} = 8 \text{ км/ч}$. Тогда они встретятся через $24 : 8 = 3$ (ч) на расстоянии $3 \cdot 3 = 9$ км от В.

Ответ: 9 км.

$$8. \begin{cases} \frac{(x-5)^2}{16-x^2} \geq 0 \\ 5x-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-5)^2}{(4-x)(4+x)} \geq 0 \\ x(5-x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-4; 4) \cup \{5\} \\ x \in [0; 5] \end{cases} \Rightarrow x \in [0; 4) \cup \{5\}$$

Ответ: $[0; 4) \cup \{5\}$.

9. $61 = 4 \cdot 13 + 9$; $63 = 4 \cdot 13 + 11$. Отсюда ясно, что утверждения 1) и 3) верны. 2) ложно и $a = 61$. Ответ: 61.

10. $y = \sqrt{x^2 - 6x + 8} + \sqrt{x^2 + 3x - 15} = \sqrt{(x-4)(x-2)} + \sqrt{(x-3)(x+5)}$
 $\Rightarrow y$ определенно при $x \in (-\infty; -5] \cup [4; +\infty)$. Т.к. $(x^2 - 6x + 8)$ и $(x^2 + 3x - 15)$ убывают на $(-\infty; -5]$ и возрастают на $[4; +\infty)$, то минимальное значение будет либо при $x = -5$, либо при $x = 4$. $y(-5) = \sqrt{9 \cdot 7}$, $y(4) = \sqrt{9} = 3$, т.е. $y_{\min} = 3$. Ответ: 3.

Вариант 2

$$1. \frac{\sqrt{1,8} \cdot \sqrt{6,3}}{\sqrt{0,14}} = \frac{\sqrt{0,2 \cdot 9} \cdot \sqrt{0,7 \cdot 9}}{\sqrt{0,7 \cdot 0,2}} = 9.$$

$$2. \frac{8x^3 + 125y^3}{4x^2 - 10xy + 25y^2} = \frac{(2x+5y)(4x^2 - 10xy + 25y^2)}{4x^2 - 10xy + 25y^2} = 2x + 5y.$$

$$3. 9x^4 + 8x^2 - 1 = 0, t = x^2 > 0; 9t^2 + 8t - 1 = 0, \frac{D}{4} = 16 + 9 = 25 = 5^2$$

$$t_1 = \frac{-4-5}{9} = -1 \text{ — не подходит; } t_2 = \frac{-4+5}{9} = \frac{1}{9} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{9}, x = \pm \frac{1}{3}. \text{ Ответ: } \pm \frac{1}{3}$$

$$4. \frac{5}{x(x-2)} > \frac{4}{x(2-x)}; \frac{9}{x(x-2)} > 0; x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$$

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

5. Цена акций 1 марта — 500 руб. 5 марта — 500 руб. 15 марта — 496 руб. На покупку акций брокер потратил 90·500 руб, продажа принесла ему: 10·500+80·496. Убыток составил: 90·500–10·500–80·496 = 80·4 = 320 руб. Ответ: 320 руб.

$$6. \begin{cases} (x+11)(y+12) = 0 \\ \frac{12x+11y}{y+12} = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+11=0 \\ \frac{12x+11y}{y+12} = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-11 \\ \frac{11(y-12)}{y+12} = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-11 \\ y=-36 \end{cases}$$

Ответ: $(-11; -36)$.

7. За 15 минут 1-й пешеход пройдет $4 \cdot \frac{15}{60} = 1$ (км) и расстояние от него до пункта В будет равно $11-1 = 10$ (км). Далее скорость сближения пешеходов будет равна $4+6 = 10$ (км/ч) и они встретятся через 10 км : 10 км/ч = 1 ч, на расстоянии 1 ч·6 км/ч = 6 км от пункта В. Ответ: 6 км.

$$8. \begin{cases} \frac{(x-6)^2}{25-x^2} \geq 0 \\ 6x-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-6)^2}{(x-5)(x+5)} \leq 0 \\ x(x-6) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-5; 5) \cup \{6\} \\ x \in [0; 6] \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0; 5) \cup \{6\}$$

Ответ: $[0; 5) \cup \{6\}$.

