Н.В. Дорофеев, А.А. Сапожников,
Е.С. Шубин

РЕШЕНИЕ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ ЗА 11 КЛАСС

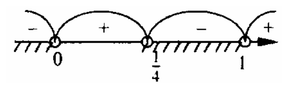
к учебному изданию «Сборник заданий для проведения письменного экзамена по математике (курс А) и алгебре и началам анализа (курс В) за курс средней школы. 11 класс / Г.В. Дорофеев, Г.К. Муравин, Е.А. Седова. — М.: Дрофа»

Раздел 1. Задания 1–5 для экзаменов «Математика» и «Алгебра и начало анализа»

Вариант 1.

1. $\frac{x-4x^2}{x-1}>0$; $\frac{x(4x-1)}{x-1}<0$.

Пусть f(x)= $\frac{x(4x-1)}{x-1}$. f(x) определена на $(-\infty; 1)\cup(1; \infty)$;



f(x) = 0 при x = 0, x= $\frac{1}{4}$.

$x\in(-\infty; 0)\cup(\frac{1}{4};1)$

Ответ: $(-\infty; 0)\cup(\frac{1}{4};1)$.

2. $\log_2(2x-1)=3$; $\begin{cases}2x-1>0,\\2x-1=8;\end{cases}$ $\begin{cases}x>0,5\\x=4,5;\end{cases}$ x=4,5. Ответ: 4,5.

3. 2sinx+1=0, $[0; 2\pi]$. 2sinx=–1; sinx=$-\frac{1}{2}$; $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$.

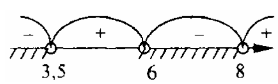
Из этих корней промежутку $[0,2\pi]$ принадлежат только $\frac{7\pi}{6}$ и $\frac{11\pi}{6}$.

4. а) D(f)=[–2,5; 6];
б) функция возрастает на промежутке [–2,5; –0,5];
функция убывает на промежутке [–0,5; 6];
в) f(x)=0 при x=–1,8 и x=1,5; г) max f(x)=3,5, min f(x)=f(6)=–5,5;
д) $-4<f(x)<2$ при $x\in(-2,4; -1,4)\cup(0,8; 5,2)$.

5. $f(x)=x^4+3x^2+5$. $F(x)=\frac{x^5}{5}+3\frac{x^3}{3}+5x+C$; $F(x)=\frac{x^5}{5}+x^3+5x+C$.

Ответ: $F(x)=\frac{x^5}{5}+x^3+5x+C$.

Вариант 2.



1. $\frac{(x-6)(x-8)}{2x-7}<0$.

Пусть f(x) = $\frac{(x-6)(x-8)}{2x-7}$.

f(x) определена на $(-\infty; 3{,}5)\cup(3{,}5; \infty)$; f(x) =0 при x=6, x=8.
$x\in(-\infty; 3{,}5)\cup(6; 8)$. Ответ: $(-\infty; 3{,}5)\cup(6; 8)$.
2. $5^{x+1}+5^x+5^{x-1}=31$; $6{,}2\cdot5^x=31$; $5^x=5$; x=1. Ответ: 1.

3. $2\sin(\frac{\pi}{3}-x)=1$; $\sin(\frac{\pi}{3}-x)=\frac{1}{2}$; $\frac{\pi}{3}-x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$;

$x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-\pi k$, $k\in Z$. Ответ: $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-\pi k$, $k\in Z$.

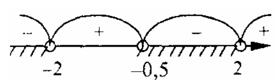
4. а) $D(f)=[-3{,}5; 4{,}5]$; f(x)=0 при x=1,2 и x=3,7;
в) функция возрастает на промежутках $[-3{,}5\ -1]$ и $[2{,}5; 4{,}5]$;
функция убывает на промежутке $[-1; 2{,}5]$;
г) $\max f(x)=f(4{,}5)=6$, $\min f(x)=f(2{,}5)=-2{,}5$;
д) $f(x)<-2$ при $-1{,}9<x<3$.

5. $f(x)=x^3-3x^2+x-1$; $F(x)=\frac{1}{4}x(x^3-4x^2+2x-4)+C$.

Ответ: $\frac{1}{4}x(x^3-4x^2+2x-4)+C$.

Вариант 3.

1. $\frac{x^2-4}{2x+1}<0$; $\frac{(x-2)(x+2)}{2x+1}<0$.



Пусть $f(x)=\frac{(x-2)(x+2)}{2x+1}$.

f(x) определена на $(-\infty; -0{,}5)\cup(-0{,}5; \infty)$; f(x)=0 при x=−2, x=2.
$x\in(-\infty; -2)\cup(-0{,}5; 2)$. Ответ: $(-\infty; -2)\cup(-0{,}5; 2)$.

2. $27^{1-x}=\frac{1}{81}$; $(3^3)^{1-x}=3^{-4}$; $3^{3-3x}=3^{-4}$; $3-3x=-4$; $3x=7$; $x=2\frac{1}{3}$.

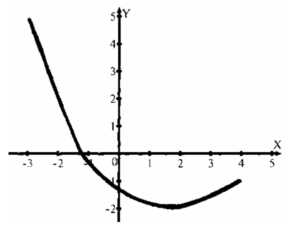
Ответ: $2\frac{1}{3}$.

3. $\cos(2\pi-x)+\sin(\frac{\pi}{2}+x)=\sqrt{2}$; $\cos x+\cos x=\sqrt{2}$; $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$.

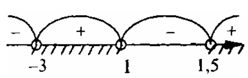
Ответ: $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$.

4.



5. $f(x)=e^x(x^2+1)$; $f'(x) = (e^x)'(x^2+1) + e^x(x^2+1)' = e^x(x^2+1) + 2xe^x =$
$= e^x(x^2+2x+1) = e^x(x+1)^2$. Ответ: $e^x(x+1)^2$.

Вариант 4.



1. $\frac{x^2+2x-3}{2x-3}>0$; $\frac{(x+3)(x-1)}{2x-3}>0$.

Пусть $f(x)=\frac{(x+3)(x-1)}{2x-3}$.

$f(x)$ определена на $(-\infty;\ 1,5)\cup(1,5;\ \infty)$; $f(x)=0$ при $x=-3$, $x=1$.
$x\in(-3;\ 1)\cup(1,5;\ \infty)$. Ответ: $(-3;\ 1)\cup(1,5;\ \infty)$.

2. $\log_{0,5}(2-x)>-1$; $\log_{0,5}(2-x)>\log_{0,5}2$;

($y=\log_{0,5}t$, $t>0$ – функция убывающая); $\begin{cases}2-x>0,\\ 2-x<2;\end{cases}$ $\begin{cases}x<2,\\ x>0;\end{cases}$ $0<x<2$.

Ответ: $(0;\ 2)$.

3. $(1+\mathrm{tg}\alpha)(1+\mathrm{ctg}\alpha)-\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=2$;

$(1+\mathrm{tg}\alpha)(1+\mathrm{ctg}\alpha)-\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha\cos\alpha}-\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=2$.

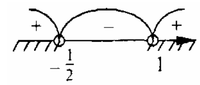
4. Угловой коэффициент k касательной, проведенной к графику функции $f(x)=3x^3+2x-5$ в точке с абсциссой $x=2$, есть $k=f'(2)$:
$f'(x)=9x^2+2$, $f'(2)=9\cdot4+2=38$; $k=38$. Ответ: 38.

5. $f(x)=4+6x^2$; $F(x)=4x+6\cdot\frac{x^3}{3}+C$; $F(x)=4x+2x^3+C$;

$x=2$; $F(2)=4\cdot2+2\cdot2^3+C=24+C$; $24+C<0$; $C<-24$.
Например, $C=-25$, тогда $F(x)=4x+2x^3-25$.
Ответ: $F(x)=4x+2x^3-25$.

Вариант 5.

1. y=lg $\frac{2x+1}{x-1}$; $\begin{cases} x \neq 1, \\ \frac{2x+1}{x-1} > 0. \end{cases}$



Решим неравенство $\frac{2x+1}{x-1} > 0$.

$(-\infty; -\frac{1}{2})\cup(1; \infty)$. Ответ: $(-\infty; -\frac{1}{2})\cup(1; \infty)$..

2. $8^{2x+1}>0{,}125$; $8^{2x+1}>\frac{1}{8}$; $8^{2x+1}>8^{-1}$;

($y = 8^t$ – функция возрастающая); $2x+1 >-1$, $x>-1$. Ответ: $(-1; \infty)$.

3. $2\sin(x+\frac{\pi}{2})+\sqrt{2}=0$; $2\cos x + \sqrt{2} = 0$; $\cos x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$,

$x=\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$. Ответ: $\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$.

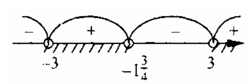
4. $f(x) = 2x^2 + \text{tg}\, x$; $f'(x) = 4x + \frac{1}{\cos^2 x}$. Ответ: $4x + \frac{1}{\cos^2 x}$.

5. $S=\int_{-1}^{2}(x^2+5x+6)dx =(\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}+6x)\Big|_{-1}^{2} =$

$=(\frac{8}{3}+10+12)-(-\frac{1}{3}+\frac{5}{2}-6)=28{,}5$. Ответ: 28,5.

Вариант 6.

1. $\frac{54-6x^2}{4x+7}<0$; $\frac{6(x^2-9)}{4x+7}>0$.



Пусть $f(x)=\frac{6(x^2-9)}{4x+7}$ определена на $(-\infty; -1\frac{3}{4})\cup(-1\frac{3}{4}; \infty)$;

$f(x) = 0$ при $x = -3$ и $x = 3$. $x \in (-3; -1\frac{3}{4})\cup(3; \infty)$.

Ответ: $x \in (-3; -1\frac{3}{4})\cup(3; \infty)$.

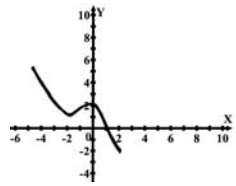
2. $3^x-(\frac{1}{3})^{2-x}=24$; $3^x-3^{x-2}=24$, $3^x-\frac{1}{9}\cdot 3^x=24$, $\frac{8}{9}\cdot 3^x=24$, $3^x=3^3$, $x=3$;

или $3^{x-2}(3^2-1)=24$; $3^{x-2}\cdot 8=24$; $3^{x-2}=3$; $x-2=1$; $x=3$. Ответ: 3.

3. $\cos x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi + x) = 0$; $\cos x + \sin x - \cos x = 0$;

$\sin x = 0$, $x = \pi k$, $k \in Z$. Ответ: πk, $k \in Z$.

4.



5. Абсциссы точек касания найдем из уравнения $f'(x_0)=0$:

$5x_0^4-10x_0=0$; $5x_0(x_0^3-2)=0$; $x_0=0$ или $x_0=\sqrt[3]{2}$.

Найдем ординаты точек касания: $f(0)=1$, $f(\sqrt[3]{2})=(\sqrt[3]{2})^5-$

$-5(\sqrt[3]{2})^2+1)=(\sqrt[3]{2})^2(\sqrt[3]{2^3}-5)+1=\sqrt[3]{4}(2-5)+1=1-3\sqrt[3]{4}$.

Имеем $A(0; 1)$, $B(\sqrt[3]{2}; 1-3\sqrt[3]{4})$. Ответ: $(0; 1)$, $(\sqrt[3]{2}; 1-3\sqrt[3]{4})$.

Вариант 7.

1. $9^{\frac{3}{2}} + 27^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} + (3^3)^{\frac{2}{3}} - (2^{-4})^{-\frac{3}{4}} = 3^3+3^2-2^3=28$.

2. $\log_4(7-x) < 3$. Неравенство равносильно системе:

$\begin{cases} 7-x>0, \\ 7-x<4^3; \end{cases}$ $\begin{cases} x<7, \\ x>-57; \end{cases}$ $-57<x<7$. Ответ: $(-57; 7)$.

3. $(\sin x+\cos x)^2=1+\sin x\cos x$; $\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=1+\sin x\cos x$;

$\sin x\cos x = 0$; $\frac{1}{2}\sin 2x = 0$; $\sin 2x = 0$; $2x = \pi n$, $n\in Z$, $x=\frac{\pi}{2}n$, $n\in Z$.

$\begin{cases} x=\frac{\pi}{2}n, n \ni z \\ 0\le x\le 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{\pi}{2} \\ x=\pi \\ x=\frac{3\pi}{2} \\ x=2\pi \end{cases}$ Ответ: 0; $\frac{\pi}{2}$; π; $\frac{3}{2}\pi$; 2π.

4. а)D(f)=[–3,5; 6];
б) –2,5 ≤f(x) ≤ 1,5 при x∈ [–3,5; –2,7] и [–0,5; 0,8]∪[3; 3,75];
в) f'(x) > 0 – (–3,5; –1,5) и (2; 6); f'(x) < 0 – x∈(–1,5; 2);
г) x_{max}=–1,5, x_{min}=2; д) min f(x) =f(2)=–3,5; max f(x) =f(6) = 5,5.
5. $F'(x)=(x^3-3x+1)'=3x^2-3=3(x^2-1)=f(x)$. Ответ: является.

Вариант 8.

1. $25^{1,5}+(0,25)^{-0,5}-81^{0,75}$;

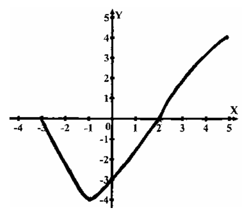
$(5^2)^{1,5}+(0,5^2)^{-0,5}-(3^4)^{\frac{3}{4}}=5^3+2-27=100$; Ответ: 100.

2. $\log_9(4-3x)>0,5$; $\begin{cases}4-3x>0,\\4-3x>9^{0,5};\end{cases}$ 4–3x>3; x< $\frac{1}{3}$. Ответ: (–∞; $\frac{1}{3}$).

3. $\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\sin(-\frac{\pi}{4})$; $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, k∈Z.

Ответ: $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, k∈Z.

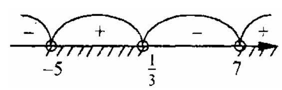
4.



5. $S=5t-0,5t^2$; v=S′(t), S′= 5 – t, v(2) = 5 – 2 = 3 (м/с). Ответ: 3 м/с.

Вариант 9.

1. $\frac{(x+5)(x-7)}{3x-1}>0$.

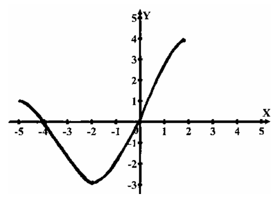


Пусть $f(x)=\frac{(x+5)(x-7)}{3x-1}$;

f(x) определена на (–∞; $\frac{1}{3}$)∪($\frac{1}{3}$; ∞), f(x) = 0 при x = –5 и x = 7.

x∈(–5; $\frac{1}{3}$)∪ (7; ∞). Ответ: (–5; $\frac{1}{3}$)∪ (7; ∞).

2. $3^{x+2} - 5\cdot 3^x = 36$; $9\cdot 3^x - 5\cdot 3^x = 36$; $4\cdot 3^x = 36$, $3^x = 3^2$, $x = 2$.
Ответ: 2.
3. $(\sin x + 1)^2 = \sin^2 x + 1$; $\sin^2 x + 2\sin x + 1 = \sin^2 x + 1$; $2\sin x = 0$;
$x = \pi n$, $n\in Z$. Если $0 \le \pi n \le 2\pi$, то $0 \le n \le 2$, тогда $x = 0$; $x = \pi$; $x=2\pi$.
Ответ: 0; π; 2π.
4.



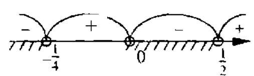
5. $f(x)=x^2-5$; $F(x)=\frac{x^3}{3}-5x+C$. $4=\frac{3^3}{3}-5\cdot 3+C$, $4=-6+C$, $C=10$,

$F(x)=\frac{x^3}{3}-5x+10$. Ответ: $\frac{x^3}{3}-5x+10$.

Вариант 10.

1. $\frac{2x+8x^2}{2x-1}<0$. Пусть $f(x)=\frac{2x(4x+1)}{2x-1}$;

$f(x)$ – определена на $(-\infty; 0,5)\cup(0,5; \infty)$; $f(x)=0$, при $x=-\frac{1}{4}$ и $x=0$.



$x\in(-\infty; -\frac{1}{4})\cup(0; \frac{1}{2})$

Ответ: $(-\infty; -\frac{1}{4})\cup(0; \frac{1}{2})$.

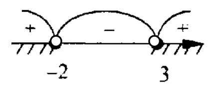
2. $\log_7(x-1)\le\log_7 2+\log_7 3$;

$\begin{cases}\log_7(x-1)\le\log_7 6,\\ x-1>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x-1\le 6,\\ x>1;\end{cases}$ $\begin{cases}x\le 7,\\ x>1;\end{cases}$ $1<x\le 7$. Ответ: (1; 7].

3. $2\cos x+\sqrt{2}=0$; $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$.

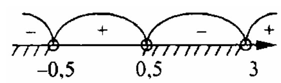
Из этих корней только корни $\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{5\pi}{4}$ $\in[0,2\pi]$. Ответ: $\frac{3}{4}\pi$; $\frac{5}{4}\pi$.

4. а) D(f)=[−3;5,5]; б) y= 0 при x = 0,7 и x =4,3;
в) функция возрастает на промежутках [−1,5; −0,5] и [2; 5,5];
функция убывает на промежутках [−3; −1,5] и [−0,5; 2];
г) max f{x)=f(−3) = 5,5 ; min f(x)=f(2)=−2,5;
д) касательные параллельны оси абсцисс в точках экстремума: (−1,5; 3) и (2; −2,5).



5. $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x$;
$y' = 6x^2 - 6x - 36$; $6x^2 - 6x - 36 > 0 \mid : 6$;
$x^2 - x - 6 > 0$; $(x + 2)(x - 3) > 0$;
Ответ: возрастает на $(-\infty; -2]$ и на $[3; \infty)$.

Вариант 11.



1. $\dfrac{8x^2-2}{3-x} > 0$; $\dfrac{2(4x^2-1)}{x-3} < 0$.

Пусть f(x)= $\dfrac{2(4x^2-1)}{x-3}$;

f(x) – определена на $(-\infty; 3)\cup(3; \infty)$. f(x)=0 при x = −0,5 и x = 0,5.
$x \in (-\infty; -0{,}5)\cup(0{,}5; 3)$. Ответ: $(-\infty; -0{,}5)\cup(0{,}5; 3)$.

2. $36\cdot 216^{3x+1} = 1$; $6^2\cdot 6^{3(3x+1)} = 1$; $6^{2+9x+3} = 1$;

$9x+5=0$, $x = -\dfrac{5}{9}$. Ответ: $-\dfrac{5}{9}$.

3. $\sin(\pi + x) - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{3}$; $-\sin x - \sin x = \sqrt{3}$;

$\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $x = (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$; Ответ: $(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$.

4. $f(x) = x - \ln x$; $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$; $k = f(3) = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$. Ответ: $\dfrac{2}{3}$.

5. $S = \int\limits_{-2}^{-1}(x^2 - 6x + 8)dx = \left(\dfrac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x\right)\Big|_{-2}^{-1} =$

$= \left(-\dfrac{1}{3} - 3 - 8\right) - \left(-\dfrac{8}{3} - 12 - 16\right) = 19\dfrac{1}{3}$. Ответ: $19\dfrac{1}{3}$.

Вариант 12.

1. $\dfrac{8x^2-2x}{3-6x} > 0$; $\dfrac{2x(4x-1)}{3(2x-1)} < 0$. Пусть $f(x) = \dfrac{2x(4x-1)}{3(2x-1)}$;

f(x) определена на $(-\infty; 0{,}5)\cup(0{,}5; \infty)$; $f(x) = 0$ при $x = 0$; $x = \frac{1}{4}$.

Решим неравенство методом интервалов:

Ответ: $x\in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$.

2. $2\log_3 2 - \log_3(x-1) = 1+\log_3 5$; $x-1 > 0$;

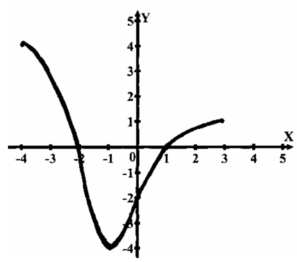
$\log_3 4 - \log_3(x-1) = \log_3 3 + \log_3 5$; $\log_3 \frac{4}{x-1} = \log_3 15$;

$\frac{4}{x-1} = 15$, $15x-15=4$, $x=1\frac{4}{15}$. Ответ: $1\frac{4}{15}$.

3. $2\cos \frac{x}{4} - \sqrt{3} = 0$; $\cos \frac{x}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{x}{4} = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k\in Z$;

$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 8\pi k$, $k\in Z$. Ответ: $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 8\pi k$, $k\in Z$.

4.



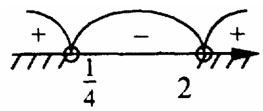
5. $f(x)=\frac{1}{3}x^3+5x^2-1$; $f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3+5x^2-1\right)' = x^2+10x$;

$x^2+10x=0$; $x_1=0$, $x_2=-10$. $y_1=-1$, $y_2=165\frac{2}{3}$.

Ответ: $(0; -1)$, $(-10; 165\frac{2}{3})$.

Вариант 13.

1. y=lg $\frac{x-2}{4x-1}$; $\begin{cases} \frac{x-2}{4x-1} > 0, \\ 4x-1 \neq 0 \end{cases}$



Ответ: (–∞; ¼)∪(2; ∞).

2. $100^{2x+1}<0{,}1$; $10^{2(2x+1)}<10^{-1}$; $4x\cdot+2<-1$, $x<-\frac{3}{4}$. Ответ: $(-\infty; -\frac{3}{4})$.

3. $4\cos^2x-1 = 0$; $2\cos^2x = \frac{1}{2}$; $1+\cos 2x = \frac{1}{2}$; $\cos 2x =-\frac{1}{2}$;

$2x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2\pi k$, $k\in Z$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k\in Z$. Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k\in Z$.

4. а) D(f)=[–3,5; 6]; б) x =–1,5;
в) f'(x)<0 при x∈(–3,5; –1,5) и x∈(2,5;6); f'(x)>0 при x∈(–1,5; 2,5);
г) max f(x)=f(2,5)=4,5; min f(x)=f(–1,5)=–3; д) в точке (2,5; 4,5).
5. $f(x)=x^3-3x^2+x-1$;

$F(x)=\frac{x^4}{4}-x^3+\frac{x^2}{2}-x+C=\frac{1}{4}(x^4-4x^3+2x^2-4x)+C.$

Ответ: $\frac{1}{4}(x^4-4x^3+2x^2-4x)+C$.

Вариант 14.

1. $9^{1,5} - 81^{0,5} - (0,5)^{-2} = (3^2)^{1,5} - (9^2)^{0,5} - 2^2 = 27 - 9 - 4 = 14.$
Ответ: 14.

2. $\log_2(1-2x)<0$; $\begin{cases} 1-2x<1, \\ 1-2x>0; \end{cases}$ $\begin{cases} x>0, \\ x<0{,}5; \end{cases}$ 0<x<0,5. Ответ: (0; 0,5).

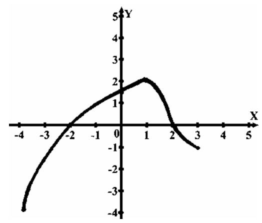
3. $\sin x=-\frac{15}{17}$, $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$;

С учетом условия $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$: $\cos x = -\sqrt{1-\sin^2 x}$;

$\cos x=-\sqrt{1-(-\frac{15}{17})^2}$; $\cos x=-\sqrt{\frac{32}{17}\cdot\frac{2}{17}} =-\frac{8}{17}$.

Ответ: $-\frac{8}{17}$.

4.



5. $f(x) = 4x^3 - x^2 + 2$; $F(x) = x^4 - \frac{x^3}{3} + 2x + C$;

$F(1) = 1 - \frac{1}{3} + 2 + C = 2\frac{2}{3} + C$; $F(1) < 0$, при $C < -2\frac{2}{3}$, например,

$C = -3$, т.е. $F(x) = x^4 - \frac{x^3}{3} + 2x - 3$. Ответ: $x^4 - \frac{x^3}{3} + 2x - 3$.

Вариант 15.

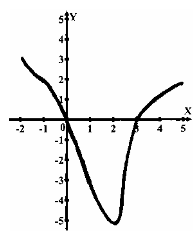
1. $16^{\frac{5}{4}} - (\frac{1}{9})^{-\frac{1}{2}} + 27^{\frac{2}{3}} = (2^4)^{\frac{5}{4}} - ((\frac{1}{3})^2)^{-\frac{1}{2}} + (3^3)^{\frac{2}{3}} = 32 - 3 + 9 = 38.$

2. $\frac{1}{27} \le 3^{2-x} < 27$; $3^{-3} \le 3^{2-x} < 3^3$, т.к. $3 > 1$, то $-3 \le 2 - x < 3$; $-5 \le -x < 1$;

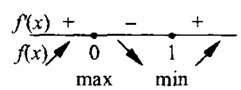
$-1 < x \le 5$. Целые решения неравенства: $x = 0; 1; 2; 3; 4; 5$.
Ответ: 0; 1; 2; 3; 4; 5.

3. $\cos^2 x + \cos x = -\sin^2 x$; $\cos^2 x + \sin^2 x + \cos x = 0$;
$1 + \cos x = 0$; $\cos x = -1$, $x = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$. Ответ: $\pi + 2\pi k$, $k \in Z$.

4.



5. $f(x)=2x^3-3x^2-1$; $D(f)=R$;
$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$;
$f'(x) = 0$, при $x = 0$ и $x = 1$;
$x = 0$ и $x = 1$ – точки экстремума.
Ответ: 0 и 1.



Вариант 16.

1. $a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{5}{3}} a^{\frac{1}{6}} b^{-\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} b^{\frac{5}{3}-\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{2}}$. Ответ: $a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{2}}$.

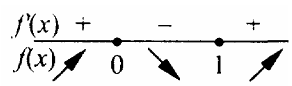
2. $\log_2(2x+1)>4$; $\log_2(2x+1)> \log_2 16$. $\begin{cases} 2x+1>16, \\ 2x+1>0; \end{cases}$ $x>7{,}5$.

Ответ: $(7{,}5; \infty)$.

3. $\cos(\frac{\pi}{2}+x)=\cos\frac{\pi}{6}$; $-\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in Z$. Ответ: $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in Z$.

4. $D(f)=R$;
$f'(x) = 6x^2-6x=6x(x-1)$;
$f'(x)=0$ при $x = 0$ и $x=1$;
Функция возрастает на промежутках $(-\infty; 0]$ и $[1, \infty)$. Ответ: $(-\infty; 0]$ и $[1; \infty)$.



5. $f(x) =4-x^2$; $F(x)=4x-\frac{x^3}{3}+C$; $4\cdot(-3)-\left(\frac{-27}{3}\right)+C=10$,

$-12+9+C=10$, $C=13$. $F(x)=4x-\frac{x^3}{3}+13$. Ответ: $F(x)=4x-\frac{x^3}{3}+13$.

Вариант 17.

1. $\frac{4x-x^2}{3+2x}\le 0$; $\frac{x(x-4)}{2x+3}\ge 0$. Пусть $f(x) = \frac{x(x-4)}{2x+3}$.
$f(x)$ определена на $(-\infty; -1{,}5)\cup(-1{,}5; \infty)$; $f(x) = 0$ при $x = 0$ и $x= 4$.
Решим неравенство методом интервалов:

Ответ: $(-1{,}5; 0]\cup[4; \infty)$.

2. $\log_3(2x+1)=\log_3 13+1$;

$\begin{cases}\log_3(2x+1)=\log_3 13+\log_3 3,\\ 2x+1>0;\end{cases}$ $\begin{cases}\log_3(2x+1)=\log_3 39,\\ x>-0,5;\end{cases}$

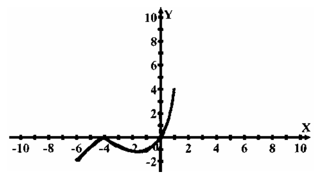
$\begin{cases}2x+1=39,\\ x>-0,5;\end{cases}$ $\begin{cases}x=19,\\ x>-0,5;\end{cases}$ x=19. Ответ: 19.

3. $2\sin x+\sqrt{3}=0$; $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in Z$.

$x=\pi+\pi/3$ или $x=2\pi-\pi/3$

$x=4\pi/3$ $x=5\pi/3$. Ответ: $\frac{4}{3}\pi$; $\frac{5}{3}\pi$.

4.



5. $f(x)=2x^2+3$; $F(x)=\frac{2}{3}x^3+3x+C$; $F(-2)=-5$;

$\frac{2}{3}\cdot(-2)^3-6+C=-5$; $C=\frac{19}{3}$. Ответ: $\frac{2}{3}x^3+3x+\frac{19}{3}$.

Вариант 18.

1. $\frac{4x-9x^2}{10-x}\geq 0$; $\frac{x(9x-4)}{x-10}\geq 0$. Пусть $f(x)=\frac{x(9x-4)}{x-10}$;

$f(x)$ определена на $(-\infty; 10)\cup(10; \infty)$; $f(x)=0$ при $x=0$ и $x=\frac{4}{9}$.

Решим неравенство методом интервалов:

Ответ: $(0; \frac{4}{9}]\cup(10; \infty)$.

2. $\begin{cases} \log_{0,5}(3x-1) = \log_{0,5} 8, \\ 3x-1>0; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x-1=8, \\ 3x-1>0; \end{cases}$ x=3. Ответ: 3.

3. 2cos x + $\sqrt{3}$ = 0, [0; 2π]; cos x = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = \pi \pm \frac{\pi}{6}$

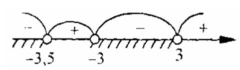
Ответ: $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{6}$.

4. а) D(f) = [–3,5; 6]; б) f(x) > 2 при x∈(–1; 2,5)∪(5,5; 6);
в) функция возрастает на промежутках [–3,5; 1] и [4; 6];
функция убывает на промежутке [1; 4]; г) f'(x)=0 при x=1 и x=4;
д) max f(x) =f(1)=4,5; min f(x)=f(–3,5)=–4.5.

5. $y=2x^3+9x^2-24x$;
$y'=6x^2+18x-24$; $x^2+3x-4\le 0$; $(x-1)(x+4)\le 0$.
$-4\le x\le 1$. Ответ: [–4; 1].

Вариант 19.

1. $\frac{3x^2-27}{2x+7}<0$; $\frac{3(x+3)(x-3)}{2x+7}<0$.



Пусть f(x)= $\frac{3(x+3)(x-3)}{2x+7}$;

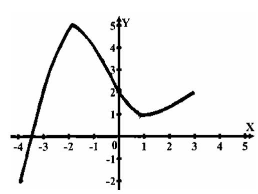
f(x) определена на (–∞; –3,5)∪(–3,5; ∞); f(x)=0 при x=–3 и x = 3.
x∈(–∞; –3,5)∪(–3; 3). Ответ: (–∞; –3,5)∪(–3; 3).

2. $49^{x+1}=(1/7)^x$; $7^{2(x+1)}=7^{-x}$, 2x+2=–x, x=–2/3. Ответ: –2/3.

3. cos x+ sin ($\frac{\pi}{2}$ –x)+ cos (π +x)=0; cos x + cos x – cos x =0;

cos x=0, x= $\frac{\pi}{2}$ +πk, k∈Z. Ответ: $\frac{\pi}{2}$ +πk, k∈Z.

4.