9. $56 = 12 \cdot 4 + 8$; $58 = 12 \cdot 4 + 10$. Отсюда видно, что утверждение 2) ложно, тогда истинны 1) и 3) и $a = 56$. Ответ: 56.

$$10. y = \sqrt{x^2 - 4x + 5} + \sqrt{2x^2 - 8x + 17} = \sqrt{x^2 - 4x + 4 + 1} + \sqrt{2(x^2 - 4x + 4) + 9} = \\ = \sqrt{(x-4)^2 + 1} + \sqrt{2(x-4)^2 + 9} \Rightarrow y_{\text{наим.}} = \sqrt{1} + \sqrt{9} = 4 \text{ при } x = 4. \text{ Ответ: 4.}$$

Экзаменационная работа 5

Вариант 1

$$1. 21x^2 - 4x - 1 = 0; \frac{D}{4} = 4 + 21 = 25 = 5^2; x_{1,2} = \frac{2 \pm 5}{21} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{7}; x_2 = \frac{1}{3}$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{7}; \frac{1}{3}.$$

$$2. (3x-7)^2 \geq (7x-3)^2; (7x-3+3x-7)(7x-3-3x+7) \leq 0; (10x-10)(4x+4) \leq 0; \\ (x-1)(x+1) \leq 0 \Rightarrow x \in [-1; 1]. \text{ Ответ: } [-1; 1].$$

$$3. 16a^2 + 24ab + 9b^2 - 4a + 3b = 16\left(\frac{3}{4}b\right)^2 - 24\left(\frac{3}{4}b\right) \cdot b + 9b^2 - 4 \cdot \frac{3}{4}b + 3b = \\ = 9b^2 - 18b^2 + 9b^2 - 3b + 3b = 0.$$

$$4. 0,9477\overline{0,774} \neq 0,7335\overline{199}$$

Т.к. последняя цифра произведения в левой части равна 8 ($7 \cdot 4 = 28$).

$$5. \begin{cases} (x+2y)^2 - (3x+y)^2 = 8 \\ y-2x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2y-3x-y)(x+2y+3x+y) = 8 \\ y-2x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (y-2x)(4x+3y) = 8 \\ y-2x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+3y = 2 \\ y-2x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y = 10 \\ y-2x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (-1; 2).$$

$$6. y = \frac{8}{\sqrt{x^2 + 4}}; y_{\text{наиб.}} = \frac{8}{\sqrt{4}} = \frac{8}{2} = 4. \text{ Ответ: 4.}$$

$$7. \begin{cases} \frac{1}{x-4} < \frac{1}{x+8} \\ \frac{1}{x+6} > \frac{1}{x-5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{12}{(x-4)(x+8)} < 0 \\ \frac{11}{(x+6)(x-5)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-8; 4) \\ x \in (-6; 5) \end{cases} \Rightarrow x \in (-6; 4) \text{ Ответ: } (-6; 4)$$

8. Пусть x и y кг кислоты в каждом из сосудов соответственно с 30 кг и 35 кг.

$$\text{По условию: } \begin{cases} x + y = 0,46 \cdot (30 + 35) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{x}{30} + \frac{y}{35} \right) = 0,47 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 29,9 \\ \frac{x}{30} + \frac{y}{35} = 0,94 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 29,9 \\ \frac{7}{6}x + y = 32,9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{6}x = 3 \\ x + y = 29,9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 18 \\ y = 11,9 \end{cases} \text{ Ответ: 18 кг, 11,9 кг.}$$

$$9. \min\left(23 - \frac{16}{(x-12)^2 + 4}\right) = \min\left(23 - \frac{16}{4}\right) = 19; \max\left(5 + \frac{16}{(x-12)^2 + 4}\right) = \max\left(5 + \frac{16}{4}\right) = 9 \Rightarrow \text{утверждение 1 - ложно, 2) 3) верно. Ответ: 1)}.$$

$$10. y = ax + b, y(\sqrt{3} + 1) = \sqrt{3} - 2 \Rightarrow \sqrt{3} - 2 = a(\sqrt{3} + 1) + b \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -3 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases}; y = x - 3 \Rightarrow y(3) = 0. \text{ Ответ: 0.}$$

Вариант 2

$$1. 24x^2 - 2x - 1 = 0; \frac{D}{4} = 1 + 24 = 25; x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{24}, x_1 = \frac{1}{4}; x_2 = -\frac{1}{6}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{4}; -\frac{1}{6}.$$

$$2. (5x-4)^2 \geq (4x-5)^2 \Leftrightarrow (5x-4-4x+5)(5x-4+4x-5) \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(9x-9) \geq 0; \\ x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty). \text{ Ответ: } (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) ..$$

$$3. 9a^2 + 30ab + 25b^2 + 3a + 5b, a = -\frac{5}{3}b;$$

$$9\left(-\frac{5}{3}b\right)^2 + 30\left(-\frac{5}{3}b\right)b + 25b^2 + 3\left(-\frac{5}{3}b\right) + 5b = 25b^2 - 50b^2 + 25b^2 - 5b + 5b = 0$$

$$4. 0,8368 \cdot 0,863 \neq 0,7221585, \text{ т.к. последняя цифра левой части равна } 4(3 \cdot 8).$$

$$5. \begin{cases} (2x-y)^2 - (x+3y)^2 = -9 \\ 3x+2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-y+x+3y)(2x-y-x-3y) = -9 \\ 3x+2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (3x+2y)(x-4y) = -9 \\ 3x+2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4y = 9 \\ 3x+2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 7 \\ x-4y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } (1; -2).$$

$$6. y = -\frac{6}{\sqrt{x^2 + 9}}, y_{\text{наим.}} = -\frac{6}{\sqrt{9}} = -2. \text{ Ответ: } -2.$$

$$7. \begin{cases} \frac{1}{x-6} < \frac{1}{x+9} \\ \frac{1}{x+7} > \frac{1}{x-7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{15}{(x-6)(x+9)} < 0 \\ \frac{14}{(x-7)(x+7)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-9; 6) \\ x \in (-7; 7) \end{cases} \Rightarrow x \in (-7; 6)$$

$$\text{Ответ: } (-7; 6).$$

8. Пусть x, y кг кислоты в каждом из указанных растворов.

По условию

$$\begin{cases} \frac{x+y}{22} = 0,36 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{x}{10} + \frac{y}{12} \right) = 0,39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 7,92 \\ \frac{6}{5}x + y = 9,36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{5}x = 1,44 \\ x+y = 7,92 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7,2 \\ y = 0,72 \end{cases}$$

Ответ: 7,2 кг и 0,72 кг.

9. $\max \left(-3 + \frac{9}{(x-2)^2 + 3} \right) = 0$; $\min \left(11 - \frac{9}{(x-2)^2 + 3} \right) = 11 - 3 = 8$

$\Rightarrow$ утверждение 1) ложно.

Ответ: 1).

10. $y = ax+b$, $y(-3-\sqrt{2}) = \sqrt{2}+1$; $\sqrt{2}+1 = -3a - \sqrt{2}a + b$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3a+b=1 \\ a=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2 \\ a=-1 \end{cases} \Rightarrow y = -x-2 \Rightarrow y(3) = -5.$$

Ответ -5.

Учебно-методическое издание
Веремьёв Александр Фёдорович

**Решение
экзаменационных задач
по алгебре
за 9 класс**

Издательство **«ЭКЗАМЕН»**

Гигиенический сертификат
№ 77.99.02.953.Д.008330.09.06 от 14.09.2006 г.

Выпускающий редактор *Л.Д. Лаппо*
Дизайн обложки *И.Р. Захаркина*
Компьютерная верстка *Н.Н. Балахонцева, О. В. Попова*

105066, Москва, ул. Нижняя Красносельская, д. 35, стр. 1.
www.examen.biz

E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры, литература учебная

Текст отпечатан с диапозитивов
в ОАО «Владимирская книжная типография»
600000, г. Владимир, Октябрьский проспект, д. 7
Качество печати соответствует
качеству предоставленных диапозитивов

По вопросам реализации обращаться по тел.:
641-00-30 (многоканальный).