5. v = S′(t), S′ = 1 + t, v(4) = 1 + 4 = 5 (м/с). Ответ: 5 м/с.

Вариант 20.

1. $\dfrac{x^2-3x+5}{x-1}>0$. Решим уравнение $x^2 - 3x + 5 = 0$.

$D=9-4\cdot5=-11$. $x^2 - 3x + 5 > 0$. т.к. $D<0$. Тогда неравенство $\dfrac{x^2-3x+5}{x-1}>0$ равносильно неравенству $x-1>0$, $x>1$. Ответ: $(1; \infty)$.

2. $\log_5(3x+1)<2$; $\begin{cases}\log_5(3x+1)<\log_5 25,\\ 3x+1>0;\end{cases}$ $\begin{cases}3x+1<25,\\ x>-\dfrac{1}{3};\end{cases}$ $\begin{cases}x<8,\\ x>-\dfrac{1}{3};\end{cases}$

$-\dfrac{1}{3}<x<8$. Ответ: $(-\dfrac{1}{3}; 8)$.

3. $\cos x=\dfrac{8}{17}$, $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$. Учитывая условие $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$,

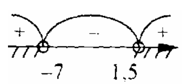
имеем: $\sin x = -\sqrt{1-\cos^2 x}$; $\sin x=-\sqrt{1-(\dfrac{8}{17})^2}=-\dfrac{3\cdot5}{17}=-\dfrac{15}{17}$.

Ответ: $-\dfrac{15}{17}$.

4. $f'(x) = 6x + 18$; $f'(x)=0$ при $x = -3$ на отрезке $[-5; -1]$.
$x=-5$, $y=-8$; $x=-3$, $y=-20$; $x=-1$, $y=-8$. Ответ: -20.

5. $f(x)=x + 5$; $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+5x+C$. Ответ: $\dfrac{x^2}{2}+5x+C$.

Вариант 21.



1. $y = \lg\dfrac{2x-3}{x+7}$; $\begin{cases}\dfrac{2x-3}{x+7}>0,\\ x+7\neq0;\end{cases}$

$x\in(-\infty; -7)\cup(1,5; \infty)$. Ответ: $(-\infty; -7)\cup(1,5; \infty)$.

2. $27^{1+2x}>(\dfrac{1}{9})^{2+x}$; $3^{3(1+2x)}>3^{-2(2+x)}$, $3+6x>-4-2x$; $8x>-7$; $x>-\dfrac{7}{8}$.

Ответ: $(-0,875; \infty)$.

3. $7\cos(x-\dfrac{3\pi}{2})+5\sin x+1=0$; $-7\sin x + 5\sin x + 1=0$;

$\sin x=\dfrac{1}{2}$, $x=(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$. Ответ: $(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$.

4. а) D(f)= [–3,5; 5]; б) $-2 < f(x) \le 1$ при $x \in [-3,1; 0] \cup [2,1; 3,5)$;
в) функция возрастает на промежутке [–2; 1];
функция убывает на промежутках [–3,5; –2] и [1; 5];
г) f(x) = 0 при x = –2; д) max f(x)=f(1)=5,5; min f(x)=f(5)= –3.
5. f(x) =3x–5;

F(x)= $\frac{3x^2}{2}$ – 5x+C; $\frac{3(4)^2}{2}$ –5·4+C=10; 24–20+C=10; C=6.

Ответ: F(x)=$1,5x^2$–5x+6.

Вариант 22.

1. $a^{\frac{5}{6}}\ b^{\frac{7}{12}}\ a^{-\frac{3}{4}}\ b^{-\frac{2}{3}} = a^{\frac{5}{6}-\frac{3}{4}}\ b^{\frac{7}{12}-\frac{2}{3}} = a^{\frac{10-9}{12}}\ b^{\frac{7-8}{12}} = a^{\frac{1}{12}}\ b^{-\frac{1}{12}}$.

Ответ: $a^{\frac{1}{12}}\ b^{-\frac{1}{12}}$.

2. $\log_5(4x+1) > -1$;

$\begin{cases} \log_5(4x+1) > \log_5\frac{1}{5}, \\ 4x+1>0; \end{cases}$ $\begin{cases} 4x+1>0,2, \\ 4x+1>0; \end{cases}$ 4x>–0,8; x>–0,2.

Ответ: (– 0,2; ∞).

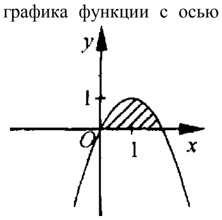
3. tgx–ctg($\frac{\pi}{2}$ +x)+2=0; tgx + tgx + 2 = 0; tgx = –1. x=– $\frac{\pi}{4}$ +πk, k∈Z.

Отрезку [0; 2π] принадлежат x= $\frac{3\pi}{4}$ (k=1) и x= $\frac{7\pi}{4}$ (k=2).

Ответ: $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$.

4. f(x)=$2x^2$–x+ 1; f'(x) = 4x–1. 4x – 1=7; x=2; f(2)=7. Ответ: (2; 7).
5. f(x)=$2x-x^2$.
Найдем абсциссы точек пересечения графика функции с осью абсцисс: $2x-x^2=0$; $x_1=0$ или $x_2=2$.

$S = \int_0^2 2x - x^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^3\Big|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$



Ответ: $\frac{4}{3}$.

Вариант 23.

1. $a^{-\frac{9}{2}} b^{\frac{1}{12}} : a^{-\frac{19}{4}} b^{\frac{1}{3}} = a^{-\frac{9}{2}+\frac{19}{4}} \cdot b^{\frac{1}{12}-\frac{1}{3}} = a^{\frac{19-18}{4}} b^{\frac{1-4}{12}} = a^{\frac{1}{4}} b^{-\frac{1}{4}}$.

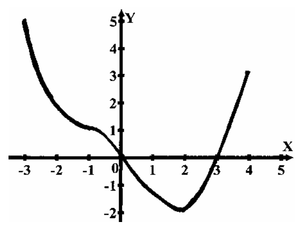
Ответ: $a^{\frac{1}{4}} b^{-\frac{1}{4}}$.

2. $0{,}2 \le 5^{x+4} \le 125$; $5^{-1} \le 5^{x+4} \le 5^3$, $5 > 1$, следовательно,
$-1 \le x+4 \le 3$; $-5 \le x \le -1$. Ответ: -5; -4; -3; -2; -1.

3. $(\sin x + \cos x)^2 - 1 = 0$, $[0; 2\pi]$; $1 + \sin 2x - 1 = 0$; $\sin 2x = 0, 2x = \pi k$;
Отрезку $[0,2\pi]$ принадлежат только корни: 0, $\pi/2$, π, $3\pi/2$, 2π

Ответ: 0; $\frac{\pi}{2}$; π; $\frac{3}{2}\pi$: 2π.

4.



5. $f(x) = 4\cos x + 3$, $x = -\frac{\pi}{3}$; $f'(x) = -4\sin x$; $k = f'(-\frac{\pi}{3})$;

$k = -4\sin(-\frac{\pi}{3}) = 4\sin\frac{\pi}{3} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$. Ответ: $2\sqrt{3}$.

Вариант 24.

1. $a^{\frac{3}{4}} b^{\frac{5}{24}} : a^{\frac{5}{12}} b^{-\frac{1}{8}} = a^{\frac{3}{4}-\frac{5}{12}} \cdot b^{\frac{5}{24}+\frac{1}{8}} = a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}}$. Ответ: $a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}}$.

2. $\log_{\frac{1}{5}}(2x+3) > -3$;

$\begin{cases} \log_{\frac{1}{5}}(2x+3) > \log_{\frac{1}{5}} 5^3, \\ 2x+3 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+3 < 125, \\ x > -1{,}5; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 61, \\ x > -1{,}5; \end{cases}$ $-1{,}5 < x < 61$.

Ответ: $(-1{,}5; 61)$.

3. $\sin(\pi + x) = \cos(-\frac{\pi}{3})$; $-\sin x = \frac{1}{2}$; $\sin x = -\frac{1}{2}$;

$x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$. Ответ: $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$.

4. $f'(x)=x^2-4$; $x^2-4=0$; $x_1=2$, $y_1=-3\frac{1}{3}$; $x_2=-2$, $y_2=7\frac{1}{3}$.

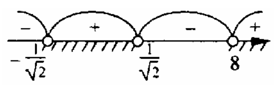
Ответ: $(2; -3\frac{1}{3})$, $(-2; 7\frac{1}{3})$.

5. $f(x)=x^4+3x$; $F(x)=\frac{x^5}{5}+3\frac{x^2}{2}+C$. Ответ: $\frac{x^5}{5}+3\frac{x^2}{2}+C$.

Вариант 25.

1. $\frac{2x^2-1}{x-8}>0$; $\frac{2(x-\frac{1}{\sqrt{2}})(x+\frac{1}{\sqrt{2}})}{x-8}>0$;

$x\in(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}})\cup(8;\infty)$.



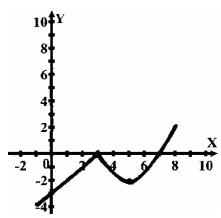
Ответ: $(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}})\cup(8;\infty)$.

2. $\log_{0,5}(2x)>2$;

$\begin{cases}\log_{0,5}(2x)>\log_{0,5}\frac{1}{4},\\ 2x>0;\end{cases}$ $\begin{cases}2x<\frac{1}{4},\\ x>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x<\frac{1}{8},\\ x>0;\end{cases}$ $0<x<\frac{1}{8}$. Ответ: $(0; \frac{1}{8})$.

3. $(\cos x-1)^2=\cos^2 x-1$; $\cos^2 x-2\cos x+1=\cos^2 x-1$:
$2\cos x=2$; $\cos x=1$; $x=2\pi n$, $n\in Z$. Ответ: $2\pi n$, $n\in Z$.

4.



5. y=sin x, y=x+1, y=e^x, y= $\sqrt{x}$;

а) y=sin x; y′= cos x; cos x > 0 не на всей области определения;
б) y=x+1; y′=1; 1>0 – на всей области определения $(-\infty;\infty)$;
в) y=e^x; y′=e^x; e^x>0 – на всей области определения $(-\infty;\infty)$;

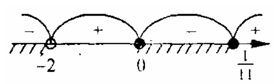
г) y= $\sqrt{x}$; y′= $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ >0 – на всей области определения $(0;\infty)$;

Ответ: y=x+1; y=e^x; y= $\sqrt{x}$.

Вариант 26.

1. $\frac{11x^2-x}{2+x}\le 0$; $\frac{x(11x-1)}{2+x}\le 0$. Пусть f(x)= $\frac{x(11x-1)}{2+x}$;

f(x) определена на $(-\infty;-2)\cup(-2;\infty)$;



f(x)=0 при x=0 и x= $\frac{1}{11}$;

$x\in(-\infty;-2)\cup[0;-\frac{1}{11}]$.

Ответ: $(-\infty;-2)\cup[0;-\frac{1}{11}]$.

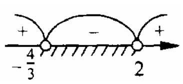
2. $\frac{1}{2}\log_2(3x-2)=3$;

$\begin{cases}\log_2(3x-2)=6,\\ 3x-2>0;\end{cases}$ $\begin{cases}\log_2(3x-2)=\log_2 64,\\ x>\frac{2}{3};\end{cases}$ $\begin{cases}3x-2=64,\\ x>\frac{2}{3};\end{cases}$ x=22.

3. sin $\frac{x}{2}$ +1=0; sin $\frac{x}{2}$ =–1, $\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, k∈Z; $x=-\pi+4\pi k$, k∈Z.

Ответ: $-\pi+4\pi k$, k∈Z.

4. а) D(f) =– [2,5; 6,5]; б) f(x)<1 при x∈(–1,5; 3,3);
в)f′(x)<0 при x∈(–2,5; 1,2); f′(x)>0 при x∈(1,2; 6,5);
г) касательные параллельны оси абсцисс в точке x=1,2;
д) max f{x)=f(–2,5)=4,5; min f(x)=f(1,2)=–2.

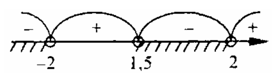


5. y =$-x^3+x^2+8x$; y′ =$-3x^2+2x+8$;
$-3x^2+2x+8>0$; $3x^2-2x-8<0$;
$3x^2-2x-8=0$; $\frac{D}{4}$ =1+24=25; $x_1=-\frac{4}{3}$;

x_2=2; Ответ: возрастает на $[-\frac{4}{3};2]$.

Вариант 27.

1. $\dfrac{4-x^2}{2x-3}>0$; $\dfrac{(x+2)(x-2)}{2x-3}<0$.



Пусть f(x) = $\dfrac{(x+2)(x-2)}{2x-3}$,

f(x) определена на $(-\infty;\ 1{,}5)\cup(1{,}5;\ \infty)$; f(x) = 0 при x = –2 и x = 2.
$x\in(-\infty;-2)\cup(1{,}5;\ 2)$. Ответ: $(-\infty;-2)\cup(1{,}5;\ 2)$.
2. $9\cdot 81^{1-2x}=27^{2-x}$; $3^2\cdot 3^{4(1-2x)}=3^{3(2-x)}$; $3^{2+4-8x}=3^{6-3x}$;
6–8x=6–3x; 5x=0; x=0.; Ответ: 0.

3. $\sin x + \sin(\pi+x) - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=1$; $\sin x - \sin x - 2\sin x = 1$;

$2\sin x = -1$; $\sin x = -\dfrac{1}{2}$; $x=(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$.

Ответ: $(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$.

4. а) D(y) = [–3,5; 4,5]; б) f(x)<–1 при 1,7 <x<3,1;
в) f(x) < 0 на промежутке (–1,5; 2,5);
f(x) > 0 на промежутках (–3,5; –1,5) и (2,5; 4,5);
г) касательные к графику параллельны оси абсцисс в точках x= –1,5 и x=2,5; д) max f(x) = f(4,5) = 6; min f(x)=f(2,5)=–1,5.

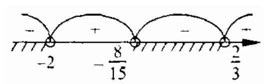
5. $f(x)=4x-x^2$; $F(x)=4\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}+C$. Ответ: $2x^2-\dfrac{x^3}{3}+C$.

Вариант 28.

1. $\dfrac{3x^2+4x-4}{8+15x}<0$. $3x^2+4x-4=0$.

$D = 16 + 4\cdot 12 = 64$, $x_{1,2}=\dfrac{-4\pm 8}{6}$, $x_1=-2$, $x_2=\dfrac{2}{3}$.

Пусть f(x)= $\dfrac{3(x+2)(x-\frac{2}{3})}{15(x+\frac{8}{15})}<0$;



f(x) определена на $\left(-\infty;\ -\dfrac{8}{15}\right)$ и $\left(-\dfrac{8}{15};\ \infty\right)$;

f(x) = 0 при x = –2 и $x = \frac{2}{3}$; $x\in(-\infty; -2)\cup(-\frac{8}{15}; \frac{2}{3})$.

Ответ: $(-\infty; -2)\cup(-\frac{8}{15}; \frac{2}{3})$.

2. $-\log_7(5-x)=\log_7 2-1$; $x<5$; $\log_7 2 + \log_7(5 - x) = \log_7 7$;
$2(5-x)=7$; $10-2x=7$; $x=1{,}5$ – удовлетворяет области определения.
Ответ: 1,5.

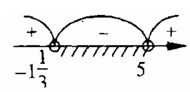
3. $\cos x=-\frac{5}{13}$, $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$. Учитывая условие, $\sin x = -\sqrt{1-\cos^2 x}$;

$\sin x=-\sqrt{1-(\frac{5}{13})^2}$; $\sin x=-\sqrt{\frac{18\cdot 8}{13^2}}=-\frac{3\cdot 4}{13}=-\frac{12}{13}$.

4. а) D(f) =[–3; 6]; б) f(x) > 1 при $x\in[-3; 0{,}5)\cup(5{,}3; 6)$;
в) функция возрастает на промежутке [3,25; 6];
функция убывает на промежутке [–3; 3,25];
г) касательная к графику параллельна оси абсцисс в точках x=3,25;
д) max f(x)= f(6)=5,5; min f(x)=f(3,25)=–2,5.
5. $F(x)=x^3+3x-5$; $f(x)=3(x^2+1)$. $F'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2+1) = f(x)$
Ответ: является.

Вариант 29.

1. $y= \ln\frac{3x+4}{5-x}$;



$\begin{cases}\frac{3x+4}{5-x}>0,\\ 5-x\neq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{3(x+\frac{4}{3})}{x-5}<0,\\ x\neq 5;\end{cases}$

Ответ: $(-1\frac{1}{3}; 5)$.

2. $(\frac{1}{4})^{2+3x}<8^{x-1}$; $2^{-2(2+3x)}<2^{3(x-1)}$; (2>1);

$-4-6x<3x-3$; $9x>-1$; $x>-\frac{1}{9}$. Ответ: $(-\frac{1}{9}; \infty)$.

3. $4\cos^2 x - 3 = 0$; $\cos^2 x=\frac{3}{4}$; $\cos x =\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$.

4. а) D(f) = [–3; 5,5]; б) f(x) < –1 при $x\in[-3; -2,3)\cup(2,25; 5,5]$;
в) функция возрастает на промежутке [–3;–1] и убывает на промежутке [–1; 5,5];
г) касательные к графику параллельны оси абсцисс в точках x=–1 и x=3,5; д) max f(x) =f(–1) = 3,5; min f(x) = f(–3) = –5.

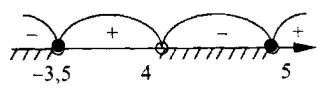
5. $f(x)=2x^3-\frac{1}{2}x^4-8$; $f'(x)=6x^2-2x^3$; $f'(x)=0$: $2x^2(3-x)=0$; $x=0$ или $x=3$.

Точка x = 3 – точка экстремума функции. Ответ: 3.

Вариант 30.

1. $\frac{(x-5)(2x+7)}{4-x}\geq 0$;

$\frac{(x-5)(2x+7)}{x-4}\leq 0$.



Пусть $f(x)=\frac{(x-5)(2x+7)}{x-4}$; f($x$) определена на $(-\infty; 4)\cup(4; \infty)$;

f(x)=0 при x=5 и x = –3,5; $x\in(-\infty; -3,5]\cup(4; 5]$.
Ответ: $(-\infty; -3,5]\cup(4; 5]$.
2. $7^{x+2}-14\cdot 7^x=5$; $49\cdot 7^x-14\cdot 7^x=5$; $35\cdot 7^x=5$; $7^x=7^{-1}$; $x=-1$.
Ответ: –1.

3. $\sin x=\frac{12}{13}$, $0<x<\frac{\pi}{2}$; $\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}=\sqrt{1-(\frac{12}{13})^2}$;

$\cos x=\frac{5\cdot 1}{13}$; $\cos x=\frac{5}{13}$. Ответ: $\frac{5}{13}$.
4. а) D(f) = [–3; 6];
б) f(x) <–1 при $x\in[-3;-1)\cup(3,2; 5)$;
в) функция возрастает на промежутках [–3; 1] и [4; 6], убывает на промежутке [1, 4];
г) касательные параллельны оси абсцисс в точках x=1 и x=4;
д) max f(x)=4; min f(x)=f(–3)=–4,5.
5. $S=3t+t^2$ (м); $v=S'(t)$; $S'(t)=3+2t$, $v=S'(3)=3+2\cdot 3=9$(м/с).
Ответ: 9 м/с.

Вариант 31.

1. $7^{0,5\log_7 9}=7^{\log_7 3}=3$. Ответ: 3.
2. $1\leq 7^{x-3}<49$; $7^0\leq 7^{x-3}<7^2$; $0\leq x-3<2$; $3\leq x<5$.
Множеству целых чисел принадлежат x=3 и x=4. Ответ: 3; 4.

3. $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin x+1$; $\sin x=2\sin x+1$; $\sin x=-1$;

$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$. Ответ: $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$.

4. а) $D(f)=[-3{,}5;\ 5]$; б) $f(x)>3{,}5$ при $x\in(-2{,}5;\ 0)\cup(4;\ 5)$;
в) $f'(x)<0$ на промежутке $(-1{,}5;\ 2{,}5)$;
$f'(x)>0$ на промежутках $(-3{,}5;\ -1{,}5)$ и $(2{,}5;\ 5)$.
г) касательная параллельна оси абсцисс в точке $x=-1{,}5$;
д) $\max f(x)=f(5)=6$; $\min f(x)=f(2{,}5)=-2$.
5. $f(x)=5+4x-3x^2$; $f'(x)=4-6x$;
$k=f'(x)=-5$: $4-6x=-5$, $x=1{,}5$; $f(1{,}5)=4{,}25$. Ответ: $(1{,}5;\ 4{,}25)$.

Вариант 32.

1. $\dfrac{(a^2b^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{9}{8}}}$ при $a=7$, $b=2$; $\dfrac{(a^2b^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{9}{8}}}=\dfrac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{8}}}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{9}{8}}}=\dfrac{1}{b}$. При $b=2$, $\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

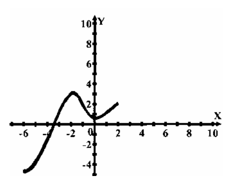
2. $2\lg 6-\lg x>3\lg 2$; $\begin{cases}\lg 36-\lg x>3\lg 2,\\ x>0;\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{36}{x}>8,\\ x>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x<4{,}5,\\ x>0;\end{cases}$

$0<x<4{,}5$. Ответ: $(0;\ 4{,}5)$.

3. $\cos(\pi+x)=\sin\frac{\pi}{2}$; $-\cos x=1$; $\cos x=-1$; $x=\pi+2\pi k,\ k\in Z$.

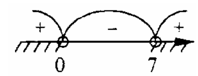
Ответ: $\pi+2\pi k,\ k\in Z$.

4.



5. $F(x)=x^4-3x^2+1$; $f(x)=4x^3-x^2+x$;
$F'(x)=4x^3-6x$. Т. к. $F'(x)\neq f(x)$, то функция $F(x)$ не является первообразной функции $f(x)$. Ответ: не является.

Вариант 33.



1. y = lg $(x^2 - 7x)$; $x^2 - 7x > 0$; $x(x - 7) > 0$;

Ответ: $(-\infty; 0)\cup(7; \infty)$.

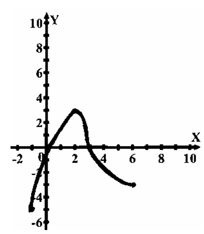
2. $\frac{1}{6} < 6^{3-x} \le 36$; $6^{-1} < 6^{3-x} \le 6^2$, т. к. 6>1;

$-1 < 3 - x \le 2$; $-4 < -x \le -1$; $1 \le x < 4$. Ответ: 1; 2; 3.

3. $\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} - \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - 1 + \sin^2\alpha}{\cos\alpha(1-\sin\alpha)} = \frac{1-1}{\cos\alpha(1-\sin\alpha)} = 0$;

Следовательно, $\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} = \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

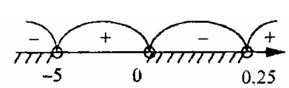
4.



5. $f(x) = 3 - 3x - 2x^2$; $f'(x) = -3 - 4x$;
$k = f'(x) = 5$; $-3 - 4x = 5$; $74x = -8$; $x = -2$; $f(-2) = 1$. Ответ: $(-2; 1)$.

Вариант 34.

1. $\frac{x^2 + 5x}{2 - 8x} > 0$; $\frac{x(x+5)}{2(4x-1)} < 0$.



Пусть f(x)= $\frac{x(x+5)}{2(4x-1)}$;

$f(x)$ определена на $(-\infty; 0,25)\cup(0,25; \infty)$; $f(x) = 0$ при $x = 0$ и $x = -5$.
Ответ: $(-\infty; -5)\cup(0; 0,25)$.

2. $\frac{1}{3}\log_3(2x+1) = 1$;

$\begin{cases}\log_3(2x+1) = \log_3 27, \\ 2x+1 > 0;\end{cases}$ $\begin{cases}2x+1 = 27, \\ x > -0,5;\end{cases}$ $\begin{cases}x = 13, \\ x > -0,5;\end{cases}$ $x = 13$.

3. $2\sin x+\sqrt{2}=0$; $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$.

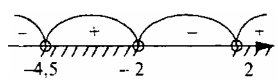
Из множества этих корней, только корни $x=\frac{5\pi}{4}$, и $x=\frac{7\pi}{4}$ принадлежат отрезку $[0;2\pi]$. Ответ: $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$.

4. а) D(f)=[–3; 6];
б) $f'(x)>0$ при $x\in(-3;\,0{,}7)\cup(4{,}5;\,6)$; $f'(x)<0$ при $x\in(0{,}7;\,4{,}5)$;
в) касательные параллельны оси абсцисс в точках x=0,7 и x = 4,5;
г) $f(x)\le-2$ при $-3\le x<-2$; д) max $f(x)$=f(0,7)=3; min $f(x)$=f(–3)=–4,5.

5. $f(x)=2x+x^2$; $F(x)=\frac{x^3}{3}+2\frac{x^2}{2}+C$; $F(x)=\frac{x^3}{3}+x^2+C$.

Ответ: $\frac{x^3}{3}+x^2+C$.

Вариант 35.



1. $\frac{24-6x^2}{2x+9}<0$;

$\frac{6(x+2)(x-2)}{2(x+4{,}5)}>0$.

Пусть $f(x)=\frac{6(x+2)(x-2)}{2(x+4{,}5)}$; $f(x)$ определена на $(-\infty;\,-4{,}5)\cup(-4{,}5;\,\infty)$;

$f(x)=0$ при $x=-2$ и $x=2$. $x\in(-4{,}5;\,-2)\cup(2;\,\infty)$.
Ответ: $(-4{,}5;\,-2)\cup(2;\,\infty)$.
2. $2^{x+4}-2^x=120$; $16\cdot2^x-2^x=120$; $2^x=8$; $2^x=2^3$; $x=3$. Ответ: 3.

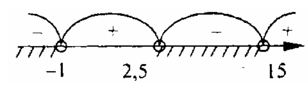
3. $\cos x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin(\pi-x)=0$; $\cos x-\cos x+\sin x=0$;

$\sin x=0$; $x=\pi k$, $k\in Z$. Ответ: πk, $k\in Z$.
4. а) D(f)=[–3; 5,5]; б) $f(x)\ge1{,}5$ на промежутках [–2; 0] и [4,4; 5,5];
в) $f'(x)>0$ на промежутках (–3; –1) и (2,5; 5,5),
$f'(x)<0$ на промежутке (–1; 2,5);
г) касательные параллельны оси абсцисс в точках x=–1 и x= 2,5;
д) max $f(x)$=f(5,5)=5,5; min $f(x)$=f(2,5)=–3.
5. $f(x)=3(x^2-2)$, $g(x)=3x(x^2-2)$, $q(x)=3x^2-6x+1$; $F(x)=x^3-3x^2+1$;
$F'(x)=3x^2-6x$.

Т.к. F′(x)≠f(x), F′(x)≠g(x) и F′(x)≠q(x), то ни для одной из приведенных функций функция F(x) не является первообразной.
Ответ: не является для данных функций.

Вариант 36.

1. $\frac{x^2-14x-15}{10-4x}>0$;



$\frac{x^2-14x-15}{4(x-2,5)}<0$.

Пусть $f(x)=\frac{x^2-14x-15}{4(x-2,5)}$;

f(x) определена на $(-\infty; 2,5)\cup(2,5; \infty)$. f(x)=0 при x=15 и x=–1;
Ответ: $(-\infty; -1)\cup(2,5; 15)$.

2. lg (x + 3) = 3 +2lg 5;

$\begin{cases} \lg(x+3)=\lg 1000+\lg 25, \\ x+3>0; \end{cases}$ $\begin{cases} x+3=25000, \\ x>-3; \end{cases}$ x=24997. Ответ: 24997.

3. $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}-\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha-1+\cos^2\alpha}{(1-\cos\alpha)\sin\alpha}=0$.

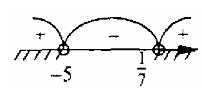
4. а) D(f) = [–2,5; 6,5]; б) f(x) ≤ 0,5 при $x\in[-1,5; 2,3]\cup[4,7; 6,5]$;
в) касательные параллельны оси абсцисс в точках x=1; 3,5.
г) промежуток возрастания – [1; 3,5];
промежутки убывания – [–2,5; 1] и [3,5; 6,5];
д) max f(x) = f(–2,5) = 4,5; min f(x)=f(1) = –2.

5. $f(x)=x-2x^3$; $F(x)=\frac{x^2}{2}-2\frac{x^4}{4}+C$; $F(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{2}+C$.

$3=\frac{0}{2}-\frac{0}{2}+C$; C=3. Ответ: $\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{2}+3$.

Вариант 37.

1. $y=\ln\frac{x+5}{7x-1}$; $\frac{x+5}{7x-1}>0$;



Ответ: $(-\infty; -5)\cup(\frac{1}{7}; \infty)$.

2. $8\cdot 2^{x-1}-2^x>48$; $4\cdot 2^x-2^x>48$; $2^x>16$; $2^x>2^4$; x > 4. Ответ: $(4; \infty)$.

3. $\sin^2 x - 6\sin x = 0$; $\sin x\,(\sin x - 6) = 0$;

$$\left[\begin{array}{ll}\sin x = 0, & (1)\\ \sin x - 6 = 0 & (2)\end{array}\right.$$

(2) – не имеет решений, т.к. $|\sin x| \le 1$;

(1): $x=\pi k$, $k\in Z$.

Ответ: πk, $k\in Z$.

4. а) D(f)=[– 3,5; 5]; б) $f(x)\le 0{,}5$ при $x\in[0{,}5; 2{,}6]$ и $x\in[3{,}8; 5]$;

в) точки экстремума функции: $x=-1{,}5$; 1,5;

г) промежутки возрастания: [–3,5; –1,5] и [1,5; 3,5];

промежутки убывания: [–1,5; 1,5] и [3,5; 5];

д) $\max f(x)=f(-1{,}5)=5{,}5$; $\min f(x)=f(5)=-3$.

5. $S=5t-0{,}5t^2$ (м); $v(t)=S'(t)$; $S'(t)=5-t$, $v(4)=S'(4)=5-4=1$(м/с).

Ответ: 1 м/с.

Вариант 38.

1. $6^{\frac{1}{3}}\cdot 18^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{\frac{1}{6}} = 6^{\frac{1}{3}}\cdot 6^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}=6$. Ответ: 6.

2. $\log_{0,1}x>-1$; $\begin{cases}\log_{0,1}x>\log_{0,1}10;\\ x>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x<10 \text{ (т.к. } a=0{,}1<1),\\ x>0;\end{cases}$ $0<x<10$.

Ответ: (0; 10).

3. $(1+\sin x)(1+\cos x) = 1+\sin x+\cos x$, $[0; 2\pi]$;

$1+\cos x+\sin x+\sin x\cos x = 1+\sin x+\cos x$; $\sin x\cos x = 0$.

Уравнение равносильно системе $\left[\begin{array}{l}\sin x = 0,\\ \cos x = 0;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=\pi k, k\in Z,\\ x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z.\end{array}\right.$

Из этих корней, отрезку $[0; 2\pi]$ принадлежат только корни: 0; $\dfrac{\pi}{2}$;

π; $\dfrac{3\pi}{2}$; 2π

4. а) D(f) = [–3; 6]; б) $f(x) \le 0$ при $x\in[-3; 0]\cup[2{,}5; 5{,}5]$;

в) касательные параллельны оси абсцисс в точках $x=-1{,}5$ и $x=4$;

г) функция возрастает на промежутках [–3; 1,5] и [4; 6], функция убывает на промежутке [1,5; 4];

д) $\max f(x)=f(1{,}5)=3{,}5$; $\min f(x)=f(-3)=-5$.

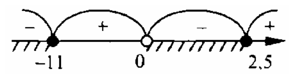
5. $S = 0{,}5t^2+3t+4$ (м);

$v(t) = S'(t)$; $S'(t) = t+3$, $v(2)=S'(2) = 5$ (м/с).

Ответ: 5 м/с.

Вариант 39.

1. $\frac{(x+11)(2x-5)}{3x} \le 0.$



Пусть f(x)= $\frac{(x+11)(2x-5)}{3x}$;

f(x) определена на $(-\infty, 0)\cup(0; \infty)$, f($x$)=0 при x=–11 и x=2,5.
Ответ: $(-\infty; -11]\cup(0; 2,5]$.
2. $10\cdot5^{x-1}+5^{x+1}=7$; $2 \cdot 5^x + 5 \cdot 5^x = 7$; $7 \cdot 5^x=7$; $5^x = 5^0$; $x = 0$.
Ответ: 0.

3. $2\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)= \sqrt{2}$; $2\sin x= \sqrt{2}$; $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x=(-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k\in Z$.

Ответ: $(-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k\in Z$.

4. а) D(f) = [–3,5; 5]; б) f(x) ≤ 0 при $x\in[-3; -0,4]\cup[2,5; 5]$;
в) точки экстремума функции: x = –1,5 и x = 1
г) функция возрастает на промежутке [–1,5; 1] и убывает на промежутках [–3,5; –1,5] и [1; 5];
д) max f(x)=f(1)=4,5; min f(x) = f(5) = –3.

5. $f(x)=tg(x)-2\sin x$; $x=-\frac{\pi}{4}$;

$f'(x)= \frac{1}{\cos^2 x} - 2\cos x$; $f'\left(-\frac{\pi}{4}\right)= \frac{1}{\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = 2-\sqrt{2}$. Ответ: $2-\sqrt{2}$.

Вариант 40.

1. $10^{\frac{1}{4}} \cdot 40^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} = 10^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} = 10$. Ответ: 10.

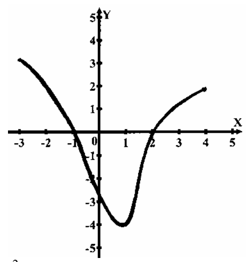
2. $\frac{1}{2}\lg 81 - \lg x > \lg 2$; $\begin{cases} \lg 9 - \lg x > \lg 2, \\ x > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{9}{x} > 2, \\ x > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 4,5, \\ x > 0; \end{cases}$ $0<x<4,5$.

Ответ: (0; 4,5).

3. $\sin(-x) = \cos\pi$; $-\sin x= -1$; $\sin x = 1$; $x= \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k\in Z$.

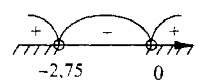
Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k\in Z$.

4.



5. $f(x) = 3 + 7x - 4x^2$; $f'(x) = 7 - 8x$;
$k = f'(x) = -9$; $7 - 8x = -9$; $x = 2$; $f(2) = 1$. Ответ: (2; 1).

Вариант 41.



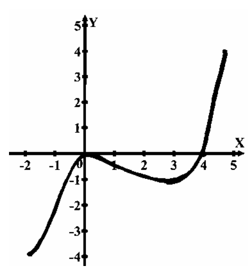
1. $y = \lg(4x^2 + 11x)$;
$4x^2 + 11x > 0$; $4x(x + 2{,}75) > 0$;
Ответ: $(-\infty; -2{,}75)\cup(0; \infty)$.

2. $0{,}01 < 10^{2+x} < 10000$; $10^{-2} < 10^{2+x} < 10^4$.
Т.к. $10 > 1$, то $-2 < 2 + x < 4$, $-4 < x < 2$. Ответ: –3; –2; –1; 0; 1.

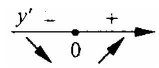
3. $\mathrm{tg}x = \sqrt{3}$, $[0; 2\pi]$; $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$. Отрезку $[0, 2\pi]$ принадлежат

только $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$. Ответ: $\frac{\pi}{3}$; $\frac{4}{3}\pi$.

4.

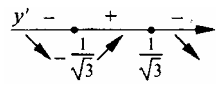


5. а) $y = 3x - 2$; $D(y) = R$; $y' = 3$; $3 > 0$ – функция возрастает на R;.
б) $y = -5x + 9$; $D(y)= R$; $y' = -5$; $-5 < 0$ – функция убывает на R;
в) $y = x^2$; $D(y) = R$; $y'= 2x$.



Функция убывает на $(-\infty; 0]$
и возрастает на $[0; +\infty)$.
г) $y = -x^3 + x$; $D(y) = R$; $y' = -3x^2 + 1$;

$-3(x - \frac{1}{\sqrt{3}})(x+\frac{1}{\sqrt{3}})=0$.

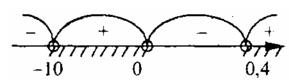


Функция убывает только на

$(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}]\cup[\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty)$. Ответ: $y = -5x + 9$.

Вариант 42.

1. $\frac{x^2+10x}{2-5x}<0$;



Пусть $f(x) = \frac{x^2+10x}{2-5x}$.

Функция $f(x)$ определена на промежутке $(-\infty; 0,4)\cup(0,4; \infty)$;

$f(x)=0$ при $x=0$ и $x=-10$. Решим неравенство $\frac{x(x+10)}{5(x-0,4)}>0$ методом интервалов. Ответ: $(-10; 0)\cup(0,4; \infty)$.

2. $\log_2(2x+1)=\log_2 3+1$; $\log_2(2x+1)=\log_2 3+\log_2 2$; $\log_2(2x+1)=\log_2 6$;
$2x+1=6$; $x=2,5$; $2\cdot 2,5+1=6>0$. Ответ: 2,5.

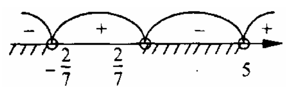
3. $2\sin\frac{x}{4} - \sqrt{3}=0$; $\sin\frac{x}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{x}{4}=(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k$,

$x=(-1)^k\frac{4\pi}{3}+4\pi k$, $k\in Z$. Ответ: $x=(-1)^k\frac{4\pi}{3}+4\pi k$, $k\in Z$.

4. а) $D(f) = [-4,5; 4,5]$;
б) $f'(x) > 0$ на промежутке $(-1; 3)$, $f'(x) < 0$ на каждом из промежутков $(-4,5; -1)$ и $(3; 4,5)$;
в) касательные параллельны оси абсцисс в точках $x= -1$ и $x=3$;
г) $f(x) \geq 2$ при $x \in [-4,5; -3,5]\cup\{3\}$;
д) $\max f(x) = f(-4,5) = 3,5$; $\min f(x)=f(-1)=-4,5$.
5. $F(x)=x^4-4x^2+1$; $F'(x) = 4x^3 - 8x$.
Т.к. $F'(x)=q(x)$, то функция $F(x)$ является первообразной для

функции q(x). Ответ: q(x).

Вариант 43.



1. $\frac{4-49x^2}{x-5}>0$.

Пусть $f(x)=\frac{4-49x^2}{x-5}$.

Функция $f(x)$ определена на промежутке $(-\infty; 5)\cup(5; \infty)$;

$f(x) = 0$ при $x = \pm\frac{2}{7}$. Решим неравенство $(x-\frac{2}{7})(x+\frac{2}{7})(x-5)<0$

методом интервалов. Ответ: $(-\infty; -\frac{2}{7})\cup(\frac{2}{7}; 5)$.

2. $7^x-(\frac{1}{7})^{1-x}=6$; $7^x-\frac{1}{7}\cdot 7^x=6$; $\frac{6}{7}\cdot 7^x=6$; $7^x=7$; $x=1$. Ответ: 1.

3. $\sin x+\cos(2\pi+x)-\cos(\frac{\pi}{2}-x)=-1$; $\sin x+\cos x-\sin x=-1$,

$\cos x=-1$; $x=\pi+2\pi k$, $k\in Z$. Ответ: $\pi+2\pi k$, $k\in Z$.

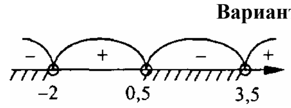
4. а) $D(f)=[-4; 4{,}5]$; б) $f(x)\geq 1$ при $x\in[-3; 4{,}5]$;
в) $f'(x)>0$ на промежутках $(-4; -1)\cup(3; 4{,}5)$,
$f'(x)<0$ на промежутке $(-1; 3)$;
г) касательные параллельны оси абсцисс в точках $x=-1$ и $x=3$.
д) $\max f(x)=f(-1)=5{,}5$; $\min f(x)=f(-4)=-3$.

5. $y=-3x^3+6x^2-5x$; $y'=-9x^2+12x-5$; $-9x^2+12x-5<0$;

$9x^2-12x+5>0$; $9x^2-12x+5=0$; $\frac{D}{4}=36-45=-9<0$.

Значит, $9x^2-12x+5>0$ или $y'<0$ при любых действительных значениях x. Ответ: убывает на $(-\infty; \infty)$.

Вариант 44.



1. $\frac{4x^2-16x+7}{3(x+2)}<0$.

Найдем корни квадратного трехчлена $4x^2-16x+7$,
решив уравнение $4x^2-16x+7=0$.

$D=256-112=144$; $x_{1,2}=\frac{16\pm 12}{8}$, $x_1=0{,}5$; $x_2=3{,}5$.

Решим неравенство $(x-0,5)(x-3,5)(x+2) < 0$ методом интервалов: $x \in(-\infty; -2)\cup(0,5; 3,5)$. Ответ: $(-\infty; -2)\cup(0,5; 3,5)$.

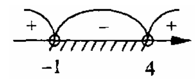
2. $\lg(4x-2)=5\lg2-3$; $\lg(4x-2) = \lg 32 - \lg 1000$; $4x - 2=0,032$; $x = 0,508$; при $x = 0,508$: $4x - 2 = 4 \cdot 0,508 - 2 > 0$. Ответ: 0,508.

3. $(\sin^2\alpha - \cos^2 a)(\sin^2 a + \cos^2 a) + 2\cos^2 a = \sin^2 a - \cos^2 a + 2\cos^2 a =$
$= \sin^2 a + \cos^2 a = 1$; 1=1, что и требовалось доказать.

4. а) D(f) = [–2; 7]; б) $f(x) \le 0,5$ при $x \in [-2; -0,3]\cup[2; 5,5]$;
в) касательные параллельны оси абсцисс в точках $x=1$ и $x=3,5$;
г) функция возрастает на каждом из промежутков [–2; 1] и [3,5; 7];
функция убывает на из промежутке [1; 3,5];
д) $\max f(x) = f(7) = 4,5$; $\min f(x) = f(3,5) = -2$.

5. $S=t^3-3t+4$; $v(t)=S'(t)$; $S'(t)=3t^2-3$, $v(t)=S'(3)=3\cdot3^2-3=24$ (м/с).
Ответ: 24 м/с.

Вариант 45.



1. $\lg\dfrac{32-8x}{x+1}$; $\dfrac{32-8x}{x+1}>0$;
$(32-8x)(x+1)>0$; $8(x-4)(x+1)<0$;
$-1<x<4$. Ответ: (–1; 4).

2. $2^{x+1}+\dfrac{1}{2}\cdot2^x<5$; $2\cdot2^x+\dfrac{1}{2}\cdot2^x<5$; $2^x<2$; $x<1$ (т.к. 2>1). Ответ: $(-\infty; 1)$.

3. $2\cos^2 x - 7\cos x = 0$; $2\cos x(\cos x - 3,5) = 0$;

$$\left[\begin{array}{l}\cos x = 0,\\ \cos x - 3,5 = 0 \text{ - не имеет решений,т.к. } |\cos x| \le 1;\end{array}\right.$$

$x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$. Ответ: $\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$.

4. а) D(f) = [–2,5; 6]; б) $f(x) \le -0,5$ при $x\in[-2,5; -1,5]\cup\{1\}$;
в) точки экстремума функции $x = 1$ и $x = 4$; и $x = -1$
г) функция возрастает на каждом из промежутков [–2,5; –1] и [1; 4], убывает – [–1; 1] и [4; 6];
д) $\max f(x)=f(4) =5,5$; $\min f(x) =f(-2,5)=-3$.

5. $f(x)=x^5-5x^4+3$; $f'(x)=5x^4-20x^3=5x^3(x-4)$; $f'(x)=0$ при $x=0$ и $x=4$ – точки экстремума функции. Ответ: $x = 0$, $x = 4$.

Вариант 46.

1. $6^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot (0,25)^{\frac{1}{4}}$;

$6^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot (0,25)^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot (2^{-2})^{\frac{1}{4}} = 3 \cdot 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = 3 \cdot 1 = 3$. Ответ: 3.

2. lg (2x+ 1)<0; lg (2x+1)< lg 1;

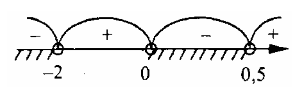
$\begin{cases} 2x+1<1, \\ 2x+1>0; \end{cases}$; $\begin{cases} x<0, \\ x>-0,5; \end{cases}$ –0,5<x<0. Ответ: (–0,5; 0).

3. $(\sin^2\alpha)^2 + (\cos^2\alpha)^2 + 2\sin^2\alpha \cos^2\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 = 1^2 = 1$;
1=1, что и требовалось доказать.

4. а) D(f)=[–3;6]; б) f(x) ≥ 1 при $x \in [-3; -2,5] \cup \{4\}$;
в) касательные параллельны оси абсцисс в точках x=–1,5 и x=4;
г) функция возрастает на промежутке [1,5;4], убывает на каждом из промежутков [–3; 1,5] и [4; 6];
д) max f(x)=f(–3) = 3,5; min f(x)=f(1,5)=–5.

5. $f(x)=5x^2-12x+1$; $f'(x) = 10x - 12$; $k = f'(x_0) = 3$; $10x_0 - 12 = 3$;
$x_0=1,5$; $f(x_0)=-5,75$. Ответ: (1,5; –5,75).

Вариант 47.



1. $\frac{x(x+2)}{1-2x}>0$; $\frac{x(x+2)}{2x-1}<0$.

Пусть $f(x)=\frac{x(x+2)}{2x-1}$.

Функция f(x) определена на $(-\infty; 0,5)\cup(0,5; \infty)$;
f(x) = 0 при x=0 и x=–2. Ответ: $(-\infty; -2)\cup(0; 0,5)$.

2. $4\cdot3^{x+2}+5\cdot3^{x+1}-6\cdot3^x=5$; $36 \cdot 3^x + 15 \cdot 3^x - 6 \cdot 3^x = 5$; $45 \cdot 3^x = 5$;
$3^x = 3^{-2}$, $x = -2$. Ответ: –2.

3. $2\cos(\frac{\pi}{4}+x)=\sqrt{2}$; $\cos(\frac{\pi}{4}+x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\pi}{4}+x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k$; k∈Z;

$x=-\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k$, k∈Z. Ответ: $2\pi k$; $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, k∈Z.

4. а) D(f) = [–5; 3,5];
б) f(x) ≥ 3 при x∈[1,5; 3,5] и x = –4;
в) x = –4; и x = –1
г) функция возрастает на каждом из промежутков [–5; –4] и [–1; 3,5], убывает на промежутке [–4; –1];
д) max f(x)=f(3,5) = 4,5; min f(x) = f(–1) = –3.

5. $f(x)=3x^2+5x-6$;
$f'(x) = 6x+5$, $k = f'(x_0) = -7$, $6x_0+5 = -7$, $x_0=-2$;
f(–2)=–4.

Ответ: (–2; –4).

Вариант 48.

1. $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{5}{3}}+a^{\frac{2}{3}}}$, a=3; $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{5}{3}}+a^{\frac{2}{3}}}=\dfrac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}(a+1)}=\dfrac{1}{a+1}$.

При a = 3, $\dfrac{1}{a+1}=\dfrac{1}{3+1}=\dfrac{1}{4}$. Ответ: $\dfrac{1}{4}$.

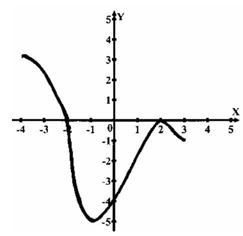
2. lgx+2lg2<0,5lg49–lg5; lgx+ lg4<lg7–lg5;

$\begin{cases} 4x<\dfrac{7}{5}(a=10>1), \\ x>0; \end{cases}$ $\begin{cases} x<0,35), \\ x>0; \end{cases}$ 0<x<0,35. Ответ: (0; 0,35).

3. cos (–x)=cos $\dfrac{\pi}{3}$; cos $x=\dfrac{1}{2}$, x =± $\dfrac{\pi}{3}$ + 2πk, k∈Z.

Ответ: ± $\dfrac{\pi}{3}$ + 2πk, k∈Z.

4.

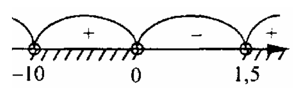


5. f(x)=3x+ $\sqrt{3}$; f'(x)=3+ $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; f'(16)=3+ $\dfrac{1}{2\sqrt{16}}$ =3+ $\dfrac{1}{8}$ =3 $\dfrac{1}{8}$.

Ответ: 3 $\dfrac{1}{8}$.

Вариант 49.

1. $\dfrac{(x+10)(2x-3)}{2x}>0$



Пусть f(x)= $\dfrac{(x+10)(2x-3)}{2x}$.

Функция f(x) определена на (–∞; 0) и (0; ∞);
f(x) = 0 при x=–10 и x = 1,5; Ответ: (–10; 0)∪(1,5; ∞).

2. $4^{5x+1}=(\frac{1}{2})^{6-4x}$; $2^{2(5x+1)}=2^{-(6-4x)}$; $10x+2=-6+4x$, $6x=-8$, $x=-1\frac{1}{3}$.

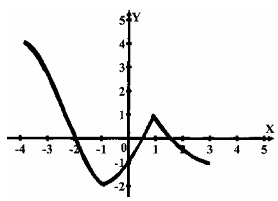
Ответ: $-1\frac{1}{3}$.

3. $2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$, $[0; 2\pi]$; $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$x-\frac{\pi}{4}=(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$. Если $x\in[0;2\pi]$, то $x-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right]$

$x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$ или $x-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$. Ответ: $\frac{\pi}{2}$; π .

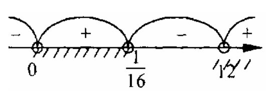
4.



5. f(x)=$2x^3-6x^2+x-1$; F(x) = $\frac{x^4}{2}-2x^3+\frac{x^2}{2}-x+C$.

Ответ: $\frac{x^4}{2}-2x^3+\frac{x^2}{2}-x+C$.

Вариант 50.



1. $\frac{16x^2-x}{12-x}<0$; $\frac{x(16x-1)}{x-12}>0$.

Пусть f(x)= $\frac{x(16x-1)}{x-12}$.

Функция f(x) определена на (–∞; 12)∪(12; ∞);

f(x)=0 при x=0 и x= $\frac{1}{16}$; Ответ: (0; $\frac{1}{16}$)∪(12; ∞).

2. $\log_3(2x–1)<3$;

$\log_3(2x–1)<\log_3 27$; $\begin{cases} 2x-1<27\ (3>1), \\ 2x-1>0; \end{cases}$ $\begin{cases} x<14, \\ x>0,5; \end{cases}$ 0,5<x<14.

Ответ: (0,5; 14).

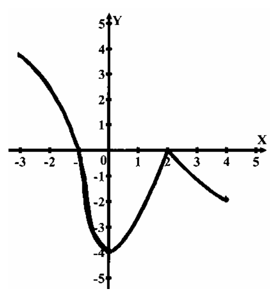
3. 2 cos x – 1 =0, [0; 2π]; cos x = $\frac{1}{2}$, $x = \pm\ \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, k∈Z.

Отберем корни с учетом условия:

1) $0 \le \frac{\pi}{3} + 2\pi k \le 2\pi$; $-\frac{1}{6} \le k \le \frac{5}{6}$; k=0, $x= \frac{\pi}{3}$;

2) $0 \le -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \le 2\pi$; $\frac{1}{6} \le k \le \frac{7}{6}$; k=1, $x= \frac{5\pi}{3}$. Ответ: $\frac{\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$.

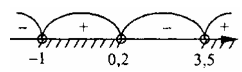
4.



5. f(x)=10x^4+x; F(x)=10 $\frac{x^5}{5} + \frac{x^2}{2}$ +C; F(x)=2x^5+ $\frac{x^2}{2}$ +C.

Учитывая условие имеем: $2\cdot 0^5 + \frac{0^2}{2}$ +C=6,C=6. Ответ: 2x^5+ $\frac{x^2}{2}$ +6.

Вариант 51.



1. $\frac{5x^2+4x-1}{7-2x}<0$; $\frac{5x^2+4x-1}{2x-7}>0$.

Пусть f(x)= $\dfrac{5x^2+4x-1}{2x-7}$.

Функция f(x) определена на $(-\infty;\ 3{,}5)\cup(3{,}5;\ \infty)$;
f(x)=0: $5x^2+4x-1=0$; D = 16 + 20 = 36;

$x_{1,\,2}=\dfrac{-4\pm 6}{10}$, x_1=–1. x_2=0,2; Ответ: $(-1;\ 0{,}2)\cup(3{,}5;\ \infty)$.

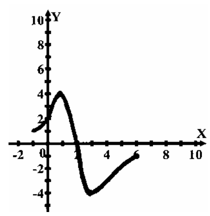
2. lg (2–x)=2lg4 – lg2, x<2;
lg (2–x)=lgl6–lg2; lg(2–x)=lg 8; 2–x=8; x = –6. Ответ: –6.

3. $\dfrac{1}{tg\alpha+ctg\alpha}$

$$\frac{1}{tg\alpha+ctg\alpha}=\frac{1}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\sin\alpha\cos\alpha;$$

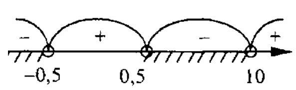
$\sin\alpha\cos\alpha=\sin\alpha\cos\alpha$, что и требовалось доказать.

4.



5. f(x)=e^x cos x; f'(x)=e^x cos x–e^x sin x.
Ответ: e^x(cosx–sinx).

Вариант 52.



1. $\dfrac{8-32x^2}{x-10}>0$;

$x\in(-\infty;\ -0{,}5)\cup(0{,}5;\ 10)$.
Ответ: $(-\infty;\ -0{,}5)\cup(0{,}5;\ 10)$.

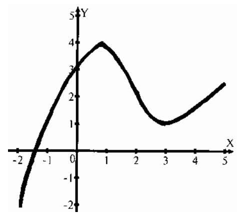
2. $3^{x+2}+3^x=810$; $9\ 3^x+3^x=810$, $3^x=81$, $3^x=3^4$, x=4. Ответ: 4.

3. $\sin x+\sin(\pi+x)-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=1$;

$\sin x - \sin x + \sin x = 1$, $\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$.

4.

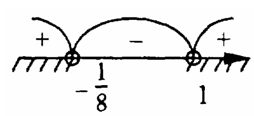


5. $f(x) = 4\sin x - \cos x$; $f'(x) = 4\cos x + \sin x$;

$f'(-\frac{\pi}{4}) = 4\cos(-\frac{\pi}{4}) + \sin(-\frac{\pi}{4}) = 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Вариант 53.

1. $y = \lg\frac{x-1}{8x+1}$;



$(x-1)(8x+1) > 0$;

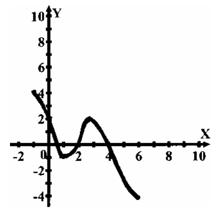
Ответ: $(-\infty; -\frac{1}{8}) \cup (1; \infty)$.

2. $9\cdot 3^{x-1} + 3^x < 36$; $3\cdot 3^x + 3^x < 36$, $3^x < 9$, $3^x < 3^2$, $x < 2$. Ответ: $(-\infty; 2)$.

3. $2\cos^2 x - 1 = 0$;

$\cos 2x = 0$; $2x = \frac{\pi}{2} + \pi n$; $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$, $n \in Z$. Ответ: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$, $n \in Z$.

4.



5. $f(x)=x^2\ln x$; $f'(x)=2x\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}=2x\ln x+x$. Ответ: $2x\ln x+x$.

Вариант 54.

1. $\dfrac{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}$, $a=4$, $b=11$; $\dfrac{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}=\dfrac{a^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}})}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}=a^{\frac{1}{2}}$.

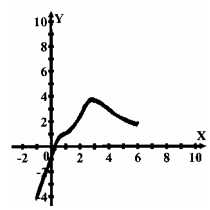
При $a=4$ $a^{\frac{1}{2}}=4^{\frac{1}{2}}=2$. Ответ: 2.

2. $2\lg x>1$; $\lg x^2>\lg 10$; $\begin{cases}x^2>10,\\ x>0;\end{cases}$ $x>\sqrt{10}$. Ответ: $(\sqrt{10};\infty)$.

3. $\mathrm{tg}\,x+\sqrt{3}=0$; $\mathrm{tg}\,x=-\sqrt{3}$; $x=-\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$. Отберем корни с учетом условия: $0\le-\frac{\pi}{3}+\pi n\le2\pi$; $\frac{1}{3}\le n\le2\frac{1}{3}$; $n=1, 2$.

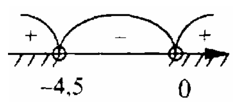
При $n=1$; $x=\frac{2}{3}\pi$; при $n=2$ $x=\frac{5}{3}\pi$. Ответ: $\frac{2}{3}\pi$; $\frac{5}{3}\pi$.

4.



5. $f(x)=2x^2+\sin x$; $f'(x)=4x+\cos x$. Ответ: $4x+\cos x$.

Вариант 55.



1. $y=\lg(2x^2+9x)$; $2x^2+9x>0$;
$2x(x+4,5)>0$;

Ответ: $(-\infty;\,-4,5)\cup(0;\,\infty)$.

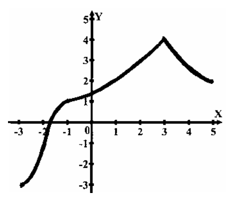
2. $1 < 10^{x+1} \le 1000000$; $10^0 < 10^{x+1} \le 10^6$;
т.к. $a=10>1$, то $0<x+1\le 6$, $-1<x\le 5$. Ответ: 0; 1; 2; 3; 4; 5.

3. $\operatorname{tg} x+1=0, [0;\,2\pi]$; $\operatorname{tg} x=-1$; $x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$.

$0\le -\dfrac{\pi}{4}+\pi n\le 2\pi$; $\le n\le 2\dfrac{1}{4}$; $n=1, 2$.

При $n=1$ $x=\dfrac{3}{4}\pi$; при $n=2$ $x=\dfrac{7}{4}\pi$. Ответ: $\dfrac{3}{4}\pi$; $\dfrac{7}{4}\pi$.

4.



5. $f(x)=6\sin x-\cos x$; $f'(x)=6\cos x+\sin x$;

$k=f'(x_0)$, $k=f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=6\cos\dfrac{\pi}{3}+\sin\dfrac{\pi}{3}=3+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ответ: $3+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

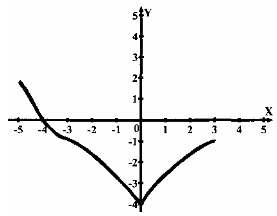
Вариант 56.

1. $12^{\frac{1}{3}}\cdot 6^{\frac{2}{3}}\cdot(0,5)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{-\frac{1}{3}}=2\cdot 3=6$. Ответ: 6.

2. $2\lg 0,5+\lg x>\lg 5$; $\lg 0,25x>\lg 5$; $\begin{cases}0,25x>5,\\ x>0;\end{cases}$ $x>20$. Ответ: $(20;\,\infty)$.

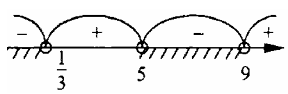
3. $\cos(-x)=\sin\dfrac{\pi}{2}$, $\cos x=1$, $x=2\pi k$, $k\in Z$. Ответ: $2\pi k$, $k\in Z$.

4.



5. $f(x)=x^2-4x$; $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-2x^2+C$. Ответ: $\dfrac{x^3}{3}-2x^2+C$.

Вариант 57.



1. $\dfrac{(x-5)(3x-1)}{9-x}>0$;

$(x-5)(3x-1)(x-9)<0$;

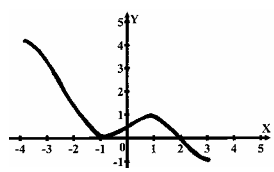
Ответ: $(-\infty; \dfrac{1}{3})\cup(5; 9)$.

2. $9^x=(\dfrac{1}{27})^{2-x}$; $3^{2x}=3^{-3(2-x)}$, $2x=-6+3x$, $x=6$. Ответ: 6.

3. $\cos x = 0,6$, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$; x – угол I четверти, $\sin x > 0$.

$\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-0,6^2} = 0,8$. Ответ: 0,8.

4.



5. $f(x)=6\sin x + \operatorname{tg} x$; $f'(x)=6\cos x + \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

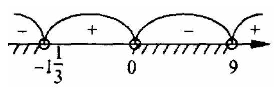
$f'(-\frac{\pi}{6})=6\cos(-\frac{\pi}{6})+\frac{1}{\cos^2(-\frac{\pi}{6})}==3\sqrt{3}+\frac{4}{3}=\frac{9\sqrt{3}+4}{3}$.

Ответ: $\frac{9\sqrt{3}+4}{3}$.

Вариант 58.

1. $\frac{3x^2+4x}{9-x}>0$; $\frac{3x^2+4x}{x-9}<0$. Пусть $f(x)=\frac{3x^2+4x}{x-9}$;

$D(f)=(-\infty; 9)\cup(9; \infty)$;



$f(x)=0$ при $x=0$ и $x=-1\frac{1}{3}$;

Ответ: $(-\infty; -1\frac{1}{3})\cup(0; 9)$.

2. $\log_{0,25}(3x-5)>-3$; $\log_{0,25}(3x-5)>\log_{0,25}64$;

$\begin{cases}3x-5<64,\\3x-5>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x<23,\\x>1\frac{2}{3};\end{cases}$ $1\frac{2}{3}<x<23$. Ответ: $(1\frac{2}{3}; 23)$.

3. $2\cos\frac{x}{2}+1=0$; $\cos\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}$, $\frac{x}{2}=\pm(\pi-\frac{\pi}{3})+2\pi k$, $k\in Z$;

$x=\pm\frac{4\pi}{3}+4\pi k$, $k\in Z$. Ответ: $\pm\frac{4\pi}{3}+4\pi k$, $k\in Z$.

4. а) $D(f)=[-3,5; 5,5]$; б) $f(x)>0$ при $-1,5<x<4,7$;

в) функция возрастает на промежутке $[-3,5; 1]$ и убывает на промежутке $[1; 5,5]$;

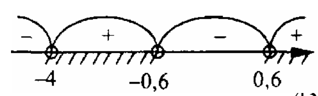
г) прямые, параллельные оси абсцисс, касаются графика в точках $(1; 4,5)$ и $(4;1)$;

д) $\max f(x)=f(1)=4,5$; $\min f(x)=f(-3,5)=-4,5$.

5. $f(x)=1+8x-x^2$; $f'(x)=8-2x$; $f'(x)=0$ при $8-2x=0$, $x=4$ – критическая точка. Ветви парабол направлены вниз, т.е. $\max f(x)=f(4)=17$. $[-2, 5]$. Ответ: 17

Вариант 59.

1. $\frac{9-25x^2}{x+4}<0$;



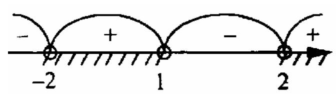
$(5x-3)(5x+3)(x+4)>0$;
$x\in(-4;\,-0{,}6)\cup(0{,}6;\,\infty)$.
Ответ: $(-4;\,-0{,}6)\cup(0{,}6;\,\infty)$.
2. $128\cdot16^{2x+1}=8^{3-2x}$; $2^7\cdot2^{4(2x+1)}=2^{3(3-2x)}$; $7+8x+4=9-6x$;
$14x=-2$; $x=-\dfrac{1}{7}$. Ответ: $-\dfrac{1}{7}$.

3. $\cos x-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+\cos(\pi+x)=0$; $\cos x-\cos x-\cos x=0$; $\cos x=0$;

$x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$. Ответ: $\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$.

4. а) $D(f)=[-3;\,6]$; б) $f(x)>0$ при $x\in[-3;\,1{,}1)$ и $(2{,}5;\,6]$;
в) функция возрастает на промежутках $[-3;-1{,}5]$ и $[2;\,6]$ и убывает на промежутке $[-1{,}5;\,2]$;
г) прямая, параллельная оси абсцисс, касается графика в точке $(-1{,}5;\,3)$;
д) $\max f(x)=f(6)=5{,}5$; $\min f(x)=f(2)=-3$.
5. $f(x)=3x^2-12x+1$; $f'(x)=6x-12$, $f'(x)=0$ при $x=2$–критическая точка. Ветви параболы направлены вверх, т.е. $\min\limits_{[1;\,4]} f(x)=f(2)=-11$.
Ответ: -11.

Вариант 60.



1. $\dfrac{x^2-3x+2}{6+3x}>0$;
$3(x-2)(x-1)(x+2)>0$;
$x\in(-2;\,1)\cup(2;\,\infty)$.

Ответ: $(-2;\,1)\cup(2;\,\infty)$.
2. $\log_5(1-3x)\le2$; $\log_5(1-3x)\le\log_5 25$;

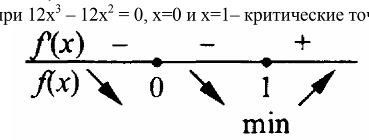
$\begin{cases}1-3x\le25,\\1-3x>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x\ge-8,\\x<\dfrac{1}{3};\end{cases}$ $-8\le x<\dfrac{1}{3}$. Ответ: $[-8;\,\dfrac{1}{3})$.

3. $\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{ctg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=$

$=\dfrac{(1-\cos^2\alpha)-\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$.

Значит, $\dfrac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{ctg}\,\alpha$, что и требовалось доказать.

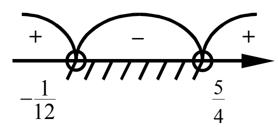
4. а)D(f)=[–3;6]; б) f(*x*) > 0 при $x\in$ (–3;2,9);
в) f'(*x*) > 0 при $x\in$ (–2; 0), f'(*x*) < 0 на промежутках (–3; –2), (0; 6);
г) прямые, параллельные оси абсцисс, касаются графика в точках (–2; 2,5) и (0; 4,5);
д) max f(*x*)=f(0)=4,5; min f(*x*)=f(6)=–3.
5. $f(x)=3x^4-4x^3+2$.
Функция f(x) определена и дифференцируема при $x\in R$.
$f'(x)=12x^3-12x^2$,
$f'(x) = 0$ при $12x^3 - 12x^2 = 0$, x=0 и x=1– критические точки.



x=1 – точка минимума функции.
Ответ: 1 – точка минимума функции.

Вариант 61.

1. $y=\lg\frac{5-4x}{12x-1}$;
$(5-4x)(12x+1)>0$;
$48(x-\frac{5}{4})(x+\frac{1}{12})<0$



$x\in(-\frac{1}{12};\frac{5}{4})$. Ответ: $x\in(-\frac{1}{12};\frac{5}{4})$.

2. $\left(\frac{1}{27}\right)^{2-x}>9^{2x-1}$; $3^{-3(2-x)}>3^{2(2x-1)}$.

Т.к. $a = 3 > 1$, то $-6 + 3x > 4x - 2$, $x < -4$. Ответ: (-∞; -4).

3. $\sqrt{3}tg2x+1=0$; $tg2x=-\frac{1}{\sqrt{3}},2x=-\frac{\pi}{6}+\pi k,x=-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2},k\in Z$.

Ответ: $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2},k\in Z$.

4. а) D(f) = [–4,5; 5]; б) *f*(*x*) > 0 при $x\in$ (–3,5; 3,5);
в) *f'*(*x*) > 0 на промежутках (–4,5; –1,4) и (–1,5; 1,5),
f'(*x*) < 0 на промежутке (1,5; 5);
г) *x* = 1,5 – точка экстремума функции (точка максимума);

д) $\max\limits_{[-4,5;5]} f(x) = f(1{,}5) = 4{,}5;\quad \min\limits_{[-4,5;5]} f(x) = -2$

5. $f(x) = x^5 + 2x;\quad F(x) = \dfrac{x^6}{6} + 2\dfrac{x^2}{2} + C;\quad F(x) = \dfrac{x^6}{6} + x^2 + C.$

Ответ: $\dfrac{x^6}{6} + x^2 + C.$

Вариант 62.

1. $\dfrac{12^{\frac{1}{2}}}{7^{\frac{2}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{2}}} \cdot \dfrac{3^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{5}{3}}}{8^{-\frac{1}{6}}} = \dfrac{2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{5}{3}}}{7^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{-\frac{3}{6}}} = \dfrac{2 \cdot 3 \cdot 7}{2^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{-\frac{1}{2}}} = 21$. Ответ: 21.

2. lg $2x$ < 2 lg 7 + 1; lg $2x$ < lg 49 + lg 10; $\begin{cases} 2x < 490 \\ x > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x < 245, \\ x > 0; \end{cases}$ $0 < x < 245$. Ответ: (0; 245).

3. $\mathrm{tg}^2 x - 3 = 0$; $tgx = \pm\sqrt{3}, x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$. Отберем корни:

Отрезку $[0;2\pi]$ принадлежат корни: $\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}$

Ответ: $\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}$.

4. а) $D(f) = [-3; 5{,}5]$; б) $f(x) \le -2$ при $x \in [-3; -2{,}5] \cup [1{,}5; 5{,}5]$;
в) $f'(x) > 0$ на промежутке $(-3; -1)$,
$f'(x) < 0$ на промежутках $(-1; 3{,}5)$ и $(3{,}5; 5{,}5)$;
г) $x = -1$ д) $\max\limits_{[-3;5,5]} f(x) = f(-1) = 2{,}5$; $\min\limits_{[-3;5,5]} f(x) = f(5{,}5) = -4{,}5$

5. $y = 2\sin x + 3\cos x$; $y' = 2\cos x - 3\sin x$; $k_1 = 2\cos\frac{\pi}{2} - 3\sin\frac{\pi}{2} = -3$;

$k_2 = 2\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - 3\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2\cdot 0 - 3\cdot(-1) = 3$. Так как $k_1 \ne k_2$, то рассматриваемые касательные не являются параллельными прямыми. Ответ: не являются.

Вариант 63.

1. $3^{2\log_9 12} = 9^{\log_9 12} = 12$. Ответ: 12.

2. $0{,}04 \le 5^{2-x} \le 25$; $5^{-2} \le 5^{2-x} \le 5^2$. Т.к. $5 > 1$,
то $-2 \le 2 - x \le 2$, $0 \le x \le 4$. Ответ: 0; 1; 2; 3; 4.

3. $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + 1 + 2\cos\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)} =$

$= \frac{2+2\cos\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)} = \frac{2}{\sin\alpha}.$; $\frac{2}{\sin\alpha} = \frac{2}{\sin\alpha}$.

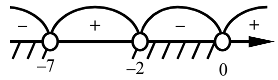
4. а) $D(f) = [-3; 6]$; б) $f(x) \le -2{,}5$ при $x \in \{-3\} \cup [-0{,}5; 0{,}5]$;
в) $f'(x) > 0$ на промежутках $(-3; -2)$, $(0; 6)$,
$f'(x) < 0$ на промежутке $(-2; 0)$;
г) $x = -2$, $x = 0$;
д) $\max\limits_{[-3;6]} f(x) = f(6) = 4{,}5$; $\min\limits_{[-3;6]} f(x) = f(0) = -3$.

5. $3x + x^2$;

$F(x) = 3\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + C.$ Ответ: $3\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + C.$

Вариант 64

1. $x^3 + 9x^2 + 14x < 0$;
$x(x^2 + 9x + 14) < 0$.
$x^2 + 9x + 14 = (x + 2)(x + 7)$.
$x \in (-\infty; -7) \cup (-2; 0)$.
Ответ: $(-\infty; -7) \cup (-2; 0)$.



2. $\frac{1}{2}\lg 0,64 + \lg x > \lg 5$; $\lg 0,8 + \lg x > \lg 5$; $0,8x > 5$ (т.к. $a = 10 > 1$);

$x > 6,25$. Ответ: $(6,25; \infty)$.

3. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; $-\sin x = -\frac{1}{2}, \sin x = \frac{1}{2}$,

$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$. Ответ: $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$.

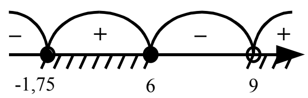
4. а) $D(f) = [-3; 6]$; б) $f(x) < -1$ при $x \in (3; 6)$;
в) $f'(x) > 0$ на промежутке $(0; 1,5)$,
$f'(x) < 0$ на промежутках $(-3; 0)$, $(1,5; 6)$;
г) прямые, параллельные оси абсцисс, касаются графика в точках $(0;0)$ и $(1,5; 2,5)$;
д) $\max\limits_{[-3;6]} f(x) = f(-3) = 4$; $\min\limits_{[-3;6]} f(x) = f(6) = -3$.

5. $y = x^2 - 3x$; $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + C$. Ответ: $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + C$.

Вариант 65.

1. $\frac{(x-6)(4x+7)}{9-x} \le 0$;

$\frac{(x-6)(4x+7)}{x-9} \ge 0$;



$x \in (-1,75; 6) \cup (9; \infty)$. Ответ: $[-1,75; 6] \cup (9, \infty)$.

2. $2^{7-5x} - \left(\frac{1}{8}\right)^{2x+1} = 0$; $2^{7-5x} = 2^{-3(2x+1)}$, $7 - 5x = -6x - 3$, $x = -10$.

Ответ: -10.

3. $3tgx = -\sqrt{3}; tgx = -\frac{\sqrt{3}}{3}; x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$.

$0 \le -\frac{\pi}{6} + \pi k \le 2\pi$; $\frac{1}{6} \le k \le 2\frac{1}{6}$; $k = 1, 2$. Ответ: $\frac{5}{6}\pi; \frac{11}{6}\pi$.

4. а) $D(f) = [-3{,}5; 6]$; б) $f(x) > 2$ при $x \in (0{,}5; 4)$;
в) функция возрастает на промежутке $[-1{,}5; 2{,}3]$ и убывает на промежутках $[-3{,}5; -1{,}5]$ и $[2{,}3; 6]$;
г) прямые, параллельные оси абсцисс, касаются графика в точке $(2{,}3; 4)$;
д) $\max\limits_{[-3,5;6]} f(x) = 4$; $\min\limits_{[-3,5;6]} f(x) = -3$.

5. $f(x) = 3 + 5x + 3x^2$; $f'(x) = 5 + 6x$, $k = f(x0) = -7$; $5 + 6x = -7$, $x0 = -2$, $f(-2) = 5$. Ответ: $(-2; 5)$.

Вариант 66.

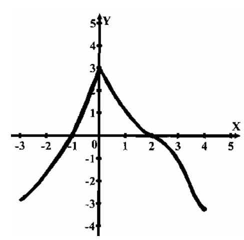
1. $\dfrac{5^{\frac{3}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{12}}}{9^{\frac{1}{3}}} \cdot \dfrac{8^{\frac{1}{4}}}{5^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{6}}} = \dfrac{5^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{3}{4}}}{3^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}} = 5 \cdot 2 \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{10}{3} = 3\dfrac{1}{3}$. Ответ: $3\dfrac{1}{3}$.

2. $\log_2(1 - 2x) > 0$; $\log_2(1 - 2x) > \log_2 1$; $\begin{cases} 1-2x>1 \\ 1-2x>0 \end{cases}$ $x < 0$.

Ответ: $(-\infty; 0)$.

3. $\sin x + 0{,}5 = 0$, $[0; 2\pi]$;
$\sin x = -\dfrac{1}{2}$, $x = (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$. Ответ: $\dfrac{7\pi}{6}$; $\dfrac{11\pi}{6}$.

4.



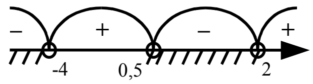
5. $f(x) = 5x + x^2$, $(0; 3)$; $f(x) = 5\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + C$.

$3 = 5 \cdot \dfrac{0^2}{2} + \dfrac{0^3}{3} + C$; C = 3. Итак, $F(x) = 5\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + 3$.

Ответ: $5\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + 3$.

Вариант 67.

1. $\dfrac{2x^2-5x+2}{x+4}<0;$



$2(x-2)(x-0,5)(x+4)<0;$
$x\in(-\infty;-4)\cup(0,5;2).$
Ответ: $(-\infty;-4)\cup(0,5;2).$

2. $\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)\geq-2;\ \log_{\frac{1}{3}}(2x-1)\geq\log_{\frac{1}{3}}9;$

$\begin{cases}2x-1\leq 9,\\ 2x-1>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x\leq 5,\\ x>0,5;\end{cases}$ Ответ: $(0,5;5].$

3. $tg^2x+tg\,x=0$, $[0;2\pi]$; $tg\,x(tg\,x+1)=0$; $tg\,x=0$ или $tg\,x+1=0$;

$x=\pi n,\ n\in Z$ или $tg\,x=-1;\ x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z;$

1) $x=\pi n$; $0\leq\pi n\leq 2\pi$; $0\leq n\leq 2$; $x_1=0$ при $x=0$; $x_2=\pi$ при $n=1$;
$x_3=2\pi$ при $n=2$.

2) $x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi k;\ 0\leq-\dfrac{\pi}{4}+\pi k\leq 2\pi;\ \dfrac{1}{4}\leq k\leq 2\dfrac{1}{4};$ $k=1;2;$

$x_4=-\dfrac{\pi}{4}+\pi=\dfrac{3}{4}\pi$ при $k=1$; $x_5=\dfrac{7}{4}\pi$ при $k=2$.

Ответ: $0;\ \pi;\ \dfrac{3}{4}\pi;\ 2\pi;\ \dfrac{7}{4}\pi$.

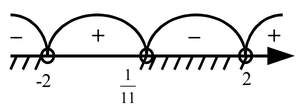
4. $f(x)=x^3\ln x,\ f'(x)=3x^2\ln x+\dfrac{x^3}{x}=x^2(3\ln x+1).$ Ответ: $x^2(3\ln x+1)$.

5. $f(x)=x^2-6x+9$.

$$S=\int_0^2(x^2-6x+9)dx=\left(\frac{x^3}{3}-3x^2+9x\right)\Bigg|_0^2=\frac{8}{3}-12+18=8\frac{2}{3}\ .$$

Вариант 68.

1. $\dfrac{3x^2-12}{1-11x}>0;$



$3(x+2)(x-2)(11x-1)<0;$

$x\in(-\infty;-2)\cup\left(\dfrac{1}{11};2\right).$ Ответ: $(-\infty;-2)\cup(\dfrac{1}{11};\ 2)$.

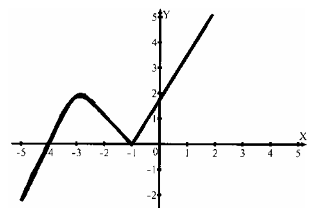
2. $\left(\frac{1}{6}\right)^{x+1} = 36^{x-1}$; $6^{-(x+1)} = 6^{2(x-1)}$, $-x - 1 = 2x - 2$, $x = \frac{1}{3}$. Ответ: $\frac{1}{3}$.

3. $\sin x + \sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -1$;

$\sin x + \sin x - \sin x = -1$; $\sin x = -1$; $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

4.



5. $f(x) = 2x + x^3$; $F(x) = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + C$. Ответ: $x^2 + \frac{x^4}{4} + C$.

Вариант 69.

1. $\frac{b^{\frac{5}{4}}c^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}c^{\frac{5}{4}}}{b^{\frac{5}{4}}c^{\frac{5}{4}}}$, $b = 2$, $c = 5$;

$\frac{b^{\frac{5}{4}}c^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}c^{\frac{5}{4}}}{b^{\frac{5}{4}}c^{\frac{5}{4}}} = \frac{b^{\frac{5}{4}}c^{\frac{5}{4}}\left(c^{-1} + b^{-1}\right)}{b^{\frac{5}{4}}c^{\frac{5}{4}}} = \frac{1}{c} + \frac{1}{b} = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{7}{10}$. Ответ: 0,7

2. $\lg(3 - 2x) < 2$;

$\begin{cases} 3 - 2x < 100 \\ 3 - 2x > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x > -48{,}5, \\ x < 1{,}5; \end{cases}$ $-48{,}5 < x < 1{,}5$.

3. $tg^2 x - \sqrt{3} tgx = 0$, $[0; 2\pi]$; $tgx\left(tgx - \sqrt{3}\right) = 0$;

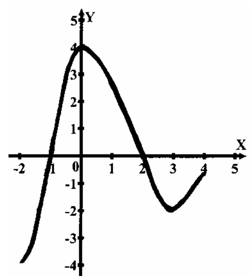
$\operatorname{tg} x = 0$ или $tgx = \sqrt{3}$; $x = \pi n, n \in Z$ или $x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$.

1) $0 \le \pi n \le 2\pi$; $0 \le n \le 2$; $n = 0; 1; 2$;
$x = 0$ при $n = 0$; $x = \pi$ при $n = 1$; $x = 2\pi$ при $n = 2$.

2) $0 \le \dfrac{\pi}{3} + \pi k \le 2\pi;\ -\dfrac{1}{3} \le k \le 2 - \dfrac{1}{3};\ k = 0; 1;$

$x = \dfrac{\pi}{3}$ при $k = 0$; $x = \dfrac{4}{3}\pi$ при $k = 1$. Ответ: $0;\ \dfrac{\pi}{3};\ \pi;\ \dfrac{4}{3}\pi;\ 2\pi$.

4.



5. $f(x) = x^2 + 8x + 16$, $x = 0$, $y = 0$, $x = -2$.

$$S = \int_{-2}^{0} \left(x^2 + 8x + 16\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + 4x^2 + 16x\right)\Bigg|_{-2}^{0} = -\left(-\frac{8}{3} + 16 - 32\right) = 18\frac{2}{3}.$$

Ответ: $18\frac{2}{3}$.

Вариант 70.

1. $\left(27^{\frac{2}{5}} \cdot 2^{\frac{1}{5}} \cdot 2\right)^{\frac{5}{6}} = \left(3^{\frac{6}{5}} \cdot 2^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{5}{6}} = 6.$ Ответ: 6.

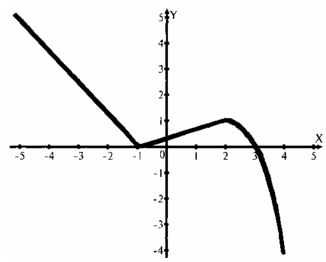
2. $\lg x + 0{,}5 \lg 16 < \lg 80 - \lg 2$; $\lg x + \lg 4 < \lg 40$;

$\begin{cases} 4x < 40, \\ x > 0; \end{cases} \begin{cases} x < 10, \\ x > 0; \end{cases} 0 < x < 10.$

Ответ: (0; 10).

3. $\sin(-x) = \sin 2\pi$; $-\sin x = 0$, $\sin x = 0$, $x = \pi k$, $k \in Z$.
Ответ: πk, $k \in Z$.

4.



5. $f(x) = 3x^2 - 5$; $F(x)=x^3 - 5x+C$; $F(2)=10$; $2^3-5 \cdot 2+C = 10$; $C = 12$.
Ответ: $x^3 - 5x + 12$.

Вариант 71.

1. $\left(72^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 36^{\frac{1}{6}} \div 2^{\frac{4}{3}} = 36^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 36^{\frac{1}{6}} \div 2^{\frac{4}{3}} = 6 \cdot 2^{-1} = 3$. Ответ: 3.

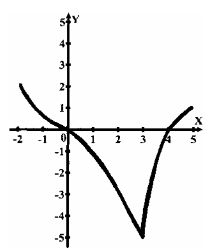
2. $\log_6(5x-2)>3\log_6 2+2$; $\log_6(5x-2)>\log_6 8+\log_6 36$; $\log_6(5x-2)>\log_6 288$;

$\begin{cases} 5x-2>288, \\ 5x-2>0; \end{cases}$ $x > 58$. Ответ: $(58; \infty)$.

3. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\frac{\pi}{4}$, $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{4}+2\pi k, k \in Z$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k, k \in Z$.

4.



5. $f(x) = 2x^3 + x^2 + 3$; $F(x) = \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} + 3x + C$;

$F(-1) > 0 : \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 3 + C > 0,\ C > 2\frac{5}{6}$. Например C=5.

Ответ: $\frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} + 3x + 5$.

Вариант 72.

1. $8^{\frac{1}{3}\log_2 6} = 2^{\log_2 6} = 6$. Ответ: 6.

2. $\frac{1}{7} \le 7^{x-3} < 49$; $7^{-1} \le 7^{x-3} < 7^2$. Т.к. $7 > 1$, то $-1 \le x - 3 < 2$; $2 \le x < 5$.

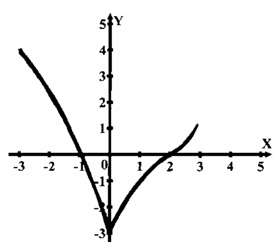
Ответ: 2; 3; 4.

3. $(\sin x - \cos x)^2 - 1 = 0$, $[0; 2\pi]$; $\sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x - 1 = 0$;
$1 - \sin 2x - 1 = 0$; $\sin 2x = 0$; $2x = \pi k$;

$x = \frac{\pi k}{2}, k \in Z$. $0 \le \frac{\pi}{2} k \le 2\pi$; $0 \le k \le 4$; $k = 0; 1; 2; 3; 4$;

Ответ: 0; $\frac{\pi}{2}$; π; $\frac{3}{2}\pi$; 2π.

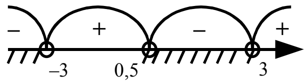
4.



5. $f(x) = x^5 - x^2$; $F(x) = \frac{x^6}{6} - \frac{x^3}{3} + C$.

Ответ: $\frac{x^6}{6} - \frac{x^3}{3} + C$.

Вариант 73



1. $\dfrac{2x^2+5x-3}{x-3}<0;$

$(x-3)(2x^2+5x-3)<0;$

$2(x-3)(x-0,5)(x+3)<0;$

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (0,5; 3)$.

2. $\log_2(7x-4) = 2 + \log_2 13;$

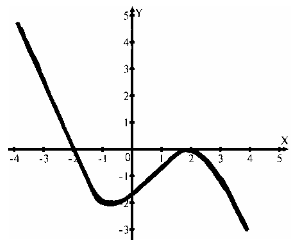
$\log_2(7x-4) = \log_2 52;$ $\begin{cases} 7x-4=52, \\ 7x-4>0; \end{cases}$ $x = 8.$ Ответ: 8.

3. $\sin x = -0,8,\ -\dfrac{\pi}{2} < x < 0.$

Учитывая условие, $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-(-0,8)^2} = 0,6.$

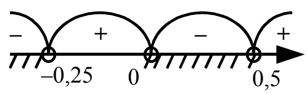
Ответ: 0,6.

4.



5. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$, $f'(x) = 3x^2 - 6x$; $k = f'(x_0) = 0$: $3x_0^2 - 6x_0 = 0$ при $x_0 = 0$ и $x_0 = 2$; $f(0) = 5$, $f(2) = 1$; Ответ: (0; 5), (2; 1).

Вариант 74.



1. $\dfrac{8x^2-2x-1}{x}<0;$

$x(8x^2-2x-1)<0;$

$8x\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x+\dfrac{1}{4}\right)<0$.

Ответ: $(-\infty; -0,25) \cup (0; 0,5)$.

2. $\log_2 3 - \log_2(2 - 3x) = 2 - \log_2(4 - 3x)$;

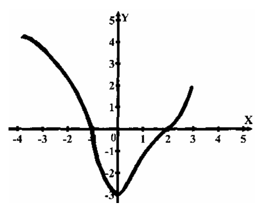
$\begin{cases} \log_2 \dfrac{3}{2-3x} = \log_2 \dfrac{4}{4-3x}, \\ 2 - 3x > 0. \end{cases}$ $\begin{cases} 3(4-3x) = 4(2-3x), \\ x < \dfrac{2}{3}; \end{cases}$ $\begin{cases} 12 - 9x = 8 - 12x, \\ x < \dfrac{2}{3}; \end{cases}$

$x = -1\frac{1}{3}$.

3. $3tg2x - \sqrt{3} = 0$; $tg2x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $2x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$; $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$.

4.

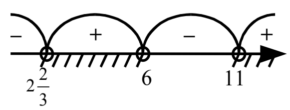


5. $f(x) = 3x^4 - 1$; $F(x) = 3\frac{x^5}{5} - x + C$. Ответ: $F(x) = \frac{3}{5}x^5 - x + C$.

Вариант 75.

1. $\frac{(x-11)(3x-8)}{6-x} < 0$;

$3(x-11)\left(x - 2\frac{2}{3}\right)(x-6) > 0$;



Ответ: $\left(2\frac{2}{3}; 6\right) \cup (11; \infty)$.

2. $2^{x+3} + 2^{x+1} - 7 \cdot 2^x = 48$; $3 \cdot 2^x = 48$; $2^x = 16$; $x = 4$. Ответ: 4.

3. $\cos x = -\frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. Учитывая условие, имеем:

$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$. Ответ: 0,8.

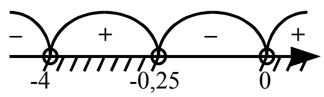
4. $f(x) = 2\ln x$; $f'(x) = \frac{2}{x}$, $k = f'(x_0)$; $k = f'(2) = 1$. Ответ: 1.

5. $f(x) = x^2 - 6x + 10$;

$$S = \int_{-1}^{3} \left(x^2 - 6x + 10\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 10x\right)\Bigg|_{-1}^{3} =$$

$$= \left(9 - 27 + 30\right) - \left(-\frac{1}{3} - 3 - 10\right) = 25\frac{1}{3}.$$ Ответ: $25\frac{1}{3}$.

Вариант 76.



1. $\frac{3x + 12x^2}{x + 4} > 0$;

$3x(4x + 1)(x + 4) > 0$;

Ответ: $(-4; -0{,}25) \cup (0; \infty)$.

2. $\log_3(12 - 5x) = 2$; $\log_3(12 - 5x) = \log_3 9$; $\begin{cases} 12 - 5x = 9, \\ 12 - 5x > 0; \end{cases}$ $x = 0{,}6$.

Ответ: 0,6.

3. $\frac{1}{1 + tg^2\alpha} + \frac{1}{1 + ctg^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} + \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} =$

$= \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = 1$; $1 = 1$, что и следовало доказать.

4. а) $D(f) = [-3; 5]$; б) $f(x) \geq 1$ при $x \in [-2{,}2; 0{,}5] \cup [4{,}7; 5]$;

в) функция возрастает на каждом из промежутков $[-3; -1]$ и $[3; 5]$, убывает на промежутке $[-1; 3]$;

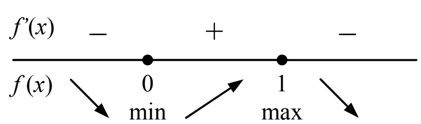
г) $f'(x) = 0$ при $x = -1$ и при $x = 3$;

д) $\max\limits_{[-3;5]} f(x) = f(-1) = 3$; $\min\limits_{[-3;5]} f(x) = f(3) = -4$.

5. $f(x) = 3x^2 - 2x^3 + 6$;

$f'(x) = 6x - 6x^2 = 6x(1 - x)$;

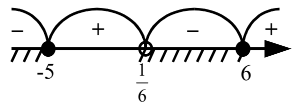
$f'(x) = 0$ при $x = 0$ и при $x = 1$;



Ответ: $x_{\min} = 0$; $x_{\max} = 1$.

Вариант 77.

1. $\dfrac{(x+5)(x-6)}{6x-1} \le 0;$



Ответ: $(-\infty;-5] \cup \left(\dfrac{1}{6};6\right].$

2. $243\left(\dfrac{1}{81}\right)^{3x+2} = 27^{x-3};$ $3^5 \cdot 3^{-4(3x+2)} = 3^{3(x+3)}$, $3^{5-12x+8} = 3^{3x+9}$,

$13 - 12x = 3x + 9$, $x = \dfrac{4}{15}$. Ответ: $\dfrac{4}{15}$.

3. $2\cos x = -1$, $[0;\ 2\pi]$;

$\cos x = -\dfrac{1}{2}$, $x = \pm\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) + 2\pi k, k \in Z;$ $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z.$

1) $0 \le \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k \le 2\pi;$ $-\dfrac{1}{3} \le k \le \dfrac{2}{3};$ $k = 0$. Тогда $x_1 = \dfrac{2\pi}{3}$.

2) $0 \le -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k \le 2\pi;$ $\dfrac{1}{3} \le k \le \dfrac{4}{3};$ $k = 1$. Тогда $x_2 = \dfrac{4\pi}{3}$

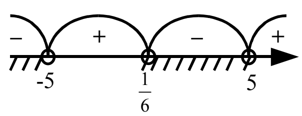
Ответ: $\dfrac{2\pi}{3}$; $\dfrac{4\pi}{3}$.

4. а) $D(f) = [-3{,}5;\ 4{,}5]$; б) $f(x) \le 2{,}5$ при $x \in [-2;\ 4{,}5]$;
в) функция возрастает на промежутке $[1;\ 3]$, убывает на промежутках $[-3{,}5;\ 1]$ и $[3;\ 4{,}5]$; г) $f'(x) = 0$ при $x = 3$;
д) $\max\limits_{[-3,5;4,5]} f(x) = f(-3{,}5) = 4;$ $\min\limits_{[-3,5;4,5]} f(x) = f(1) = -3.$

5. $f(x)=5-8x-x^2$; $f'(x)= -8-2x = -2(x+4)$; критическая точка $x = -4$.
$\max\limits_{[-6;-3]} f(x) = f(-4) = 21.$ Ответ: 21.

Вариант 78.

1. $\dfrac{x^2-25}{6x+1} < 0;$



$6(x+5)(x-5)\left(x+\dfrac{1}{6}\right) < 0;$

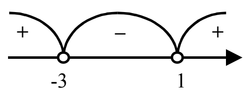
Ответ: $(-\infty;-5) \cup \left(-\dfrac{1}{6};5\right).$

2. $16\cdot 8^{2+3x}=1$; $2^4\cdot 2^{3(2+3x)}=1$, $2^{4+6+9x}=1$, $10+9x=0$, $x=-1\frac{1}{9}$. Ответ: $-1\frac{1}{9}$.

3. $\cos(3\pi+x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sqrt{2}$; $-\cos x-\cos x=\sqrt{2}$, $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

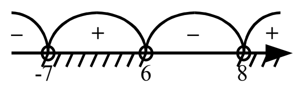
$x=\pm\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+2\pi k, k\in Z$; Ответ: $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k, k\in Z$.

4. а) $D(f)=[-3;\ 5{,}5]$; б) $1\le f(x)\le 2{,}5$ при $x\in\{-3\}\cup[-1;\ -0{,}2]\cup[2{,}6;\ 3]$; в) промежуток возрастания – $[-2;\ 1{,}5]$, промежутки убывания – $[-3;\ -2]$ и $[1{,}5;\ 5{,}5]$; г) $f'(x)=0$ при $x=-2$ и при $x=1{,}5$;
д) $\max\limits_{[-3;5{,}5]} f(x)=f(1{,}5)=4{,}5$; $\min\limits_{[-3;5{,}5]} f(x)=f(5{,}5)=-1$.



5. $y=x^3+3x^2-9x$;
$y'=3x^2+6x-9$; $3x^2+6x-9>0$ | : 3;
$x^2+2x-3>0$; $(x-1)(x+3)>0$.
Ответ: возрастает на $(-\infty;\ -3]$ и $[1;\ \infty)$.

Вариант 79.



1. $\frac{x^2-14x+48}{x+7}>0$;
$(x-6)(x-8)(x+7)>0$;
Ответ: $(-7;\ 6)\cup(8;\ \infty)$.

2. $\log_3(4-2x)-\log_3 2=2$; $\log_3(2-x)=\log_3 9$; $\begin{cases}2-x=9\\ x<2\end{cases}$; $x=-7$. Ответ: -7.

3. $\sin^2 x-\cos^2 x-1$, $[0;\ 2\pi]$;
$1-\cos^2 x-\cos x=1$; $\cos^2 x+\cos x=0$; $\cos x(\cos x+1)=0$;

$\cos x=0$ или $\cos x=-1$; $x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$ или $x=\pi+2\pi k$, $k\in Z$;

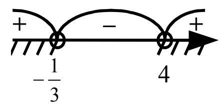
Ответ: $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3}{2}\pi$; π.

4. а) $D(f)=[-3;\ 6]$; б) $f(x)\ge 1$ при $x\in[-2{,}5;\ 0{,}7]\cup[4{,}5;\ 6]$;
в) промежутки возрастания – $[-3;\ -1]$ и $[2{,}5;\ 6]$, промежутки убывания – $[-1;\ 2{,}5]$;
г) касательные, параллельные оси абсцисс, касаются графика в точках $x=-1$ и $x=2{,}5$;
д) $\max\limits_{[-3;6]} f(x)=f(6)=4$; $\min\limits_{[-3;6]} f(x)=f(2{,}5)=-2{,}5$.

5. $S=12t-3r^2$; $v(t)=S'(t)=12-6t$; $v=0$ при $t=2c$. Ответ: $2c$.

Вариант 80.

1. $y = \lg\frac{3x+1}{x-4}$; $(3x + 1)(x – 4) > 0$;



Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (4; \infty)$.

2. $10^{3x+1} > 0{,}001$; $10^{3x+1} > 10^{-3}$. Т.к. $a = 10 > 1$,

то $3x + 1 > -3$; $x > -1\frac{1}{3}$. Ответ: $\left(-1\frac{1}{3}; \infty\right)$.

3. $3\mathrm{tg}^2 x – 1 = 0$; $tgx = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$.

Отрезку $[0; 2\pi]$ принадлежат $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6}$ и $x = \frac{7\pi}{6}$, $x = \frac{11\pi}{6}$.

Ответ: $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{6}$.

4. а) $D(f) = [–3; 5{,}5]$; б) $f(x) \geq 1$ при $x \in [–2{,}7; –0{,}3] \cup [4; 5{,}5]$;
в) промежутки возрастания – $[–3; –1{,}5]$ и $[2{,}5; 5{,}5]$, промежуток убывания – $[–1{,}5; 2{,}5]$;
г) касательные, параллельные оси абсцисс, касаются графика в точках $x = –1{,}5$ и $x = 2{,}5$;
д) $\max\limits_{[-3;5,5]} f(x) = f(5{,}5) = 5{,}5$; $\min\limits_{[-3;5,5]} f(x) = f(2{,}5) = -3$.

5. $S=1+4t–t^2$; $v(t)=S'(t) = 4 – 2t$; $v(t) = 0$ при $t = 2$ *с*. Ответ: 2 *с*.

Вариант 81.

1. $\left(27^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{4}{3}} = \left(3^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{4}{3}} = 1$. Ответ: 1.

2. $\log_{0,5}(2x + 1) > –2$; $\log_{0,5}(2x + 1) > \log_{0,5}4$;

$\begin{cases} 2x+1 < 4 \text{ (т.к. } a = 0{,}5 < 1), \\ 2x+1 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 1{,}5, \\ x > -0{,}5; \end{cases}$ Ответ: (-0,5; 1,5).

3. $\frac{1+tg^2\alpha}{1+ctg^2\alpha} - tg^2\alpha = \frac{1+tg^2\alpha - tg^2\alpha - tg^2\alpha ctg^2\alpha}{1+ctg^2\alpha} = \frac{0}{1+ctg^2\alpha} = 0.$

Значит, $\frac{1+tg^2\alpha}{1+ctg^2\alpha} = tg^2\alpha$;

4. а) $D(f) = [-2,5; 6]$; б) $f(x) \geq 1$ при $x \in [-2,5; -1,4] \cup [1; 5]$;
в) промежуток возрастания – $[0; 2]$, промежутки убывания – $[-2,5; 0]$ и $[2; 6]$;
г) прямые, параллельные оси абсцисс, касаются графика в точках $x = 0$ и $x = 2$;
д) $\max f(x) = f(-2,5)$; $\min f(x) = f(0) - 1,5$.

5. $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$; $k = f'(x_0) = 4x_0 - 5$; $k = 3$ при $4x_0 - 5 = 3$;
$x_0 = 2$, $f(x_0) = -1$. Ответ: (2; -1).

Вариант 82.

1. $7^{-2\log_7 5} = \left(7^{\log_7 5}\right)^{-2} = 5^{-2} = \frac{1}{25}$. Ответ: $\frac{1}{25}$.

2. $\frac{1}{8} < 2^{x-1} \leq 16$; $2^{-3} < 2^{x-1} \leq 2^4$, $-2 < x \leq 5$. Ответ: -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5.

3. $2\sin x - \sin^2 x = \cos^2 x$; $2\sin x = 1$,
$\sin x = \frac{1}{2}$, $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$. Ответ: $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$.

4. а) $D(f) = [-2,5; 5]$; б) $f(x) \geq 3$ при $x \in [-2,5; -0,5] \cup \{3,5\}$;
в) промежутки возрастания – $[1,5; 3,5]$, убывания – $[-2,5; 1,5]$ и $[3,5; 5]$;
г) $f'(x) = 0$ при $x = 1,5$;
д) $\max\limits_{[-2,5;5]} f(x) = f(-2,5) = 4,5$; $\min\limits_{[-2,5;5]} f(x) = f(5) = -3$.

5. $f(x) = 1 - 5x + 3x^2$; $k = f'(x_0) = -5 + 6x_0$;
$k = 1$ при $6x_0 - 5 = 1$, $x_0 = 1$, $f(x_0) = -1$. Ответ: (1; -1).

Вариант 83.

1. $\frac{2a^{-\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} - 3a^{-\frac{1}{3}}} = \frac{2a^{-\frac{1}{3}}}{a^{-\frac{1}{3}}(a-3)} = \frac{2}{a-3}$. При а = 4 $\frac{2}{4-3} = 2$.

Ответ: 2.

2. $\log_3(5x - 6) < \log_3 2 + 3$; $\log_3(5x - 6) < \log_3 54$;
$\begin{cases} 5x - 6 < 54, \\ 5x - 6 > 0; \end{cases}$; $\begin{cases} x < 12, \\ x > 1,2; \end{cases}$ $1,2 < x < 12$. Ответ: (1,2; 12).

3. $\sin(\pi + x) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; $-\sin x = \frac{1}{2}$;

$\sin x = -\frac{1}{2}, \quad x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$

Ответ: $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$

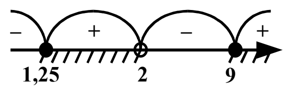
4. а) $D(f) = [-3; 5{,}5]$; б) $f(x) < -1$ при $x \in (-3; -1) \cup (2{,}5; 5{,}5]$;
в) промежутки возрастания – $[-3; 1]$, убывания – $[1; 5{,}5]$;
г) $f'(x) = 0$ при $x = -1$; д) $\max\limits_{[-3;5,5]} f(x) = 3{,}5$; $\min\limits_{[-3;5,5]} f(x) = -5{,}5.$

5. $f(x) = x^2 \ln x$; $f'(x) = 2x\ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2\ln x + 1).$

Ответ: $x(2\ln x + 1).$

Вариант 84.

1. $\frac{(x-2)(x-9)}{(4x-5)} \geq 0;$



Ответ: $(1{,}25; 2] \cup [9; \infty)$.

2. $2 \cdot 5^{x+2} - 10 \cdot 5^x = 8;$

$50 \cdot 5^x - 10 \cdot 5^x = 8$, $5^x = 5^{-1}$, $x = -1$ Ответ: -1.

3. $2\cos(\pi + 2x) = 1$; $-2\cos 2x = 1$;

$\cos 2x = -\frac{1}{2}$; $2x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi k, k \in Z$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z.$

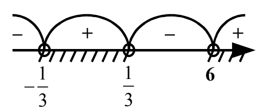
Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z.$

4. а) $D(f) = [-3; 6]$; б) $f(x) \leq -1$ при $x \in \{-1{,}5\} \cup [3{,}5; 6]$;
в) $f'(x) = 0$ при $x = -1{,}5$;
г) промежутки возрастания – $[-1{,}5; 1]$, убывания – $[-3; -1{,}5]$ и $[1; 6]$;
д) $\max\limits_{[-3;6]} f(x) = 4{,}5$; $\min\limits_{[-3;6]} f(x) = -3.$

5. $S=0{,}5t^2-3t+4$; $v(t)=S'(t) = t - 3$, $v(t) = 0$ при $t = 3$ с. Ответ: 3 с.

Вариант 85.

1. $\frac{9x^2 - 1}{x - 6} > 0$;



$(3x + 1)(3x - 1)(x - 6) > 0;$

Ответ: $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) \cup (6; \infty).$

2. $25^{1-3x}=\dfrac{1}{125}$; $5^{2(1-3x)}=5^{-3}$, $2-6x=-3$, $x=\dfrac{5}{6}$. Ответ: $\dfrac{5}{6}$.

3. $\sin\left(\pi-x\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=\sqrt{3}$; $\sin x+\sin x=\sqrt{3}$, $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$x=\left(-1\right)^k\dfrac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z$. Ответ: $\left(-1\right)^k\dfrac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z$.

4. а) $D(f)=[-3{,}5;\ 6]$;
б) $f(x)\geq 3{,}5$ при $x\in\{-0{,}5\}\cup[5{,}8;\ 6]$;
в) $f'(x)=0$ при $x=-0{,}5$ и при $x=3{,}5$;
г) промежутки возрастания – $[-3{,}5;\ -0{,}5]$ и $[3{,}5;\ 6]$, убывания – $[-0{,}5;\ 3{,}5]$;
д) $\max\limits_{[-3,5;6]}f\left(x\right)=4{,}5$; $\min\limits_{[-3,5;6]}f\left(x\right)=-3{,}5$.

5. $f(x)=4-x^2$; $F\left(x\right)=4x-\dfrac{x^3}{3}+C$;

$F\left(-3\right)=10:4\cdot\left(-3\right)-\dfrac{\left(-3\right)^3}{3}+C=10$, $C=13$;

Ответ: $4x-\dfrac{x^3}{3}+13$.

Вариант 86.

1. $\dfrac{a^{\frac{7}{3}}+a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}}$, $a=2$; $\dfrac{a^{\frac{7}{3}}+a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}}=\dfrac{a^{\frac{4}{3}}\left(a+a^{-1}\right)}{a^{\frac{4}{3}}}=a+\dfrac{1}{a}$.

При $a=2$ $a+\dfrac{1}{a}=2+\dfrac{1}{2}=2\dfrac{1}{2}$. Ответ: $2\dfrac{1}{2}$.

2. $\log_7(2x-1)<2$; $\log_7(2x-1)<\log_7 49$;

$\begin{cases}2x-1<49\\2x-1>0;\end{cases}$, ; $\begin{cases}x<25,\\x>0{,}5;\end{cases}$ $0{,}5<x<25$.

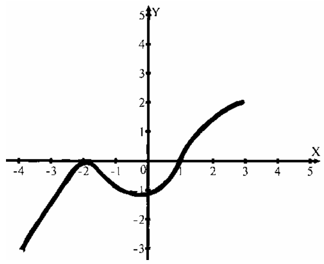
Ответ: $(0{,}5;\ 25)$.

3. $\cos\left(\pi+x\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}$;

$-\cos x=1$; $\cos x=-1$, $x=\pi+2\pi k$, $k\in Z$.

Ответ: $\pi+2\pi k$, $k\in Z$.

4.



5. $S = 0{,}5t^2 + 3t + 2$; $v(t) = S'(t) = t + 3$; $v(t) = 15$ при $t = 12$ с.
Ответ: 12 с.

Вариант 87.

1. $16^{0{,}5\log_4 10} = 4^{\log_4 10} = 10$. Ответ: 10.

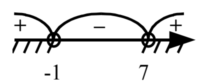
2. $0{,}5 < 2^{1-x} \le 32$; $2^{-1} < 2^{1-x} \le 2^5$.;$-1 < 1 - x \le 5$; $-4 \le x < 2$.
Ответ: -4; -3; -2; -1; 0; 1.

3. $\sin x - \sin^2 x = \cos^2 x$; $\sin x = 1$, $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

4. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4$; $f'(x) = 6x^2 - 6x$; $f'(-1) = 12$; $k = 12$.
Ответ: 12.

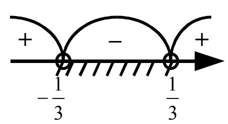
5. $y = -x^3 + 9x^2 + 21x$;
$y' = -3x^2 + 18x + 21$; $-3x^2 + 18x + 21 < 0$;
$x^2 - 6x - 7 > 0$. $(x - 7)(x + 1) > 0$.
Ответ: убывает на $(-\infty; -1]$ и $[7; \infty)$.



Вариант 88.

1. $y = \lg\dfrac{3x+1}{1-3x}$; $\dfrac{3x+1}{1-3x} > 0$;
$(3x + 1)(3x - 1) < 0$;

Ответ: $\left(-\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$.



2. $\left(\frac{1}{25}\right)^{2-x} < 125^{x+1}$; $5^{-2(2-x)} < 5^{3(x+1)}$, т.к. $-4 + 2x < 3x + 3$, $x > -7$.

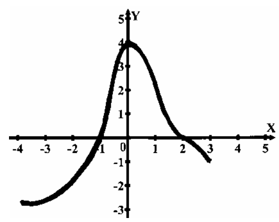
Ответ: $(-7; \infty)$.

3. $1 + ctg^2\alpha + \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha} =$

$= \frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha + \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) + \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} =$

$= \frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$; что и требовалось доказать.

4.



5. $f(x) = 5x + 7$;

$F(x) = \frac{5x^2}{2} + 7x + C$; $F(-2) = 4 : \frac{5(-2)^2}{2} + 7 \cdot (-2) + C = 4$; $C = 8$;

Ответ: $2,5x^2 + 7x + 8$.

Вариант 89.

1. $\frac{9a^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{9}{5}} + 2a^{-\frac{1}{5}}} = \frac{9a^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{4}{5}}\left(a + 2a^{-1}\right)} = \frac{9a}{a^2 + 2}$. При $a = 5$ $\frac{9a}{a^2+2} = \frac{9 \cdot 5}{5^2 + 2} = \frac{5}{3}$.

Ответ: $1\frac{2}{3}$.

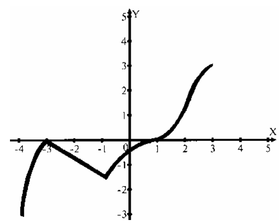
2. $\lg(0,5x) < -2$; $\lg(0,5x) < \lg 0,01$; $\begin{cases} 0,5x < 0,01, \\ x > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0,02, \\ x > 0; \end{cases}$

Ответ: $(0; 0,02)$.

3. $\sin x = \frac{4}{5}, \ \frac{\pi}{2} < x < \pi; \ \cos x = -\sqrt{1-\sin^2 x} = -\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5}.$

Ответ: –0,6

4.

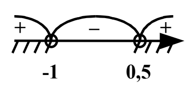


5. $f(x) = x - x^2; \quad F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C; \ \mathrm{F}(2) = 10; \frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} + \mathrm{C} = 10;$

$\mathrm{C} = 10 - 2 + 2\frac{2}{3} = 10\frac{2}{3}.$ Ответ: $\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 10\frac{2}{3}.$

Вариант 90.

1. $y = \lg\frac{x+1}{2x-1}; \ (x + 1)(2x - 1) > 0;$



Ответ: $(-\infty; -1) \cup (0,5; \infty)$.

2. $32^{2x+3} < 0,25;$

$2^{5(2x+3)} < 2^{-2}$. $10x + 15 < -2, x < -1,7$. Ответ: $(-\infty; -1,7)$.

3. $4\sin^2 x = 3; \ \sin^2 x = \frac{3}{4}; \ \sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z.$

4. а) $D(f) = [-3; 6]$;

б) $-1,5 \le f(x) \le 4$ при $x \in [-2,6; 0,5] \cup [4; 6]$;

в) $f'(x) = 0$ при $x = -1$ и при $x = 2$;

г) промежуток возрастания – $[-3; 2]$, убывания – $[2; 6]$;

д) $\max\limits_{[-3;6]} f(x) = f(2) = 5,5; \ \min\limits_{[-3;6]} f(x) = f(-3) = -2,5.$

5. $f(x) = 6(x^2 - 1)$, $g(x) = 6x^2 - 6x + 1$ и $q(x) = 6x(x - 1)$;

$F(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1; \quad F'(x) = 6x^2 - 6x.$

Т.к. $F'(x) = q(x)$, то функция $F(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ является

Первообразной функции $q(x) = 6x(x - 1)$. Ответ: $q(x)$.

Вариант 91.

1. $3^{\frac{1}{2}\log_3 4}$; $3^{\frac{1}{2}\log_3 4} = 3^{\log_3 2} = 2.$ Ответ: 2.

2. $\frac{1}{3} < 3^{3+x} < 9;$ $3^{-1} < 3^{3+x} < 3^2$. $-1 < 3 + x < 2$, $-4 < x < -1$.

Ответ: -3; -2.

3. $\cos x + \cos^2 x = \frac{1}{2} - \sin^2 x;$ $\cos x = \frac{1}{2} - 1,$ $\cos x = -\frac{1}{2},$

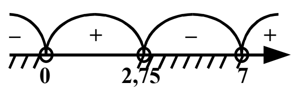
$$x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi k, k \in Z; \quad x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z.$$

Ответ: $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z.$

4. а) $D(f) = [-2,5; 6]$; б) $-1 \le f(x) < 2$ при $x \in (-2; -0,5] \cup [2,8; 3,8)$;
в) $f'(x) = 0$ при $x = 1,5$ и $x = 4,5$;
г) промежуток возрастания – [1,5; 6], убывания – [–2,5; 1,5];
д) $\max\limits_{[-2,5;6]} f(x) = f(6) = 5,5;$ $\min\limits_{[-2,5;6]} f(x) = f(1,5) = -2,5.$

5. $f(x) = 1 - 5x - x^2$; $f'(x) = -5 - 2x$;
$k = f'(x_0) = 9$; $-5 - 2x_0 = 9$, $x_0 = -7$, $f(x_0) = -13$. Ответ: (–7; –13).

Вариант 92.



1. $\frac{x(4x-11)}{x-7} < 0;$

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (2,75; 7)$.

2. $16^{5-3x} = 0,125^{5x-6}$;

$2^{4(5-3x)} = 2^{-3(5x-6)}$, $20 - 12x = -15x + 18$, $x = -\frac{2}{3}$. Ответ: $-\frac{2}{3}$.

3. $\sin^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$,

что и требовалось доказать

4. а) $D(f) = [-3; 6]$; б) $f(x) \ge 4$ при $x \in \{-1,5\} \cup [5; 6]$;
в) $f'(x) > 0$ на промежутках (–3; –1,5) и (2,5; 6),
$f'(x) < 0$ на промежутке (–1,5; 2,5);
г) $x = 2,5$, $x = -1,5$
д) $\max\limits_{[-3;6]} f(x) = f(6) = 5;$ $\min\limits_{[-3;6]} f(x) = f(2,5) = -3.$

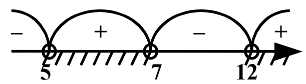
5. $f(x) = x^3 \ln x$;

$$f'(x) = \left(x^3\right)' \ln x + x^3 \left(\ln x\right)' = 3x^2 \ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x} = 3x^2 \ln x + x^2;$$

$f'(4) = 3 \cdot 4^2 \ln 4 + 4^2 = 16(3\ln 4 + 1)$.   Ответ: $16(3\ln 4 + 1)$.

Вариант 93.

1. $\dfrac{x^2 - 19x + 84}{2(x-5)} > 0$;



$2(x-7)(x-12)(x-5) > 0$;

$x \in (5; 7) \cup (12; \infty)$.   Ответ: $(5; 7) \cup (12; \infty)$.

2. $\lg(5x+2) = \dfrac{1}{2}\lg 36 + \lg 2$;

$\lg(5x + 2) = \lg(6 \cdot 2)$; $\begin{cases} 5x + 2 = 12, \\ 5x + 2 > 0; \end{cases}$ $x = 2$.   Ответ: 2.

3. $1 + \operatorname{tg}^2\alpha + \dfrac{1}{\sin^2\alpha} - \dfrac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} + \dfrac{1}{\sin^2\alpha} - \dfrac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = 0$,

что и требовалось доказать.

4. а) $D(f) = [-3{,}5; 5]$; б) $f(x) \le -2$ при $x = -3{,}5$;

в) прямые, параллельные оси абсцисс, касаются графика в точках $(-1{,}5; 3)$, $(0; -0{,}5)$ и $(1; -1{,}5)$;

г) промежутки возрастания – $[-3{,}5; -1{,}5]$ и $[1; 5]$, убывания – $[-1{,}5; 1]$;

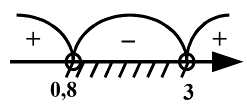
д) $\max\limits_{[-3,5;5]} f(x) = f(-1{,}5) = f(5) = 3$; $\min\limits_{[-3,5;5]} f(x) = f(-3{,}5) = -2$.

5. $f(x) = -x^2 + 5x$. $f(x) = 0$ при $x = 0$ и $x = 5$.

$$S = \int_0^5 \left(-x^2 + 5x\right)dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2}\right)\Bigg|_0^5 = -\frac{125}{3} + \frac{125}{2} = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6}.$$

Вариант 94.

1. $y = \lg\dfrac{4-5x}{x-3}$; $\dfrac{4-5x}{x-3} > 0$;



$(5x - 4)(x - 3) < 0$;

$5(x - 0{,}8)(x - 3) < 0$;

Ответ: $(0{,}8; 3)$.

2. $3^{x-3}+\frac{1}{3}\cdot 3^x>10;\quad \frac{1}{27}\cdot 3^x+\frac{1}{3}\cdot 3^x>10,\ \frac{10}{27}\cdot 3^x>10\ ,\ x>3$

Ответ: (3; ∞).

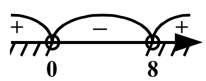
3. $2\sin^2 x-1=0\ \ 1-\cos 2x-1=0,\ \cos 2x=0,$

$2x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},k\in Z.$ Ответ: $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},k\in Z.$

4. а) $D(f)=[-2;6]$; б) $f(x)>0$ при $x\in[-2;4)$;
в) $f'(x)>0$ на промежутке $(-1;1)$,
$f'(x)<0$ на промежутках $(-2;-1)$, $(1;2{,}5)$ и $(2{,}5;6)$;
г) $x=-1,\ x=1$;
д) $\max\limits_{[-2;6]} f(x)=5{,}5;\ \ \min\limits_{[-2;6]} f(x)=-1{,}5.$

5. $y'=2x-x^2.\ \ y=x^2-\frac{x^3}{3}+C.$ Ответ: $y=x^2-\frac{x^3}{3}+C.$

Вариант 95.



1. $y=\lg(x^2-8x)$.
$x^2-8x>0$;

Ответ: $(-\infty;0)\cup(8;\infty)$.

2. $6\le 6^{1-x}<216;\ \ 6\le 6^{1-x}<6^3.$
Т.к. $a=6>1$, то $1\le 1-x<3$, $-2<x\le 0$. Ответ: -1; 0.

3. $\sin^2 x-0{,}25=0\ \ \ 1-\cos 2x=0{,}5;$

$\cos 2x=\frac{1}{2},\ 2x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,k\in Z.$

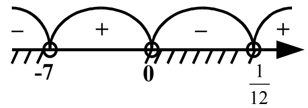
Ответ: $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,k\in Z.$

4. а) $D(f)=[-3{,}5;6]$; б) $f(x)<0$ при $x\in[-3{,}5;-3)\cup(1{,}5;2{,}5)$;
в) $f'(x)>0$ на промежутках $(-3{,}5;-1{,}5)$, $(2;4)$ и $(4;6)$,
$f'(x)<0$ на промежутке $(-1{,}5;2)$;
г) $x=-1{,}5$; $x=2$;
д) $\max\limits_{[-3{,}5;6]} f(x)=5{,}5;\ \ \min\limits_{[-3{,}5;6]} f(x)=-2.$

5. 1) $y=6x$; $D(y)=R$; $y'=6$; $6>0$; y возрастает;
2) $y=-3x+1$; $D(y)=R$; $y'=-3$; $-3<0$; y убывает;
3) $y=-3x^2$; $D(y)=R$; $y'=-6x$; $y'=0$, если $x=0$;
4) $y=x^3+x$; $D(y)=R$; $y'=3x^2+1$; $y'>0$ на R, значит, на всей области определения возрастает.
Ответ: $y=6x$ и $y=x^3+x$.

Вариант 96.

1. $\frac{7x+x^2}{12x-1}<0$



$(7x + x^2)(12x - 1) < 0$.

Ответ: $\left(-\infty;-7\right)\cup\left(0;\frac{1}{12}\right)$.

2. $\log_{\frac{1}{2}}\left(2x-1\right)-\log_{\frac{1}{2}}16=5;$

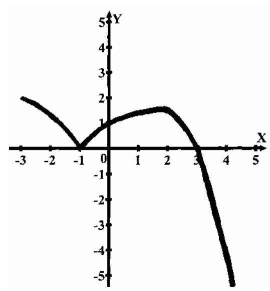
$\log_{\frac{1}{2}}\frac{2x-1}{16}=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{32};\quad \begin{cases}32\left(2x-1\right)=16,\\2x-1>0;\end{cases}\quad \begin{cases}x=0,75,\\x>0,5;\end{cases}\quad x=0,75.$

Ответ: 0,75.

3. $\sin^2\alpha+tg^2\alpha+\cos^2\alpha=1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha};$

что и требовалось доказать.

4.



5. $S'(t) = t - 3$; $S'(t) = 0$ при $t=3$

$S'(t) > 0$ при $t > 3$ и $S'(t)<0$ при $t < 3$.

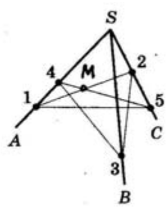
Значит $t = 3$ — точка минимума $S(t)$ и $S_{\min}(t) = S(3) = 3,5$ (м).

Ответ: 3,5(м).

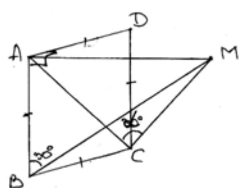
Раздел 2. Задания 6,7 для экзамена «Математика»

Вариант 1.

6.



7.



$AB = a$, т.к. AC – диагональ $ABCD \Rightarrow \ AC = \sqrt{2}a$

из ΔAMB: $tg\angle ABM = \dfrac{AM}{AB} \Leftrightarrow$

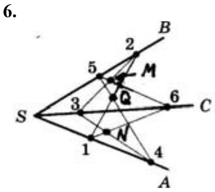
$$\Leftrightarrow tg30^\circ = \frac{AM}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{3}}{3}a \Rightarrow$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{AM}{AC} = \frac{\sqrt{3}a}{3} : \left(\sqrt{2}a\right) = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}};$$

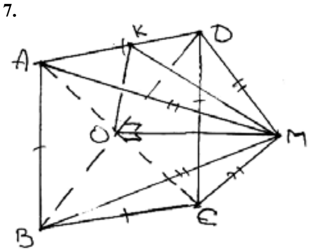
Ответ: $\text{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$.

Вариант 2.

6.



7.



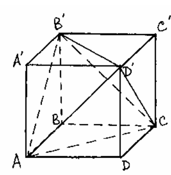
$AB = 4$ см,
$OM = 6$ см

$$AM = \sqrt{AO^2 + OM^2} = \sqrt{\left(\frac{AC}{2}\right)^2 + OM^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{AD^2 + DC^2}}{2}\right)^2 + OM^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{AD^2}{2} + OM^2} = \sqrt{\frac{4^2}{2} + 6^2} = 2\sqrt{11} \text{ (см)}.$$ Ответ: $AM = 2\sqrt{11}$. (см).

Вариант 3.

6. Ребра куба равны, значит равны и диагонали граней.
Данный многогранник имеет своими ребрами шесть диагоналей граней куба, значит, т.к. его грани равносторонние, равные между собой треугольники, то это тетраэдр. (см. рис.)



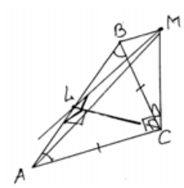
7. $BC = AC = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ см.

$\Delta BCM = \Delta AMC$:
=> ΔAMB – равнобедренный,

$BL = AL = \dfrac{1}{2}AB = 2$ см.

$ML = \sqrt{BM^2 - BL^2} =$
$= \sqrt{MC^2 + BC^2 - BL^2} = \sqrt{4 + 12 - 4} = 2\sqrt{2}$

Ответ: $2\sqrt{2}$ см.

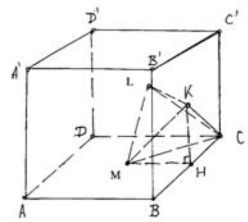


Вариант 4.

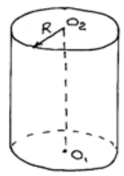
6. Пусть a – сторона куба, тогда по свойствам куба и теореме Пифагора имеем:

$$CK = CL = CM = ML = LK = MK = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Значит искомый многогранник является тетраэдром.



7.



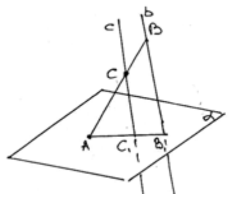
$S_{осн.} = \pi R^2 = 16\pi$ см^2
$S_{бок.} = l \cdot H = 2\pi R \cdot H = 8\pi H = 2S_{осн.} = 32\pi$ =>
$H = 4$ (см).
$V_{цил.} = H \cdot S_{осн.} = 4 \cdot 16\pi = 64\pi$ (см^3).
Ответ: 64π см^3.

Вариант 5.

6. Искомый многогранник – правильная треугольная пирамида с основанием LMN, где $LM=MN=NL$, $\Delta LNQ=\Delta MLP$, т.к. $QN = QH = PL = PM$, с равным углом между ними, т.к. $AP \perp SB$, $CP \perp SP$ и $BQ \perp SA$, $CQ \perp SA$ (двугранные углы, образованные боковыми гранями правильной треугольной пирамиды равны между собой), для доказательства $MN = LN$ поступают аналогично.

Аналогично, по равенству граней и равенству двугранных углов, образованных плоскостью основания и боковой стороной правильной пирамиды, и по тому, что ΔABC равносторонний и его высоты есть медианы, т.е. $HH_1 = HH_2 = HH_3$, доказывается, что $HL = HM = HN$.

7.



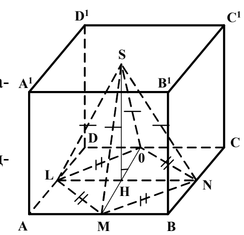
Из подобия ΔAC_1C и AB_1B имеем $\frac{AC_1}{AB_1} = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{3} \Rightarrow AB_1 = 18$ (см).

Ответ: $AB_1 = 18$ см.

Вариант 6.

6. В основании искомого многогранника пол-ся квадрат, т.к. $\Delta AML = \Delta BMN = \Delta CNO = \Delta DOL$, т.к. $ABCD$ – квадрат и его углы прямые, и L, M, N, O – середины сторон квадрата. SH – высота, H – центр основания, значит $SLMNO$ – правильная четырехугольная пирамида, в которой $\Delta SMN = \Delta SNO = \Delta SOL = \Delta SLM$.

7. *см. рис. вариант 3. Задача 7.*



$\Delta BCM = \Delta AMC$ =>

=> ΔAMB – равнобедренный:

$AM = MB$, $ML \perp AB$ => ML – медиана $\Delta AMB \Rightarrow AL = LB = \frac{AB}{2}$.

ΔALC прямоугольный и равнобедренный (т.к. $\angle CAL = 45°$)=>

=> $LC = AL = \frac{AB}{2}$.

$$CM = \sqrt{LM^2 - LC^2} = \sqrt{LM^2 - \frac{AB^2}{4}} = \sqrt{25-9} = 4 \text{ (см)}.$$

Ответ: $CM = 4$ см.

Вариант 7.

6. Т.к. прямые не имеют общих точек и не задают одну плоскость (т.е. плоскости α принадлежат точки: A, M, N, а плоскости β принадлежат точки: B, N, M). Значит, прямые секущиеся.

7.

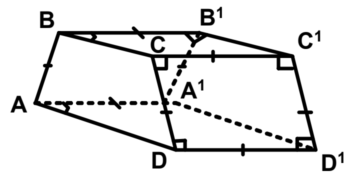


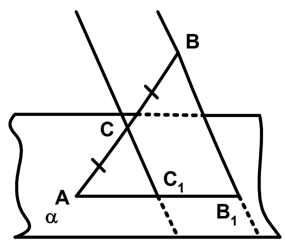
ABB_1A_1=CDD_1C_1, т.к. это квадраты со стороной 6 см. AB=CD=6см.
Пусть $AD = 2x$ => $BC = x$ из условия.
$S_{бок.} = H(2x + x + AB + CD) = (3x + 12) \cdot H = (3x + 12) \cdot 6 = 144$ см^2
$18x = 72$; $x = 4$ (см).
В трапеции АВСД высота вычисляется по т. Пифагора и равна
$h = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{AD - BC}{2}\right)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ (см). $S_{осн} = \frac{1}{2}h(BC + AD)$;

$S_{осн} = 24\sqrt{2}$ см^2; $V = 144\sqrt{2}см^3$. Ответ: $V = 144\sqrt{2}$ см^3.

Вариант 8.

6. Плоскость разбивает призму на две пирамиды:
1. с вершиной *C'* и с основанием ΔABC,
2. с вершиной *C'* и основанием *ABB'A'* (параллелограмм).

7.

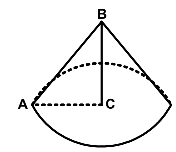


$\Delta AC_1C \sim \Delta ABB_1$, значит $\frac{AC}{AB} = \frac{AC_1}{AB_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow AB_1 = 2AC_1 = 16$ см.

Ответ: $AB_1 = 16$ см.

Вариант 9.

6. Если точки *A*, *B*, *A'*, *B'* лежали бы в одной плоскости, то *AB* было бы параллельно *B'A'*, но (см. рис.) *AB* не параллельно *B'A*, значит, *AA'* и *BB'* – секущиеся.



7. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot H$

$BC = AC \cdot tg\angle BAC = AC \cdot tg30^\circ = \sqrt{3}$ см.

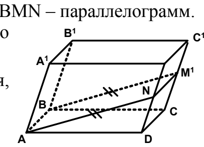
$V = \frac{1}{3}\pi \cdot BC \cdot AC^2 = \frac{1}{3}\pi \cdot \sqrt{3} \cdot 9 = 3\sqrt{3}\pi$ см^3.

Ответ: $V = 3\sqrt{3}\pi$ см^3.

Вариант 10.

6. Плоскость, проходящая через *A*, *B* и *M* (середину отрезка *CC'*), пересекает и ребро *DD'*, а поскольку *ABCD* – параллелограмм, то *AB* || *CD*, а т.к. грань *ABB'A'* параллельна *CDD'C'*, то *AB* || *MN*, значит MN || DC.

Тогда □MNDC – параллелограмм, т.е. MN = DC, т.е. MN = AB, а значит по признаку параллелограмма □ABMN – параллелограмм.



7. Так как пирамида правильная, то

$h' = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$, где *a* – ребро основания,

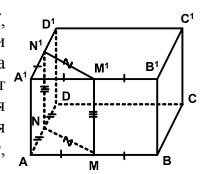
h – высота, h' – высота боковой грани.

$a = 2\sqrt{(h')^2 - h^2} = 2\sqrt{225 - 144} = 18$ (см).

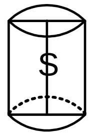
$b = 2\sqrt{h^2 + (\frac{a\sqrt{2}}{2})^2} = \sqrt{144 + 162} = \sqrt{306}$ (см). Ответ: $\sqrt{306}$ (см).

Вариант 11.

6. По условию *AM = A'M'* и *AM* || *A'M'*, значит, *AMM'A'* – параллелограмм, и *AA'* || *MM'*, отсюда *AA'* параллельна плоскости данного сечения, значит *AA'* || *NN'*, т.к. грань *ADD'A'* пересекается с плоскостью сечения в *NN'*. Верхняя грань параллельна нижней, и значит, *MN* || *M'N'*.



Т.к. $MN \parallel M'N'$ и $NN' \parallel MM'$, то $MNN'M'$ – параллелограмм, $MN = M'N'$ и $MM' = NN'$.



7.

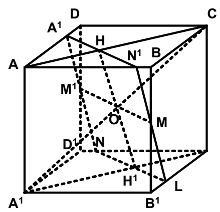
$S_{\text{сеч.}} = 2R \cdot H = 20$ см^2

$S_{\text{бок.}} = 2\pi R \cdot H = 20\pi$ см^2

Ответ: $S_{\text{бок.}} = 20\pi$ см^2.

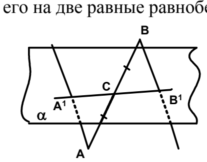
Вариант 12.

6.



Проведем перпендикуляр из точки M к $A'C$, основание этого перпендикуляра будет точка – центр куба, значит, эта плоскость пересекает ребро DD' в середине (точка M'), т.е. $MM' \perp A'C$. Плоскость данного сечения пересекает еще ребра: AB в точке N' (симметричной относительно точки O точки N на ребре $C'D'$), и AD в точке L' (симметричной относительно точки O точки L на $B'C'$), далее еще ребра $C'D'$ и $B'C'$ аналогично, и получаем шестиугольник $LMN'L'M'N'$ с центром O.

Особенность: Диагональ ММ*'* этого шестиугольника разбивает его на две равные равнобедренные трапеции.



7.

т. $C \in \alpha$ и т. $C \in AA_1BB_1$

т. $C \in A_1B_1$; $AA_1C \sim CBB_1$

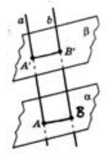
$AC : CB = A_1C : CB_1 = 1 : 1$

$AC : AB = A_1C : A_1B_1 = 1 : 2$

$\Rightarrow A_1B_1 = 2A_1C = 16$ см.

Ответ: $A_1B_1 = 16$ см.

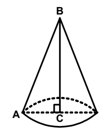
Вариант 13.



6.

Проведем через точки A, B и A', B' прямые. Из рисунка видно, что $AB \parallel A'B'$ и $AB = A'B'$, значит, $ABB'A'$ – параллелограмм, и $AA' \parallel BB'$, т.е. a и b – параллельные прямые.

7. Из прямоугольника ΔABC BC = 8см.



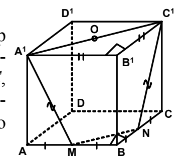
$$V=\frac{1}{3}S_{осн.}\cdot H=$$

$$=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot H=\frac{1}{3}\pi AC^2\cdot BC=\frac{1}{3}\pi\cdot 36\cdot 8=96\pi \text{ см}^3.$$

Ответ: V = 96π $см^3$.

Вариант 14.

6.



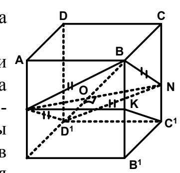
Плоскость сечения проходит через центр верхней грани, и т.к. *MN* параллельна нижней диагонали *AC* (и *AC* || *A'C'*), то *MN* || *AC*, и значит, сечение есть трапеция *MNC'A'*, которой *MA'* = *NC'*, т.к. Δ*AMA'* = Δ*CNC'* по двум катетам.

7. *см. рис. варианта 3. задачи 7.*

Так как Δ*ALC* – равнобедренный, то *AL* = *BL* = ½ *AB* = 4 см. ∠*ALC* также равнобедренный (∠*CAL* = 45°, ∠ *CLA* = 90°). Значит $CL=AL=4$ см. $ML=\sqrt{MC^2+CL^2}=\sqrt{16+9}=5$ (см).

Ответ: *ML* = 5 см.

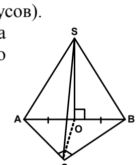
Вариант 15.



6. Проведем MK || A′B′. Тогда K – середина стороны BB.

Из свойств куба заключаем, что □MD′C′K и □KBNC′ – параллелограммы. Откуда MD′||BN, а значит D′ принадлежит искомому сечению. Из свойства куба и теоремы Пифагора имеем: BN=DN=MD′ = MB, т.е. в сечении получается ромб, не являющийся квадратом (как легко показать из теоремы косинусов).

7. Т.к. у прямоугольного треугольника середина гипотенузы – это центр описанной окружности, то



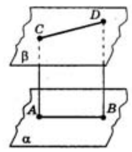
$AO=OB=OC=\frac{1}{2}\sqrt{36+64}=5$ см, т.е.

$\Delta OSA=\Delta COS=\Delta SOB\Rightarrow SA=SC=SB=$

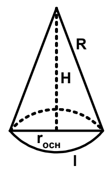
$=\sqrt{SO^2+AO^2}=\sqrt{100+25}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$.

Ответ: $SA=SB=SC=5\sqrt{5}$ см.

Вариант 16.



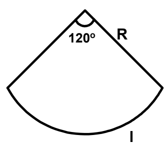
6.
Предположим, что AC и BD лежат в одной плоскость. Тогда плоскости (ACBD), пересекает параллельные плоскости α и β по параллельным прямым AB и CD. Но как видно из рисунка AB $\nparallel$ CD, значит прямые AC и BD не лежат в одной плоскости, т.е. являются секущими.



7.
Найдем l из рис. 16.7. б):

$l = \frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi R = \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot 4 = \frac{8}{3}\pi$ (см). l из рис. 16.7. а):

$l = 2\pi r_{осн.} \Rightarrow r_{осн.} = \frac{4}{3}$ (см) $\Rightarrow S_{осн.} = \pi r^2_{осн.} = \frac{16}{9}\pi$



$V_{кон.} = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot H = \frac{16}{27}\pi \cdot H$

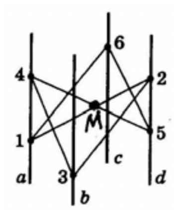
$H = \sqrt{R^2 - r^2_{осн}} = \sqrt{16 - \frac{16}{9}} = \frac{8}{3}\sqrt{2}$ (см).

$V_{кон.} = \frac{16}{27}\pi \cdot \frac{8}{3}\sqrt{2} = \frac{128\sqrt{2}}{81}\pi$ (см^3).

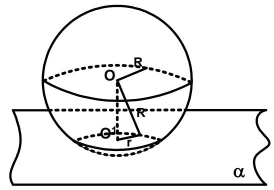
Ответ: $V = \frac{128\sqrt{2}}{81}\pi$ (см^3).

Вариант 17.

6.



7.

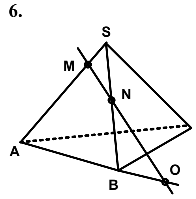


$R = OA = \sqrt{OO_1^2 + O_1A^2} = \sqrt{64 + 225} = 17$ (см);

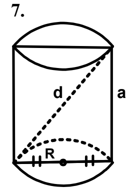
$S_{\text{пов.}} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 17^2 = 1156\pi$ (см^2). Ответ: 1156π (см^2).

Вариант 18.

6.



7.



$d = \sqrt{2}a = 2\sqrt{2}R \Rightarrow$

$\Rightarrow R = 4$ см $\Rightarrow H = 8$ см.

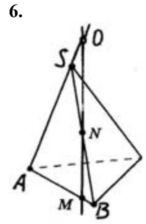
$S_{\text{осн.}} = \pi R^2 = 16\pi$ см^2;

$V = 16\pi \cdot 8 = 128\pi$ см^3.

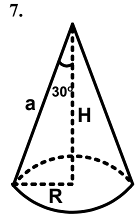
Ответ: $V = 128\pi$ см^3.

Вариант 19.

6.



7.



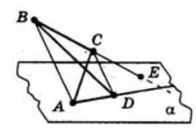
$a = \dfrac{R}{\cos 30^\circ} = 6$ (см).

$S_{\text{бок.}} = \pi Ra$.

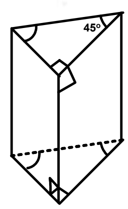
$S_{\text{бок.}} = \pi \cdot 3 \cdot 6 = 18\pi$ см^2.

Ответ: $S_{\text{бок.}} = 18\pi$ см^2.

Вариант 20.



6.
Точка E не принадлежит прямой AD, значит отрезки не пересекаются, так как прямые BC и AD скрещивающиеся.



7. В основании лежит равнобедренный треугольник с $\angle = 90°$; $V = S_{\text{осн.}} \cdot H = \dfrac{1}{2}a^2 \cdot H \Rightarrow H = \dfrac{2V}{a^2}$;

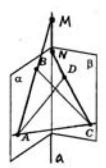
$H = \dfrac{2 \cdot 108}{36} = 6$ см. $S_{\text{пол.}} = 2S_{\text{осн.}} + S_{\text{бок.}} =$

$= a^2 + 2aH + \sqrt{a^2 + a^2} \cdot H = a^2 + 2aH + \sqrt{2}aH =$

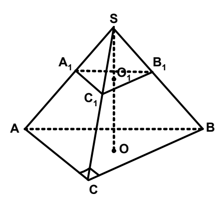
$= 36 + 2 \cdot 6 \cdot 6 + \sqrt{2} \cdot 6 \cdot 6 = 36(3 + \sqrt{2})$ см^2.

Ответ: $S_{\text{пол.}} = 36(3 + \sqrt{2})$ см^2.

Вариант 21.



6.
Точки A, B, C, D, не лежат в одной плоскости, следовательно прямые AD и BC – скрещивающиеся.



7. $\Delta ABC \sim A_1B_1C_1$.

$K = \dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{SO}{So_1} = 2$ – коэффициент.

Значит их площади относятся как 4:1

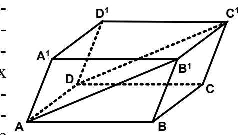
$S_{A_1B_1C_1} = \dfrac{1}{4}S_{ABC}$.

Второй катет $S\Delta ABC$ = 12 см;

S_{ABC} = ½ 9 · 12 = 54

$S_{A_1B_1C_1} = \dfrac{27}{2}$ см^2. Ответ: $S_{A_1B_1C_1} = \dfrac{27}{2}$ см^2.

Вариант 22.



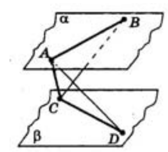
6. Плоскость *ADB'* разбивает параллелепипед на равные призмы с основаниями – треугольниками, получаемые из параллелограмма (боковых граней) и его диагонали, которая разбивает его на два равных треугольника. У многогранников, боковые ребра равны и параллельны.

7. *см. рис. варианта 2. задачи 7.*

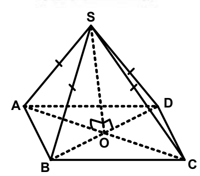
$AC = \sqrt{2}AB = 4\sqrt{2}$ см; $OC = \frac{1}{2}AC = 2\sqrt{2}$ см;

$OM = \sqrt{CM^2 - OC^2} = \sqrt{36 - 8} = 2\sqrt{7}$ см. Ответ: $OM = 2\sqrt{7}$ см.

Вариант 23.



6.
Если бы прямые AD и BC пересекались, то прямые AB и CD лежали бы в одной плоскости, а занчит были бы параллельны, но это не так. Так что AD и BC скрещивающиеся.



7. $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$ см;

$AO = \frac{1}{2}AC = 5$ см;

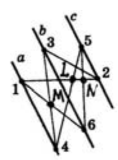
$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{169 - 25} = 12$ см;

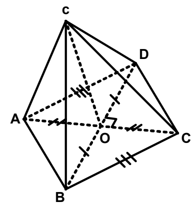
$V = \frac{1}{3}S_{осн.} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 8 \cdot 12 = 192$ см^3;

Ответ: $V = 192$ см^3.

Вариант 24.

6.





7. $S_{осн.} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$ (см^2);

$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} =$

$= \sqrt{SB^2 - \left(\frac{BD}{2}\right)^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$ (см);

$V = \frac{1}{3}SO \cdot S_{осн.} = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 4 = 32$ (см^3);

Ответ: V = 32 см^3.

Вариант 25.

6. Та же задача, что вариант 14 (6), только рис. повернуть «кверху ногами».

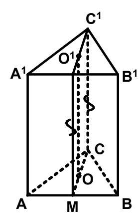
7.

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$; $r = 3$ см.

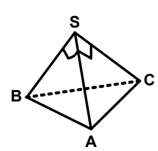
$S = 4\pi r^2 = 36\pi$ см^2.

Ответ: S = 36π см^2.

Вариант 26.



6. Сечение проходит через одно из ребер, т.к. прямая *OO'*, соединяющая центры оснований, параллельна каждому из боковых ребер. Углы у сечения прямые, значит, *CMM'C'* – прямоугольник, т.е. *MC* = *M'C'* и *CC'* = *MM'*.



7. Пусть SB = SA = 6 см; SC = 8 см;

$AB = \sqrt{SB^2 + SA^2} = 6\sqrt{2}$ см;

$AC = \sqrt{SA^2 + SC^2} = 10$ см;

$BC = \sqrt{SC^2 + SB^2} = 10$ см;

$P_{осн.} = 6\sqrt{2} + 10 + 10 = \left(20 + 6\sqrt{2}\right)$ см;

$P = \left(10 + 3\sqrt{2}\right)$ см;

$S_{\text{осн.}} = \sqrt{\left(10 + 3\sqrt{2}\right)\left(10 - 3\sqrt{2}\right)3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}} =$

$= \sqrt{(100 - 18) \cdot 9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}\sqrt{82} = 6\sqrt{41}$ см^2;

$S_{\text{бок.}} = S_{\text{SAB}} + S_{\text{SBC}} + S_{\text{SAC}}$; $S_{\text{ACS}} = S_{\text{BCS}} = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$ см^2;

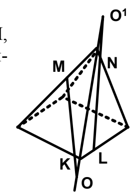
$S_{SAB} = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18$ см^2; $S_{\text{пов.}} = 6\sqrt{41} + 18 + 24 + 24 = (66 + 6\sqrt{41})$ (см^2)

Ответ: $S_{\text{пов.}} = (66 + 6\sqrt{41})$ см^2.

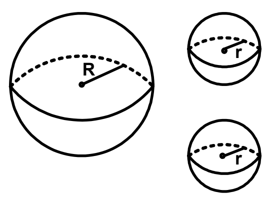
Вариант 27.

6.

Как видно из достроенного рисунка, точки K, M, N, и L не лежат в одной плоскости, значит прямые KN и LM – скрещивающиеся.



7.

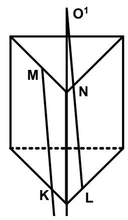


$S_{\text{пов1}} = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 16 = 64\pi$ см^2; $2S_{\text{пов1}} = S_{\text{пов2}} = 128\pi$ см^2;

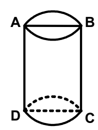
$S_{\text{пов2}} = 4\pi R^2 \Rightarrow R = \sqrt{\dfrac{S_{пов2}}{4\pi}} = \sqrt{\dfrac{128\pi}{4\pi}} = 4\sqrt{2}$ см;

$V_2 = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 64 \cdot 2\sqrt{2} = \dfrac{512\sqrt{2}}{3}\pi$ см^3; Ответ: $V = \dfrac{512\sqrt{2}}{3}\pi$ см^3.

Вариант 28.



6. Как видно из достроенного рисунка, точки К, М, N, и L не лежат в одной плоскости, значит прямые KM и LN – скрещивающиеся.



7. $S_{пол.} = 2S_{осн.} + S_{бок.}$

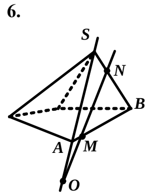
$S_{осн.} = \pi R^2 = \pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 9\pi$ см^2;

$S_{бок.} = 2\pi R \cdot AD = 2\pi\left(\frac{AB}{2}\right) \cdot AD = 60\pi$ см^2;

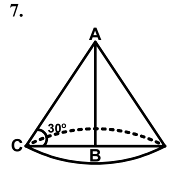
$S_{пол.} = 18\pi + 60\pi = 78\pi$ см^2; Ответ: $S_{пол.} = 78\pi$ см^2.

Вариант 29.

6.



7.



$AB = AC \cdot \sin 30^\circ = 6$ см;

$CB = AC\cos 30^\circ = 6\sqrt{3}$ см;

$V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot AB =$

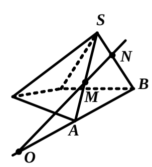
$= \frac{1}{3}\pi BC^2 \cdot AB =$

$\frac{1}{3}\pi \cdot 36 \cdot 3 \cdot 6 = 216\pi$ см^3;

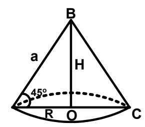
Ответ: $V = 216\pi$ см^3.

Вариант 30.

6.



7. $H = R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$ см;



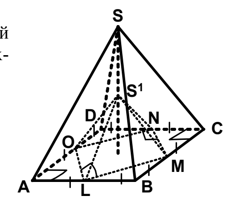
$S_{пол.} = \pi R(a + R) =$

$= \pi \cdot 4\sqrt{2}(8 + 4\sqrt{2}) = 16\sqrt{2}(2 + \sqrt{2})$ см^2;

Ответ: $S_{пол.} =$ $32(1 + \sqrt{2})$ см^2.

Вариант 31.

6. Из свойств квадрата имеем: OL = LM = MN = NO. Значит искомый многогранник – правильная четырехугольная пирамида.

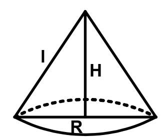


7.

$S_{бок.} = \pi Rl = 20\pi$,

$S_{осн.} = \pi R^2 = 16\pi$ => $R = 4$ (см) => $l = 5$ (см);

$V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H$; $H = \sqrt{l^2 - R^2}$ => $H = 3$ см =>

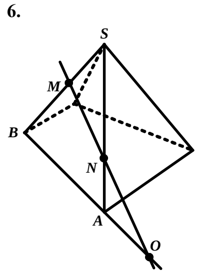


$V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 3 = 4^2\pi$ $= 16\pi$ (см^2).

Ответ: V = 16π см^2.

Вариант 32.

6.



7.

см. рис. варианта 31.задачи 7.

$V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H \Rightarrow H = \dfrac{3V}{\pi R^2} = \dfrac{3 \cdot 96\pi}{\pi \cdot 36} = 8$ см

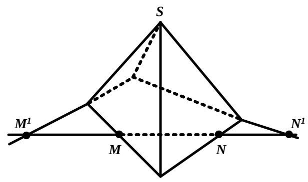
$l = \sqrt{H^2 + R^2} = \sqrt{64 + 36} = 10$ см =>

$S_{бок.} = \pi Rl = \pi \cdot 6 \cdot 10 = 60\pi$ см^2

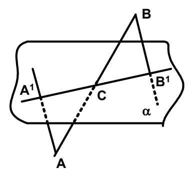
Ответ: $S_{бок.} = 60\pi$ см^2.

Вариант 33.

6.



7.



т. $C \in \alpha$, т. $C \in AA_1BB_1 \Rightarrow C \in A_1B_1$

$AA_1C \sim CBB_1$

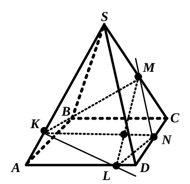
$\frac{AC}{CB} = \frac{A_1C}{CB_1} = \frac{3}{1}$ или $\frac{AC}{AB} = \frac{A_1C}{A_1B_1} = \frac{3}{4}$ =>

$A_1B_1 = \frac{4}{3}A_1C = \frac{4}{3} \cdot 15 = 20$ см

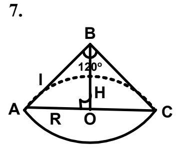
Ответ: $A_1B_1 = 20$ см.

Вариант 34.

6.



7.



$l = \frac{H}{\cos 60^\circ} = \frac{12}{1/2} = 24$ (см).

$R = H \cdot \text{tg}60^\circ = 12\sqrt{3}$ (см).

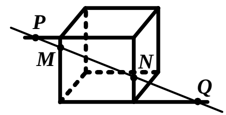
$S_{пол.} = \pi R(R + l) =$

$= \pi \cdot 12\sqrt{3}(12\sqrt{3} + 24) = 144\sqrt{3}\pi(2 + \sqrt{3})$ (см^2)

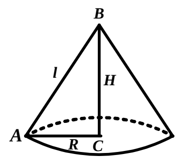
Ответ: $S_{пол.} = 144\sqrt{3}\pi\left(2 + \sqrt{3}\right)$ см^2.

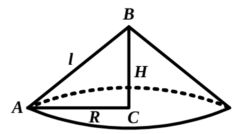
Вариант 35.

6.



7.



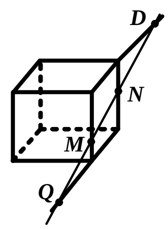


$S_{бок.1} = \pi Rl = \pi \cdot AC \cdot AB; \ S_{бок.2} = \pi Rl = \pi \cdot BC \cdot AB$

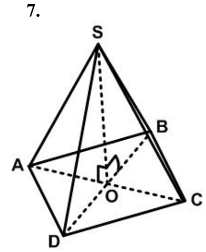
$\dfrac{S_{бок.1}}{S_{бок.2}} = \dfrac{\pi \cdot AC \cdot AB}{\pi \cdot BC \cdot AB} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{3}{4}$. Ответ: $\dfrac{S_{бок.1}}{S_{бок.2}} = \dfrac{3}{4}$.

Вариант 36.

6.



7.



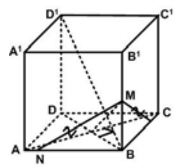
$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = 10\sqrt{2}$ см;

$OC = \dfrac{1}{2} AC = 5\sqrt{2}$ см;

$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{169 - 50} = \sqrt{119}$ (см)

Ответ: $SO = \sqrt{119}$ см.

Вариант 37.



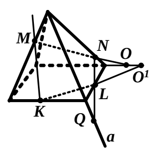
6.
Из соображений симметрии видно, что точки L и N являются серединами сторон AB и BC. Откуда $\Delta LMB = \Delta NMB \Rightarrow LM = MN$.
Значит в сечении равносторонний треугольник.

7. *см. рис. варианта 40.задачи 7.*

$S_{осн.} = 2S_{бок.}$ $S_{осн.} = \pi R^2$; $S_{бок.} = 2\pi RH$ => $H = \frac{1}{4}R = 2$ (см);

$V = H \cdot S_{осн.} = H \cdot \pi R^2 = 2 \cdot \pi \cdot 64 = 128\pi$ (см^3). Ответ: $V = 128\pi$ (см^3).

Вариант 38.



6.
Как видно из рисунка точка K не лежит в плоскости (MNL), т.е. KL и MN – скрещивающиеся

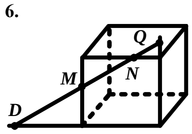
7. *см. рис. варианта 40. задачи 7.*
$S_1 = S_{CBEF} = 108$; $3l = 3H = 2R$;

$S_1 = 3l \cdot l = 108$ => $l^2 = 36$ => $l = 6$ см; $R = \frac{3}{2}l = 9$ см.

$S_{пол.} = 2\pi R(H + R) = 2\pi \cdot 9 \cdot 15 = 270\pi$ см^2. Ответ: $S_{пол.} = 270\pi$ см^2.

Вариант 39.

6.



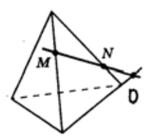
7. *см. рис. варианта 35.задачи 7. а)*

$S_{пол.} = \pi R(l + R) = \pi R(\sqrt{R^2 + H^2} + R) = \pi \cdot 3(\sqrt{9 + 16} + 3) = 24\pi$ см^2

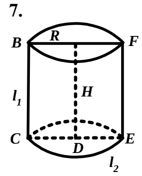
Ответ: $S_{пол.} = 24\pi$ см^2.

Вариант 40.

6.



7.



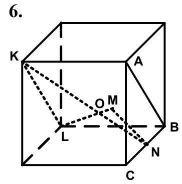
$2H = l_2 = 2\pi R \Rightarrow H = 6\pi$ см.

$S_{пол.} = 2\pi R(H + R) = 2\pi \cdot 6 \cdot (6 + 6\pi) =$
$= 72\pi(\pi + 1)$ см^2.

Ответ: $72\pi(\pi + 1)$ см^2.

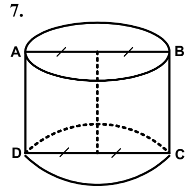
Вариант 41.

6.



MN – средняя линия. По свойствам куба имеем: MN || KL, т.е. ML и KN – пересекаются.

7.

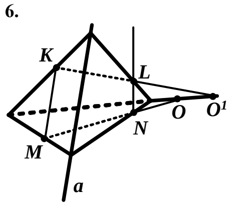


$V = S_{осн.} \cdot BC = \pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2 \cdot BC = 36\pi$ см^3

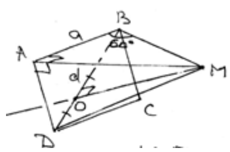
Ответ: $V = 36\pi$ см^3.

Вариант 42.

6.



Ответ: нет.



7. $MO = \sqrt{MB^2 - BO^2}$

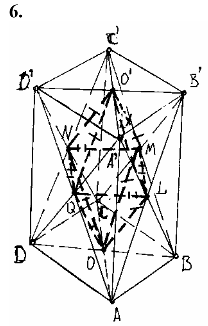
$BO = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}\sqrt{2}AB = \frac{\sqrt{2}}{2}AB = \sqrt{2}$ см

$MB = \frac{AB}{\cos 60^\circ} = 2AB = 4$ см =>

$MO = \sqrt{16-2} = \sqrt{14}$ см. Ответ: $MO = \sqrt{14}$ см.

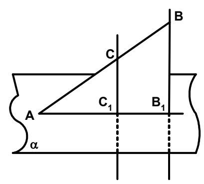
Вариант 43.

6.



В силу симметрии имеем:
$QN = MN = ML = LQ$
$OQ=ON=OM=OL = O'L =$
$= O'M = O'N = O'Q$

7.

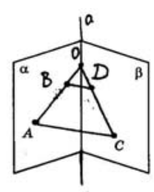


т. $C_1 \in AB_1$ (см. задачу 4.7.)
т. Фалеса:

$\frac{AB}{AC} = \frac{AB_1}{AC_1} = \frac{5}{3} \Rightarrow AC_1 = \frac{3}{5}AB_1 = 9$ см

Ответ: $AC_1 = 9$ см.

Вариант 44.



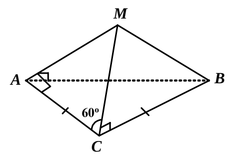
6.

Проведем прямую *AB* до пересечения с вершиной двухгранного угла прямой a, получим точку *O*, потом через *B* параллельно *AC* проведем прямую и получим на отрезке *OC* точку *D*.

7. $MB=\sqrt{MA^2+AB^2}=\sqrt{AC^2tg^2 60^\circ+AB^2}=$

$=\sqrt{\dfrac{1}{2}AB^2\cdot 3+AB^2}=$

$=AB\sqrt{\dfrac{5}{2}}=6\sqrt{\dfrac{5}{2}}=3\sqrt{10}$ см



Ответ: $MB=3\sqrt{10}$ см.

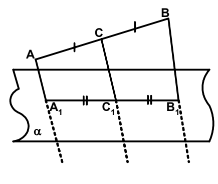
Вариант 45.

6. *См. вар. 44. Рисунок.*

7.

CC_1 – средняя линия трапеции ABB_1A_1

=> $CC_1=\dfrac{AA_1+BB_1}{2}=\dfrac{13}{2}$ см

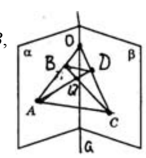


Ответ: $CC_1=\dfrac{13}{2}$ см.

Варианты 46 и 47.

6.

Аналогично, как в вар. 44, получаем, что A, B, C и D принадлежат одной плоскости.



№ 46.7.

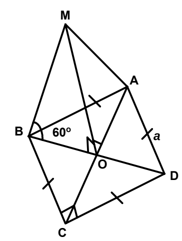
$AM^2=MB^2+AB^2-2MB\cdot AB\cdot\cos\angle ABM$

$\cos\angle ABM=\dfrac{MB^2+AB^2-AM^2}{2MB\cdot AB}=\dfrac{AB}{2MB}$

Пусть $AB=a$, тогда

$OB=\dfrac{1}{2}BD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AB=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$ => $MB=\sqrt{2}a$ =>

=> $\cos\angle ABM=\dfrac{2a^2+a^2-2a^2}{2\cdot\sqrt{2}a\cdot a}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.



Ответ: $\cos\angle ABM=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

№ 47.7. *см. рис. варианта 2.задачи 7.*

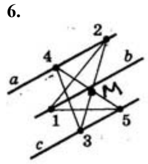
$AC = 6$ см => $AB = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$ (см); $OK = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ (см).

$MK = \sqrt{MO^2 + OK^2}$; $MK = \sqrt{\frac{9 \cdot 2}{4} + 25} = \sqrt{\frac{59}{2}}$ (см).

Ответ: $MK = \sqrt{\frac{59}{2}}$ (см).

Вариант 48.

6.



7.

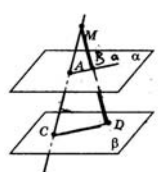
см. рис. варианта 40.задачи 7.

$S_{осн.} = \pi R^2 = 36\pi$ (см^2);

$V = S_{осн.} \cdot H = 36\pi \cdot 10 = 360\pi$ (см^3).

Ответ: $V = 360\pi$ (см^3).

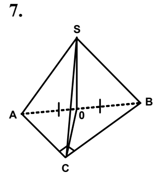
Вариант 49.



6.

Проведем через точку A прямую a, параллельную CD, а потом прямую DM, и на пересечении a и DM получим точку B. Все пять точек лежат в одной плоскости.

7.



т.к. середина гипотенузы прямоугольного треугольника – это центр описанной окружности, то $AO=OB=OC$ и $SA = SB = SC$.

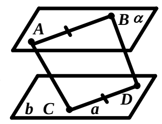
$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$ (см).

$SA = \sqrt{AO^2 + SO^2} = \sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + SO^2} =$

$\sqrt{\frac{36 + 64}{4} + 144} = 13$ (см). Ответ: $SA = SB = SC = 13$ (см).

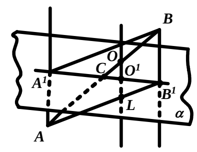
Вариант 50.

6.



Через точку C проведем параллельную AB прямую a. И на ней отложим от точки C расстояние, равное длине AB. Получим, что $ABCD$ – параллелограмм, т.к. $AB = CD$, $AB \parallel CD$. Значит, $AC \parallel BD$.

7.



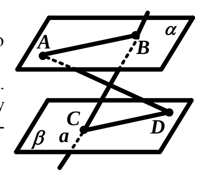
O_1L – средняя линия ΔA_1B_1A, т.к.
по т. Фалеса: $AO_1{:}O_1B_1 = AL{:}LB_1 = 1 : 1$ =>

=> $O_1L = \dfrac{5}{2}$ (см).

OL – средняя линия ΔABB_1 => $BB_1 = 2OL =$
$= 2(OO_1 + O_1L) = 16 + 5 = 21$ (см).

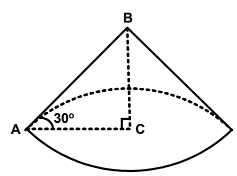
Вариант 51.

6.



1. Через точку C проведем параллельную AB прямую a.
2. Прямая AM пересечет a в точке D, т.к. $AB \parallel a$, C и D принадлежат a, и поэтому A, B, M, C, D принадлежат плоскости, определенной AB и a.

7.

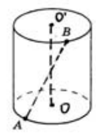


$BC = AB\sin 30^{\circ} = 10 \cdot \dfrac{1}{2} = 5$ (см).

$$V = \frac{1}{3}\, S_{\text{осн.}} \cdot BC = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot BC = \frac{1}{3}\pi AC^2 \cdot BC = \frac{1}{3}\pi\left(AB^2 - BC^2\right) \cdot BC =$$

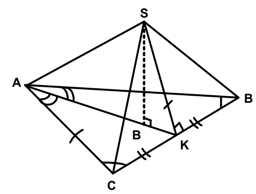
$$= \frac{1}{3}\pi \cdot (100 - 25) \cdot 5 = 125\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$ Ответ: $V = 125\pi$ (см^3).

Вариант 52.



6.
Кроме точек A и B больше точек отрезка AB не принадлежит поверхности цилиндра, т.к. AB не образующая (AB не параллельна OO').

7. $S_{\text{бок.}} = \dfrac{SK}{2} \cdot (AB + BC + CA) = \dfrac{3}{2} SK \cdot AB$;



$$SK = \sqrt{SC^2 + CK^2} = \sqrt{SC^2 - \left(\frac{CB}{2}\right)^2},$$

(так как пирамида правильная)

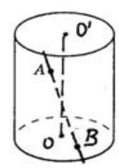
$SK = \sqrt{100 - 36} = 8$ (см).

$S_{\text{бок.}} = \dfrac{3}{2} \cdot 8 \cdot 12 = 144$ (см).

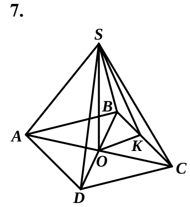
Ответ: $S_{\text{бок.}} = 144$ (см).

Вариант 53.

6. *См. вар. 52.*



7.



$SK = 13$ см; $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2} d_1 \cdot d_2 = AD \cdot h$,

где h – высота ромба, проведенная из т. B.

$h = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2AD}$; $AD = \sqrt{\left(\dfrac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{d_2}{2}\right)^2} = 25$ (см).

$h = \dfrac{30 \cdot 40}{50} = 24$ (см).

$OK = \frac{1}{2}h = 12$ (см).

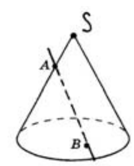
$SO = \sqrt{SK^2 - OK^2} = \sqrt{169 - 144} = 5$ (см).

Ответ: 5 (см).

Вариант 54.

6.

Прямая AB не проходит через вершину S', и поэтому AB – не образующая, и поверхности конуса принадлежат только точки A и B.



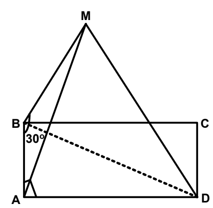
7.

$V = \frac{1}{3}AM \cdot \frac{1}{2}BA \cdot AD =$

$= \frac{1}{6}BA \cdot AD \cdot BA \cdot tg30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{18}AB^2 \cdot AD =$

$= \frac{\sqrt{3}}{18} \cdot 4 \cdot 5 = \frac{10}{9}\sqrt{3}$ (см^3).

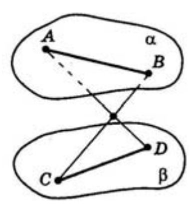
Ответ: $V = \frac{10}{9}\sqrt{3}$ (см^3).

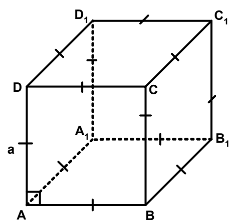


Вариант 55.

6.

Поскольку прямые пересекаются, значит, они задают плоскость, в которой лежат точки A, B, C и D. Из рисунка видно, что AB не параллельна CD, значит, α и β пересекаются, т.к. если α и β параллельны, то $AB \parallel CD$.





7.
$S_{пол.} = 6S_{ABCD} = 6a^2$;
$24 = 6a^2$; $a = 2$ (см).

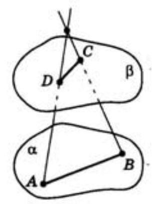
$$BD_1 = \sqrt{A_1D_1^2 + A_1B^2} =$$
$$= \sqrt{A_1D_1^2 + AB^2 + AA_1^2} = a\sqrt{3}$$

$a = 2 \Rightarrow BD_1 = 2\sqrt{3}$ (см).

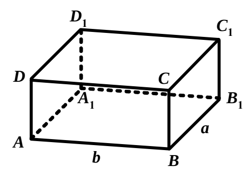
Ответ: $BD_1 = 2\sqrt{3}$ (см).

Вариант 56.

6.
См. вариант 55, задача 6



7.

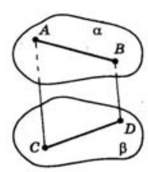


$b = 6$; $c = 4$;
$S_{пол.} = 2ab + 2ac + 2bc = 20a + 48 = 136$;

$20a = 88$; $a = \dfrac{22}{5}$ (см);

$V = abc = \dfrac{22}{5} \cdot 4 \cdot 6 = \dfrac{528}{5}$ (см^3).

Вариант 57.



6.
AC ∥ BD, значит точки A, B, C, D лежат в одной плоскости.
Но AB ∦ CD, значит α и β пересекаются.

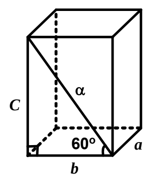
7.

$c = b\text{tg}60^\circ = b\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$ см

$S_{пол.} = 2S_{осн.} + 2(a + b)\cdot c = 2ab + 2(a + b)\cdot c =$

$= 2\cdot 15 + 2\cdot 8\cdot 5\sqrt{3} = 10\left(3 + 8\sqrt{3}\right)$ см^2

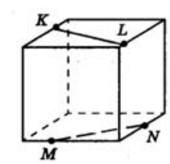
Ответ: $S_{пол.} = 10\left(3 + 8\sqrt{3}\right)$ см^2.



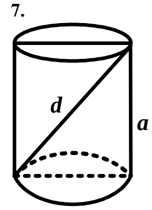
Вариант 58.

6.

MN и *KL* принадлежат плоскостям основания, значит, эти прямые не пересекаются, т.к. нижнее основание параллельно верхнему. Но из рис. видно, что *KL* не параллельно *MN*, и значит KN и LM – скрещивающиеся прямые.



7.



$d = \sqrt{2}a \Rightarrow a = 6$ см,

$2R = a \Rightarrow R = 3$ см

$S_{пол.} = 2S_{осн.} + S_{бок.} =$

$= 2\pi R(H + R) = 2\pi R(a + R) =$

$= 2\pi\cdot 3(6 + 3) = 54\pi$ см^2.

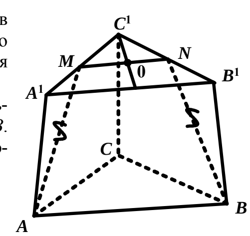
Ответ: $S_{пол.} = 54\pi$ см^2.

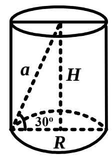
Вариант 59.

6.

Т.к. точка пересечения медиан в равностороннем треугольнике, то эта точка *O* есть центр основания призмы.

Через точку *O* проведем параллельную прямую *MN*, параллельную *AB*. Значит, сечение *ABNM* – это равнобокая трапеция (*AM* = *BN*).





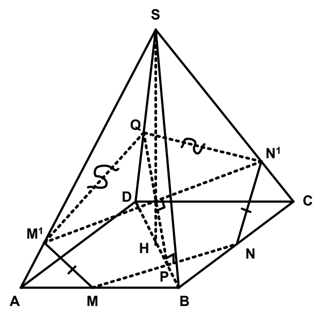
7.
$S_{пол.} = 2\pi R(H + R) = 2\pi a\cos 30^o(a\cos 30^o + a\sin 30^o) =$

$= 2\pi a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \pi \cdot 2\left(3+\sqrt{3}\right) = 2\left(3+\sqrt{3}\right)\pi$ (см^2).

Ответ: $S_{пол.} = 2\left(3+\sqrt{3}\right)\pi$ (см^2).

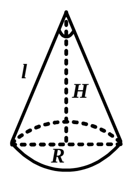
Вариант 60.

6.



Проведем через точку пересечения высоты пирамиды *SH* и *PQ* прямую *M'N'*, параллельную *MN*, где *M'* и *N'* – две вершины полученного многоугольника сечения. *MM'QN'N* – пятиугольник (*MM'* = *NN'* и *M'Q* = *N'Q*).

7.

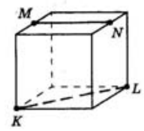


$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi R^2\sqrt{l^2 - R^2} = \frac{1}{3}\pi \cdot 25\sqrt{169-25} = 100\pi$ см^3

Ответ: V = 100π см^3.

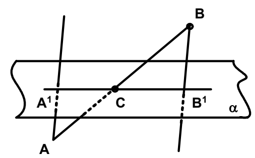
Вариант 61.

6.



KL и MN лежат в параллельных плоскостях, т.е. не пересекаются, еще KL не параллельна MN, значит K, L, M и N – точки, не принадлежащие одной плоскости, значит, отрезки KN и LM не имеют общих точек.

7. т. $C \in A_1B_1$ (см. задачу 33.7.)



$\Delta AA_1C \sim \Delta CBB_1$

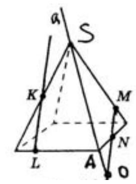
$$\frac{AC}{AB}=\frac{A_1C}{A_1B_1}=\frac{3}{8}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_1B_1=\frac{8}{3}A_1C=\frac{8}{3}\cdot 12=32 \text{ (см)}.$$

Ответ: $A_1B_1 = 32$ (см).

Вариант 62.

6.



Не пересекаются, так как MN пересекает плоскость, содержащую KL в точке не принадлежащей KL. Значит MN и KL – скрещиваются. А значит KN и ML тоже скрещиваются

7. *см. рис. вариант 60.задача 7.*

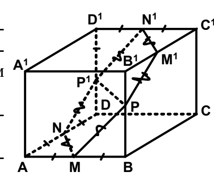
$S_{бок.} = \pi Rl = 5\pi R = 15\pi \Rightarrow R = 3$ см

$$H=\sqrt{l^2-R^2}=\sqrt{25-9}=4 \text{ см; } V=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot H=\frac{1}{3}\pi\cdot 9\cdot 4=12\pi \text{ см}^3$$

Ответ: $V = 12\pi$ см^3.

Вариант 63.

6.

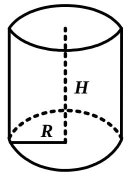


Проведем через P (середину BB') прямую, параллельную MN (M и N – середины сторон основания), и получим при пересечении с DD' точку P'.

$MN \parallel M'N'$ и $MN = M'N'$ (M' и N' – середины сторон основания).

$PMNP'N'M'$ – равносторонний шестиугольник.

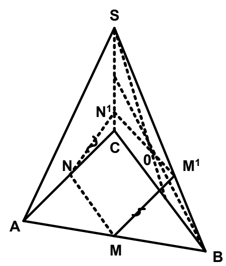
7.



$S_{пол.} = S_{бок.} + 2S_{осн.} = 2S_{бок.}$ =>
$S_{бок.} = 2S_{осн.}$
$2\pi RH = 2\pi R^2$ => $R = H$
$V = \pi R^2 H = \pi H^3 = 216\pi$ (см^3).
Ответ: $V = 216\pi$ см^3.

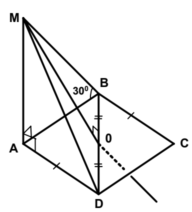
Вариант 64.

6.



Через точку пересечения медиан ΔSBC – точку O, проведем прямую, параллельную AB (а MN – средняя линия ΔABC, значит, $MN \parallel AB$). Из свойств правильной пирамиды: $MM' = NN'$, отсюда $MNN'M'$ – равнобокая трапеция ($MM' = NN'$).

7.



$$\frac{AB}{MB} = \cos 30^\circ \Rightarrow MB = \frac{AB}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$\Delta AMD = \Delta AMB$ => ΔDMB – равнобедренный: $MD = MB$, т.е. MO не только высота, но и медиана BD, т.е.

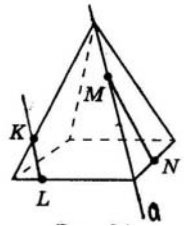
$$MO = \sqrt{MB^2 + OB^2} = \sqrt{MB^2 - \left(\frac{BD}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{MB^2 - \frac{AB^2 + AD^2}{4}} = \sqrt{\frac{4}{3} - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{5}{6}} \text{ (см).}$$

Ответ: $MO = \sqrt{\frac{5}{6}}$ (см).

Вариант 65.

6.
Не пересекаются, т.к. точки K,L,M,N не лежат в одной плоскости.



7.
см. рис. вариант 17.задача 7.

$r=\sqrt{R^2-OO_1^2}=$

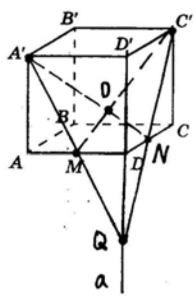
$=\sqrt{41^2-29^2}=2\sqrt{210}$ (см).

$S=\pi r^2=840\pi$ (см^2).

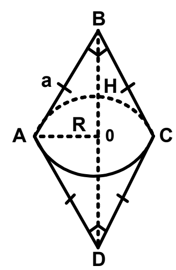
Ответ: $S=840\pi$ (см^2).

Вариант 66.

6.
По построению точка $N\in(A'MC')$.



7.



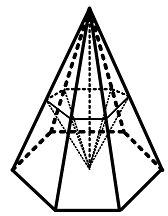
$S_{пов.}=2S_{бок.}=2\pi Ra=$

$=2\pi a\cdot\dfrac{a\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}a^2\pi=9\sqrt{2}\pi$ см^2

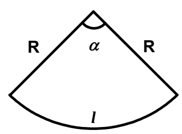
Ответ: $S_{пов.}=9\sqrt{2}\pi$ см^2.

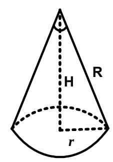
Вариант 67.

6.
В силу симметрии заключаем, что искомый многогранник правильная пирамида.



7.



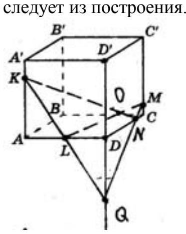


$r=\sqrt{R^2-H^2}=\sqrt{100-64}=6$ (см); $l=2\pi r=12\pi$ (см);

$l_1=2\pi R=20\pi$ (см); $\alpha=360^\circ\cdot\dfrac{12\pi}{20\pi}=216^\circ$. Ответ: $\alpha=216^\circ$.

Вариант 68.

6.
То, что точка N – искомая, следует из построения.



7.
см. рис. вариант 66. задача 7.

$V=2V_{\text{кон.}}=2\cdot\dfrac{1}{3}S_{\text{осн.}}\cdot H=$

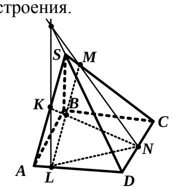
$=2\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\pi R^2H=$

$=\dfrac{a^3\pi\sqrt{2}}{6}=\dfrac{9\sqrt{2}}{2}\pi$ см^3

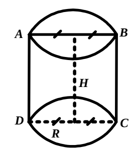
Ответ: $V=\dfrac{9\sqrt{2}}{2}\pi$ см^3.

Вариант 69.

6.
То, что точка M – искомая, следует из построения.



7.



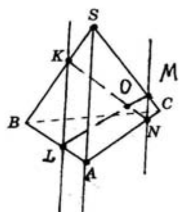
$V = S_{\text{осн.}} \cdot H = \pi R^2 \cdot H =$

$= \pi \cdot \dfrac{DC^2}{4} \cdot AD = \pi \cdot \dfrac{36}{4} \cdot 8 = 72\pi$ (см^3).

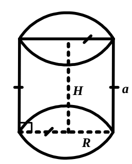
Ответ: $V = 72\pi$ (см^3).

Вариант 70.

6.
То, что точка N – искомая, следует из построения.



7.



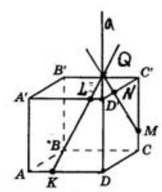
$V = S_{\text{осн.}} \cdot H = \pi R^2 H =$

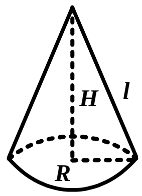
$= \pi \cdot \dfrac{a^2}{4} \cdot a = \dfrac{\pi}{4} a^3 = \dfrac{\pi}{4} \cdot 343 = \dfrac{343\pi}{4}$ (см^3)

Ответ: $V = \dfrac{343\pi}{4}$ см^3.

Вариант 71.

6.
То, что точка N – искомая, следует из построения.





7.

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{8}{3}\pi R^2 = 24\pi \Rightarrow R = 3$

$S_{\text{пол.}} = \pi R(l + R) =$

$= \pi R(\sqrt{H^2 + R^2} + R) = \pi \cdot 3(\sqrt{64 + 9} + 3) =$

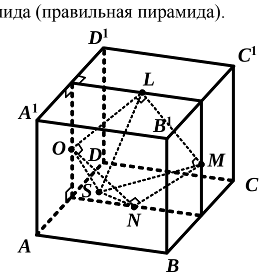
$= 3\pi(\sqrt{73} + 3)$ см^2

Ответ: $S_{\text{пол.}} = 3\pi(\sqrt{73} + 3)$ см^2.

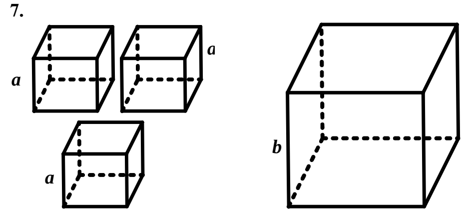
Вариант 72.

6.

L, M, N, O лежат в одной плоскости, еще $LMNO$ – квадрат, $SLMNO$ – пирамида (правильная пирамида).



7.



$V_1 = 64$ см^3; $V = 3 \cdot 64$ см$^3 \Rightarrow b = 4\sqrt[3]{3}$ (см).

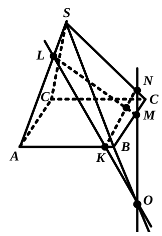
$S_{\text{пов.}} = 6S_{\text{кв.}} = 6b^2 = 6 \cdot 16 \cdot \sqrt[3]{9} = 96\sqrt[3]{9}$ (см^2).

Ответ: $S_{\text{пов.}} = 96\sqrt[3]{9}$ (см^2).

Вариант 73.

6.

То, что точка N – искомая, следует из построения.



7.

См. рис. вариант 29. Задача 7.

$l = \frac{r}{\cos 30^\circ} = \frac{6 \cdot 2}{\sqrt{3}}$ см $= \frac{12}{\sqrt{3}}$ см

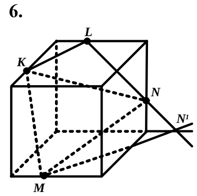
$S_{\text{полн.}} = \pi r(l + r) =$

$= \pi \cdot 6\left(4\sqrt{3} + 6\right) = 12\pi\left(2\sqrt{3} + 3\right)$

Ответ: $S_{\text{полн.}} = 12\pi\left(2\sqrt{3} + 3\right)$ см^2.

Вариант 74.

6.



Из рисунка видно, что KN и ML – скрещивающиеся.

7.

См. рис. вариант 35. Задача 7 а)

тело вращения – конус, где l=17 см, $R = 8$ см.

$S_{\text{пов.}} = \pi R(l + R) =$

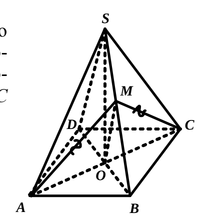
$= \pi \cdot 8(17 + 8)$ см$^2 = 200\pi$ см^2.

Ответ: $S_{\text{пов.}} = 200\pi$ см^2.

Вариант 75.

6.

Через центр основания O параллельно боковому ребру SD ведем прямую, которая пересекает SD в точке M. Этот многоугольник – равнобедренный ΔAMC ($AM = CM$).



7. *См. рис. вариант 71. Задача 7.*

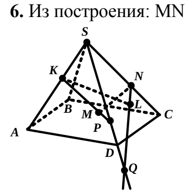
$R=\sqrt{l^2-H^2}$; $R=\sqrt{13^2-12^2}$ см = 5 (см).

$S_{\text{полн.}}=\pi R(R+l)=\pi\cdot 5(5+13)$ см^2 = 90π (см^2).

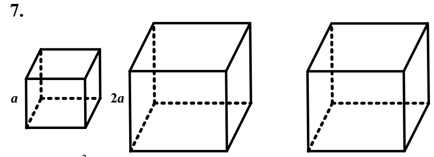
Ответ: $S_{\text{полн.}}=90\pi$ (см^2).

Вариант 76.

6. Из построения: MN и KL – скрещивающиеся



7.



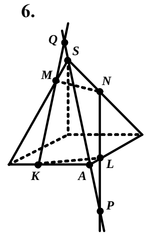
$V_1 = 1$ см^3

$V_2=2^3$ см^3 = 8 см^3; $V_3=V_1+V_2=9$ см^3; $a_3=\sqrt[3]{V_3}=\sqrt[3]{9}$ см

Ответ: $a_3=\sqrt[3]{9}$ см.

Вариант 77.

6.



По построению: ML и KN – скрещивающиеся

7.

См. рис. вариант 76. Задача 7.

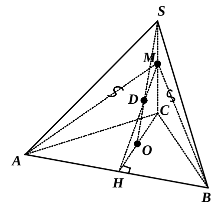
Из задачи 76.7.: $a_3=\sqrt[3]{9}$ (см).

$S_{\text{полн.}}=6\cdot a_3{}^2=6\cdot\sqrt[3]{81}=18\sqrt[3]{3}$ (см^2).

Ответ: $S_{\text{полн.}}=18\sqrt[3]{3}$ (см^2).

Вариант 78.

6. CH – высота, медиана основания (ΔABC).
Через H и D (середину высоты пирамиды SO) проведем прямую, которая пересечет SC в точке M.
Сечение – равнобедренный ΔMAB ($MA = MB$).



7. *См. рис. вариант 34. Задача 7.*

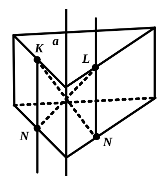
$\angle ABO = \frac{1}{2}120^\circ = 60^\circ$ (т.к. ΔABC – равнобедренный)

$R = Htg\angle ABO = 5\sqrt{3}$ см; $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\cdot 125\cdot 3\cdot \pi$ см^3 = 125π см^3

Ответ: $V = 125\pi$ см^3.

Вариант 79.

6. Из рисунка видно, что $KL \| MN$, значит K, L, M, N – лежат в одной плоскости, так что KN и ML имеют общую точку.



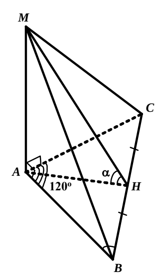
7. прямоугольные ΔMAB = ΔMAC (по двум катетам)
=> $MB = MC$ => MH – медиана в ΔBMC

=> $BH = \frac{1}{2}BC = 3$ см;

$AH = BH\text{tg}30^\circ = \sqrt{3}$ см;

$\cos\alpha = \frac{AH}{MH} = \frac{\sqrt{3}}{12}$.

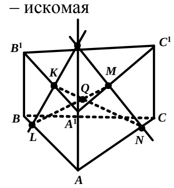
Ответ: $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{12}$.



Вариант 80.

6.

Из построения точка N – искомая



7.

См. рис. вариант 30. Задача 7.

$H = a\sin 45^\circ = 6\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$ (см).

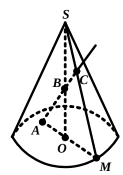
$V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = \dfrac{27\cdot 2\sqrt{2}}{3}\pi = 18\sqrt{2}\pi$ см^3

Ответ: $V = 18\sqrt{2}\pi$ см^3.

Вариант 81.

6.

Из построения точка C – искомая



7.

См. рис. вариант 56. Задача 7.

$V = S_{осн.}\cdot h \Rightarrow h = 2$ см

$S_{осн.} = ab = 3a^2 \Rightarrow a = 2$ см, $b = 6$ см

$S_{полн.} = 2S_{осн.} + 2S'_{бок.} + 2S''_{бок.} =$

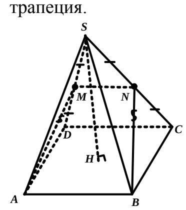
$= 2\cdot S_{осн.} + + 2ah + 2bh = 56$ см^2

Ответ: $S_{полн.} = 56$ см^2.

Вариант 82.

6.

MN – средняя линия ΔSCD, значит, $MN \parallel DC$ (но $AB \parallel DC$), значит, *ABNM* – равнобокая трапеция.



7.

См. рис. вариант 63. Задача 7.

осевое сечение – прямоугольник со сторонами d и l, $d = 2R$, $l = H$, $d = l$

$S = d\cdot l = l^2 = 64$ см$^2 \Rightarrow l = 8$ см $\Rightarrow$

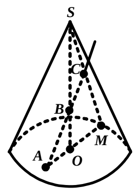
$\Rightarrow d = 8$ см, $H = 8$ см, $R = 4$ см

$V = S_{осн.}\cdot H = \pi R^2 H = \pi\cdot 16\cdot 8$см$^3 = 128\pi$ см^3

Ответ: $V = 128\pi$ см^3.

Вариант 83.

6.
Из построения следует, что точка С лежит на поверхности конуса.



7.
См. рис. вариант 56. Задача 7.
$S_{\text{осн.}} = ab = 4 \cdot 6$ см^2 = 24 см^2
$S_{\text{полн.}} = 2ab + 2ac + 2bc$
$136 = 48 + 8c + 12c$

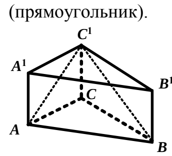
$c = \frac{22}{5}$ (см),

$A_1B = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{52}$ см = $2\sqrt{13}$ см
(по т. Пифагора)

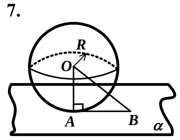
$d = \sqrt{A_1B^2 + c^2} = \sqrt{52 + \frac{484}{25}} = \frac{2}{5}\sqrt{446}$ см

Вариант 84.

6.
Разбивает плоскость *ABC'* на две пирамиды: 1. *C'ABC* с основанием – ΔABC, и 2. *C'ABB'A'* с основанием *ABB'A'* (прямоугольник).



7.



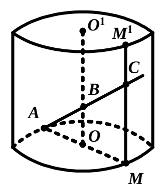
$OA = \sqrt{BO^2 - AB^2} = \sqrt{29^2 - 21^2} = 20$ см

$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot OA^3 =$

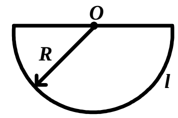
$= \frac{4}{3}\pi \cdot 8000 = \frac{32000}{3}\pi$ см^3

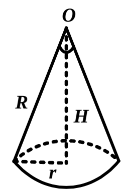
Вариант 85.

6.



7.





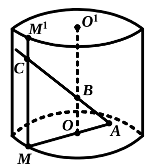
$l = 2\pi r = 10\pi$ см; $l = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R = \pi R = 10\pi$ => $R = 10$ см;

$H = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{100 - 25} = 5\sqrt{3}$ см;

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot H = \frac{1}{3}\pi \cdot 25 \cdot 5\sqrt{3} = \frac{125\sqrt{3}}{3}\pi$ см^3.

Ответ: $V = \frac{125\sqrt{3}}{3}\pi$ см^3.

Вариант 86.



6. Точка *C* расположена на поверхности цилиндра, так как $MC \| OO_1$ и *M* лежит на поверхности цилиндра.

7. *См. рис. вариант 42. Задача 7.*

$\Delta ABM = \Delta ADM$ => $MD = BM$; $d = a\sqrt{2} \Rightarrow a = 5\sqrt{2}$ см.

BMD – равнобедренный: (BM = MD) и

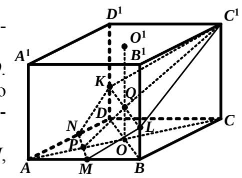
MO ⊥ AB => MO – медиана BMD

$MO = \sqrt{MB^2 - BO^2}$; $BO = \frac{1}{2}BD = 5$ см

$MB = \frac{AB}{\cos 60^\circ} = 2AB = 10\sqrt{2}$ см => $MO = \sqrt{200 - 25} = 5\sqrt{7}$ см.

Ответ: $MO = 5\sqrt{7}$ см.

Вариант 87.



6. O и O' – центры оснований.
1. MN (M и N – середины сторон основания) пересекает AC в точке P.
2. $C'P$ пересекается с OO' в точке Q.
3. Через Q проведем параллельную прямую MN и получим при пересечении ребер BB' и DD' точки L и K.
$C'KNML$ – пятиугольник ($KN = LM$, $C'K = C'L$).

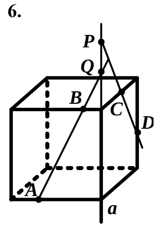
7. *см. рис. вариант 35. Задача 7 а)*

$S_{бок.} = \pi Rl = \pi \cdot BC \cdot AB = \pi \cdot BC \cdot \sqrt{AC^2 + BC^2} =$

$= \pi \cdot 4\sqrt{16+49} = 4\pi\sqrt{65}$ (см^2). Ответ: $S_{бок.} = 4\pi\sqrt{65}$ (см^2).

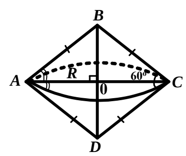
Вариант 88.

6.



Из рисунка: AB и CD – секущиеся

7.



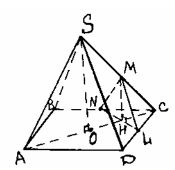
$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H = \frac{2}{3}\pi AO^2 \cdot BO =$$

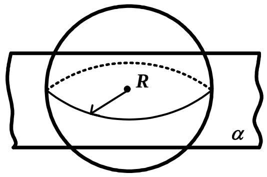
$$= \frac{2}{3}\pi \cdot AB^2 \cos^2 30^\circ \cdot AB \cdot \sin 30^\circ =$$

$$= \frac{2}{3}\pi \cdot 25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{125}{4}\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

Вариант 89.

6. Проведем $MN \parallel AD$, тогда M, N, A и D лежат в одной плоскости и значит AN и MD пересекаются.





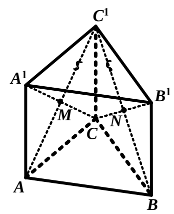
7.

$S = \pi R^2 = 4\pi \Rightarrow R = 2$ (см);

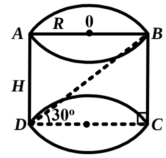
$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 8 = \frac{32}{3}\pi$ (см^3).

Ответ: $\frac{32}{3}\pi$ (см^3).

Вариант 90.



6. $\Delta ABC'$ – равнобедренный ($C'A = C'B$). $C'A$ и $C'B$ – диагонали боковых граней.



7. $S_{\text{пол.}} = 2\pi R(R + H) = 2\pi \cdot AO(AO + BC) =$

$= 2\pi \cdot \frac{AB}{2}\left(\frac{AB}{2} + BC\right) =$

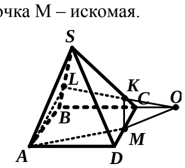
$= 2\pi \cdot \frac{BD}{2} \cdot \cos 30^\circ \left(\frac{BD}{2}\cos 30^\circ + BD\sin 30^\circ\right) =$

$= \pi \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{8}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 8 \cdot \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}\pi \cdot 4(2\sqrt{3} + 4) = 8\sqrt{3}\pi(\sqrt{3} + 2)$ (см^2).

Ответ: $S_{\text{пол.}} = 8\sqrt{3}\pi(\sqrt{3} + 2)$ (см^2).

Вариант 91.

6. По построению: точка М – искомая.



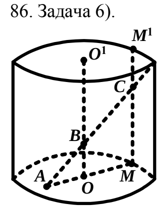
7. *см. рис. вариант 30. Задача 7.*

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot H = \frac{1}{3}\pi \cdot xa^2 \cdot x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{1}{6}\pi a^3 \cdot \sqrt{2} = \frac{32\sqrt{2}}{3}\pi \text{ см}^3$$

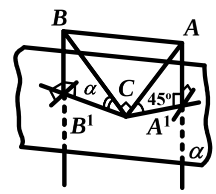
Ответ: $\frac{32\sqrt{2}}{3}\pi$ см^3.

Вариант 92.

6.
Точка C принадлежит поверхности цилиндра. (См. Вариант 86. Задача 6).



7.



т.к. $\alpha \parallel AB$, то $BB_1 = AA_1$; $\sin\alpha = \frac{BB_1}{BC}$;

$$\sin 45^\circ = \frac{AA_1}{AC} = \frac{AA_1}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AA_1 = 3\sqrt{2}$$

=> $\sin\alpha = \frac{BB_1}{BC} = \frac{AA_1}{BC} = \frac{3\sqrt{2}}{8}$

Ответ: $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{8}$.

Вариант 93.

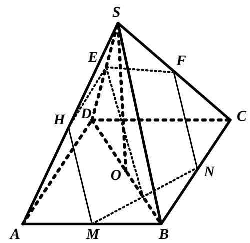
6. K, M, L и D, лежат в одной плоскости, а занчит DL и KM – пересекаются. (см. рисунок 114 из задачника).

7. *см. рис. вариант 56. Задача 7.*
$S_{пол.} = 2ab + 2ac + 2bc = 2a \cdot 9 + 2a \cdot 6 + 2 \cdot 9 \cdot 6 = 18a + 12a + 108 =$
$= 30a + 108 = 408 \Rightarrow a = 10$ (см);

$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{100 + 81 + 36} = \sqrt{217}$ (см).

Ответ: $d_1 = d_2 = \sqrt{217}$ см.

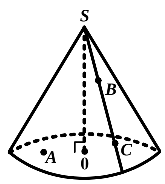
Вариант 94.



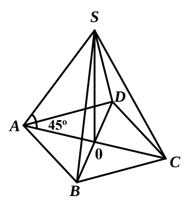
6. В силу симметрии MH = FN и HE = EF.
В сечении пятиугольник
Ответ: пятиугольник *MNFEH*, *MH* = *NF* и *HE* = *EF*.

7. *см. рис. вариант 63. Задача 7.*
$2S_{бок.} = S_{осн.}$; $2 \cdot H \cdot \pi R \cdot 2 = \pi R^2 = \pi \cdot 64 \Rightarrow H = 2$ (см).
$S_{пол.} = 2\pi R(H + R) = 2\pi \cdot 8(2 + 8) = 160\pi$ (см^2).
Ответ: $S_{пол.} = 160\pi$ (см^2).

Вариант 95.



6. Точки *B* и *C* лежат на образующей конуса *l*, другие пары точке *A* и *B*, *A* и *C* задают прямые, которые не являются образующими конуса, они не проходят через вершину конуса *S*.



7. $AC = 8\sqrt{2}$ см; $AO = 4\sqrt{2}$ см
SO=*AO*, т.к. ΔSAO – прямоугольный с $\angle$=45°; => $SO = 4\sqrt{2}$ см;

$$V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot H =$$

$$= \frac{1}{3} AB^2 \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 64 \cdot 4\sqrt{2} = \frac{256\sqrt{2}}{3} \text{ (см}^3\text{)}.$$

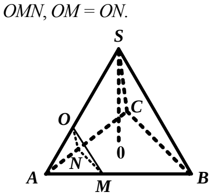
Ответ: $V = \frac{256\sqrt{2}}{3}$ (см^3).

Вариант 96.

6.

Плоскость сечения ΔOMN параллельна грани SBC, значит $OM \parallel BS$, $ON \parallel SC$, т.к. OM и SB принадлежат пл-ти грани ABS, аналогично с ON и SC. В ΔABS OM – средняя линия,; в ΔACS ON – средняя линия, $SB = SB$, отсюда $OM = ON$.

Ответ: треугольник OMN, $OM = ON$.



7. *см. рис. вариант 63. Задача 7.*

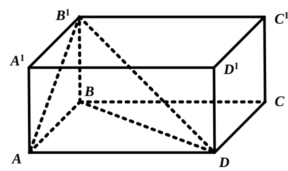
$l_{осн.} = 2\pi R = 8\pi$ (см); $H = 2l_{осн.} = 16\pi$ (см);

$V = S_{осн.} \cdot H = \pi R^2 \cdot H = \pi \cdot 16 \cdot 16\pi = 256\pi^2$ (см^3).

Ответ: $V = 256\pi^2$ (см^3).

Задание 8 для экзамена «Математика»

3.1.



$B'D = \sqrt{BB'^2 + BD^2} =$

$= \sqrt{2^2 + 14^2} = 10\sqrt{2}$ (см).

$2AD^2 = B'D^2$;

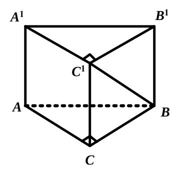
$AD = \sqrt{\frac{1}{2}B'D^2} = 10$ (см).

$AB^2 + AD^2 = BD^2$;

$AB^2 = BD^2 - AD^2$; $AB = \sqrt{14^2 - 10^2} = 4\sqrt{6}$ (см).

$V_{\text{парал.}} = AB \cdot AD \cdot h = 4\sqrt{6} \cdot 10 \cdot 2 = 80\sqrt{6}$ (см^3). Ответ: $80\sqrt{6}$ см^3.

3.2.



$AB^2 = AC^2 + BC^2$,

$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ (см).

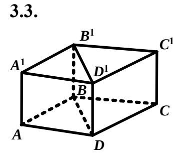
В $\Delta BCC'$ по теореме Пифагора,

т.к. $\angle BCC' = 90^\circ$, $CC'^2 = BC'^2 - BC^2$.

$CC' = \sqrt{8^2 - 6^2} = 2\sqrt{7}$ см

Ответ: $h = 2\sqrt{7}$ см.

3.3.



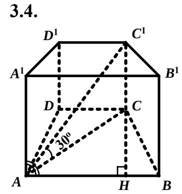
BD – меньшая диагональ, по условию $BB'D'D$ – квадрат, и значит $DD'=BD=12$ см (ΔABD – равносторонний, $AB = BD$)

$S_{ABCD}=AB \cdot AD \cdot \sin BAD=12^2 \cdot \sin 60^\circ = 72\sqrt{3}$ см^2

$V = S_{ABCD} \cdot h = S_{ABCD} \cdot DD' = 864\sqrt{3}$ см^3

Ответ: $864\sqrt{3}$ см^3.

3.4.



$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cdot \cos ADC =$
$= 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ = 4^2 \cdot 3 = 48.$

$AC = 4\sqrt{3}$ (см).

Т.к. $\angle DAC = \angle DCA = 30^\circ$, $\angle CAB = 30^\circ$ ($DC \parallel AB$) и значит в треугольнике ACB $\angle ACB = 90^\circ$. Тогда по т. Пифагора $AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = 8$ (см).

$S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \cdot h$, для ΔBCH $\sin\beta = \frac{CH}{BC}$,

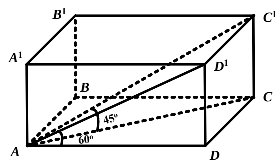
$h = CH = BC \cdot \sin\beta = 4 \cdot \sin 60^{\circ} = 2\sqrt{3}$ (см).

$S_{ABCD} = \frac{8+4}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$ (см^2). $V = S_{ABCD} \cdot CC'$,

$CC' = AC \cdot tg30^{\circ} = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 4$ (см). $V = 12\sqrt{3} \cdot 4 = 48\sqrt{3}$ (см^3).

Ответ: $V = 48\sqrt{3}$ (см^3).

3.5.



$\angle AC'C = 45°$ значит $AC = CC' = 8$.

Аналогично для $\Delta ADD'$, где $\frac{DD'}{AD} = tgA$;

$AD = \frac{DD'}{tgA} = \frac{8}{tg60^{\circ}} = \frac{8}{\sqrt{3}}$ см.

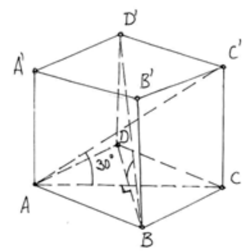
Для ΔACD, где угол D прямой и по теореме Пифагора:

$CD^2 = AC^2 - AD^2 = 8^2 - \frac{8^2}{3} = 64 \cdot \frac{2}{3}$ (см^2).

$CD = 8\sqrt{\frac{2}{3}}$ см; $V = AD \cdot CD \cdot CC' = \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot 8 = \frac{512\sqrt{2}}{3}$ см^3

Ответ: $\frac{512\sqrt{2}}{3}$ см^3.

3.6.



$tgA = \frac{CC'}{AC}$, $AC = \frac{CC'}{tgA} = 8\sqrt{3}$ (см).

$BD = \frac{DD'}{tgB} = \frac{8}{tg60^{\circ}} = \frac{8}{\sqrt{3}}$ (см).

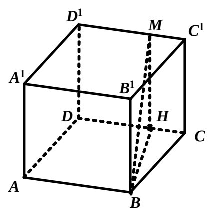
$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin 90^{\circ}$,

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot 1 = 32$ (см^2);

$V = S_{ABCD} \cdot h = 256$ (см^3).

Ответ: 256 (см^3).

3.7.



Опускаем перпендикуляры из вершины B на CD и $C'D'$.

$AB \parallel CD$, $\angle BHD = \angle ABH = 90^\circ$,

$AB \parallel C'D'$, т.к. $CD \parallel C'D'$ и $AB \parallel CD$,

$BH \perp DD'C'C$, поэтому $BH \perp MH$

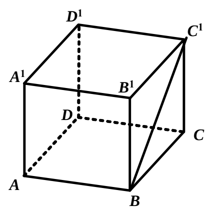
$MH^2 = BM^2 - BH^2$, $MH = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ см

$S_{ABCD} = CD \cdot BH = 10$ см $\cdot$ 5 см $= 50$ см^2

$V = S_{ABCD} \cdot MH = 600$ см^3

Ответ: 600 см^3.

3.8.

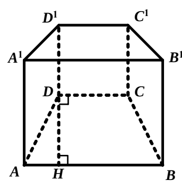


$S = a^2 = 64$ см^2.

$V = Sh = 640$ см^3

Ответ: 640 см^3.

3.9.



$$S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \cdot DH$$

$V = S_{ABCD} \cdot h$, где h – высота призмы.

1. $S_{ABB'A'} = AB \cdot h = 12$ см^2, по условию;

$S_{CDD'C} = CD \cdot h = 8$ см^2, по условию.

$AB \cdot h + CD \cdot h = (AB + CD) \cdot h =$

$= S_{ABB'A'} + S_{CDD'C} = 20$ см^2.

2. $V = \frac{1}{2} \cdot \left(AB + CD\right) \cdot DH \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \left(S_{ABB'A'} + S_{CDD'C'}\right) \cdot DH = 50$ см^3

Ответ: 50 см^3.

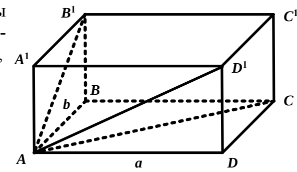
3.10. См. рис. к задаче 3.9.

По полученной формуле для нахождения объема в зад. 3.9. найдем DH

$V = \frac{1}{2}\left(S_{ABB'A'} + S_{CDD'C'}\right) \cdot DH$; $\frac{1}{2} \cdot \left(14 + 6\right) \cdot DH = 40$, ; $DH = 4$ (см).

Ответ: 4 см.

3.11. Пусть a, b и c длины ребер прямоугольного параллелепипеда. $a^2 + b^2 = 10^2$,



$a^2 + c^2 = (2\sqrt{10})^2$,

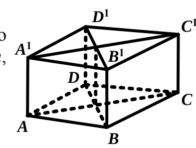
$b^2 + c^2 = (2\sqrt{17})^2$.

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 100, \\ a^2 + c^2 = 40, \\ b^2 + c^2 = 68; \end{cases}$$

$2a^2 = 72$, $a = 6$ (см); $b = 8$ (см), $c = 2$ (см); $V = abc = 96$ (см^3).

Ответ: 96 (см^3).

3.12.



Пусть длины диагоналей ромба, лежащего в основании, равны d_1 и d_2, $S_{AA'C'C} = d_1 h$, $S_{BB'D'D} = d_2 h$, где h – высота призмы.

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$,

$S_{AA'C'C} \cdot S_{BB'D'D} = d_1 \cdot d_2 \cdot h^2$,

т.к. по условию $\frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 = 48$ см^2,

то $h^2 = \frac{S_{AA'C'C} \cdot S_{BB'D'D}}{d_1 \cdot d_2} = \frac{40 \cdot 30}{96} = \frac{25}{2}$, $h = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ (см).

$V = S_{ABCD} \cdot h = 48$ см$^2 \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} = 120\sqrt{2}$ (см^3). Ответ: $120\sqrt{2}$ (см^3).

3.13.. Обозначим сторону основания a, а высоту в боковом треугольнике за h$_1$, тогда $S_{бок} = 4S_{тр} = 2ah_1$.

По т. Пифагора $h_1^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2; h_1 = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{9 + \frac{a^2}{4}}$.

Т.к. $S_{бок} = 2ah_1 = 2a\sqrt{9 + \frac{a^2}{4}} = 80$, то

$a\sqrt{9 + \frac{a^2}{4}} = 40$; $a^2\left(9 + \frac{a^2}{4}\right) = 1600$; $\frac{1}{4}\left(a^2\right)^2 + 9a^2 - 1600 = 0$.

$a^2 = 2(-9 \pm 41)$; $a^2 = 64$. Искомый $V = \frac{1}{3}a^2 h = 64$ (см^3).

3.14. Вводе обозначения аналогично 3.13.

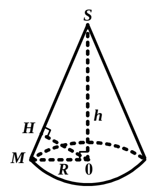
Получаем $S_{бок} = 2ah_1 = 2a\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}$;

И причем это равно $2a^2$, значит $2a\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}} = 2a^2$;

$h^2 + \frac{a^2}{4} = a^2$; $h^2 = \frac{3}{4}a^2 = 27$; $h = 3\sqrt{3}$ (см).

Значит $V = \frac{1}{3}a^2h = \sqrt{3} \cdot 36 = 36\sqrt{3}$ (см).

3.15.



$S_{\Delta SMO} = \frac{1}{2}SO \cdot MO = \frac{1}{2}Rh$ или

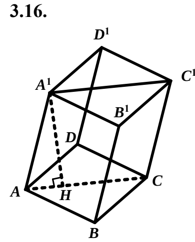
$S_{\Delta SMO} = \frac{1}{2}MS \cdot OH$, $Rh = 4{,}8l$; $l = \frac{Rh}{4{,}8}$.

Подставляем в $S_{бок.} = \pi Rl$ (по усл. $S_{бок.} = 60\pi$ см^2)

$S_{бок.} = \frac{\pi R^2 h}{4{,}8} = 60\pi$ см^2.

$V = \frac{\pi R^2 h}{3} = 1{,}6 \cdot 60$ см^3 = 96 см^3. Ответ: V = 96 см^3.

3.16.



AA'C'C – диагональное сечение, т.к. это ромб, то *AA' = AC*. AC – диагональ квадрата *ABCD* со стороной 6 см, значит, по теореме Пифагора $AC^2 = 6^2 + 6^2$,

$AC = 6\sqrt{2}$ см.

A'H – высота призмы, и т.к. сечение *AA'C'C* диагональное, то *A'H* принадлежит плоскости этого сечения.

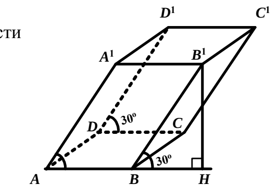
Рассмотрим прямоугольный $\Delta AA'H$, где по условию угол A равен 60°, и

$\sin A = \frac{A^1H}{AA^1}$; $A^1H = AA^1 \cdot \sin A = 6\sqrt{2} \cdot \sin 60^\circ = 6 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}$ (см).

$V = S_{осн.} \cdot A^1H = 6^2 \cdot 6\sqrt{\frac{3}{2}} = 108\sqrt{6}$ (см^3). Ответ: $108\sqrt{6}$ (см^3).

3.17.

1. *B'H* высота лежит в плоскости *ABB'A'*



$$\sin B = \frac{B'H}{BB'} \Rightarrow B'H =$$

$$= BB' \cdot \sin 30^\circ = \frac{BB'}{2},$$

2. *AA'D'D* и *BB'C'C* – прямоугольники, т.к. *AD*, *A'D'* и *BC*, *B'C'* перпендикулярны граням *AA'B'B* и *CC'D'C*.

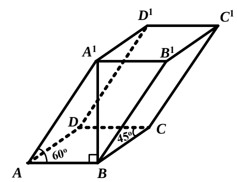
$S_{AA'D'D} = S_{BB'C'C} = a \cdot b$, где $B'B = b$.

$$S_{\text{полн.}} = 2S_{ABCD} + 2S_{AA'D'D} + 2S_{AA'B'B} = 2 \cdot \left(a^2 + ab + a \cdot \frac{b}{2}\right) = 72 \text{ см}^2.$$

Здесь $S_{AA'B'B} = AB \cdot B'H = a\frac{b}{2}$; $a^2 + \frac{3ab}{2} = 36$, $9 + \frac{9b}{2} = 36$,

$b = 6$ (см). $V = S_{ABCD} \cdot B'H = a^2 \cdot \frac{b}{2} = 27$ (см^3). Ответ: 27 (см^3).

3.18.



$$tgA = \frac{A'B}{AB},$$

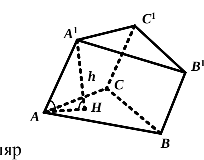
$h = A'B = AB \cdot \text{tg}A = 4 \cdot \text{tg}60^\circ = 4\sqrt{3}$ см,

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin 45^\circ =$$

$$= 16 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{2} \text{ (см}^2\text{)}.$$

$V = S_{ABCD} \cdot h = 32\sqrt{6}$ (см^3). Ответ: $32\sqrt{6}$ (см^3).

3.19. $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot \sin 60^\circ = 4\sqrt{3}$ (см^2).

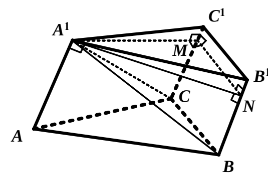


$V = S_{ABC} \cdot h = 24$ см^3 (по условию)

$$h = \frac{V}{S_{ABC}} = \frac{24}{4\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

Опустим из вершины *A'* перпендикуляр на плоскость нижнего основания. В $\Delta AA'H$ угол *H* прямой, а $\angle A$ искомый. $\sin A = \frac{h}{AA'} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle A = 60^\circ$. Ответ: $\angle A = 60^\circ$.

3.20.



Проведем плоскость через вершину *A'* перпендикулярную боковому ребру *AA'*.

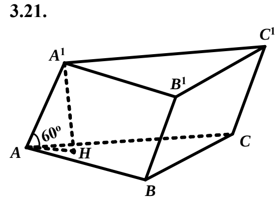
По обратной теореме Пифагора, т.к. $13^2 = 12^2 + 5^2$, в $\Delta A'MN$ угол *M* прямой, и двугранный угол, образованный боковыми гранями *AA'C'C* и *BB'C'C* – прямой.

$SBB'C'C = a \cdot MN = 22$,

$a = \frac{22}{5} = 4,4$ (см). $S_{AA'C'C} = A'M \cdot a = \frac{22}{5} \cdot 12 = \frac{264}{5}$ (см^2).

$V = \frac{1}{3} S_{AA'C'C} \cdot MN = \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot \frac{264}{5} = 88$ (см^3). Ответ: 88 (см^3).

3.21.



Объем призмы выразим через произведение площади основания на длину высоты *A'H*.

$$V = S_{ABC} \cdot A'H; \quad A'H = \frac{V}{S_{ABC}}$$

($V = 60$ см^3 по условию)

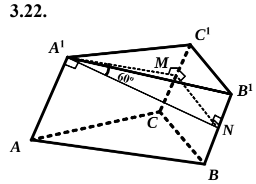
В ΔABC угол *B* прямой по условию, значит

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12$ (см^2), значит $A'H = \frac{60}{12} = 5$ (см).

В $\Delta AA'H$ угол *H* прямой (по построению), и поэтому

$\sin A = \frac{A'H}{A'A}$, $AA' = \frac{A'H}{\sin A} = \frac{5}{\sin 60^\circ} = \frac{5 \cdot 2}{\sqrt{3}}$ (см). Ответ: $\frac{10}{\sqrt{3}}$ (см).

3.22.



Проведем через вершину *A'* плоскость перпендикулярную боковому ребру *AA'*, т.к. боковые ребра призмы параллельны друг другу, то они все будут перпендикулярны этой плоскости, и значит, $A'M \perp CC'$, $A'N \perp BB'$ и $MN \perp CC'$, $MN \perp BB'$.

Поэтому $A'M = 5$ см, т.к. *A'M* равно расстоянию между боковыми ребрами, то же с $A'N = 5$ см.

$\angle A'MN : A'M = A'N$ и $\angle MA'N = 60°$. Значит $\Delta A'MN$ – равносторонний и $MN = 5$ см.

$S_{\text{бок.пов.}} = a \cdot (A'M + A'N + MN) = 8(5 + 5 + 5) = 120$ (см^2).

Ответ: 120 (см^2).

3.23.

$V = \frac{1}{3} S_{AA'C} \cdot a + \frac{1}{3} S_{BB'C'C} \cdot b$, где a, b – расстояния между боковыми ребрами BB' и CC', AA' и CC', соответственно

$S = S_{AA'C'C} + S_{BB'C'C} = AA' \cdot b + AA' \cdot a$.

Значит, $a + b = \frac{70}{5} = 14$ см. Т.к. $S_{AA'C} = \frac{1}{2} \cdot S_{AA'C'C}$,то

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AA' \cdot ab + \frac{1}{3} \cdot AA' \cdot ab = \frac{5}{2} ab = 120 \text{ (см}^2\text{)}.$$

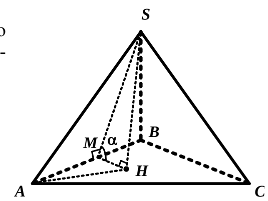
$$\begin{cases} ab = 48, \\ a + b = 14; \end{cases}; \quad a + \frac{48}{a} - 14 = 0; \quad a^2 - 14a + 48 = 0,$$

$$\begin{cases} a = 6, \\ b = 8 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a = 8, \\ b = 6 \end{cases}$$

По теореме Пифагора в $\Delta A'MN$ $c^2 = a^2 + b^2$, т.е. $c = 10$ (см).

$MN = c$. Ответ: 6 см, 8 см и 10 см.

3.24.

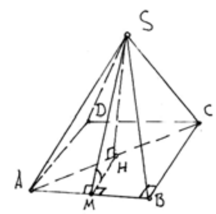


a – сторона прав. Треугольного основания H – центр ΔABC, поэтому $AH = \frac{a}{\sqrt{3}}$;

$$tg\angle SAH = \frac{SH}{AH} = \frac{a}{\frac{a}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3};$$

$\angle SAH = 60°$.

3.25.



H – центр квадрата

$AC = \sqrt{2} \cdot AB = 6\sqrt{2}$;

$AH = \frac{1}{2} AC = 3\sqrt{2}$.

В ΔASH ∠A=45°поэтому

$\angle S = 45° \Rightarrow SH = AH = 3\sqrt{2}$.

$V=\frac{1}{3}AB^2\cdot SH=\frac{1}{3}\cdot 36\cdot 3\sqrt{2}=36\sqrt{2}$ (см^3).

Ответ: $36\sqrt{2}$ (см^3).

3.26. $S_{бок.}=4\cdot S_{ASB}=2AB\cdot SM=2ab$, где b длина апофемы
$S=a^2$, где a длина стороны основания.
$S_{пов}=S_{бок.}+S_{осн.}=2ab+a^2$

$AS=\frac{h}{\sin 60^\circ}=2\sqrt{3}$ (см); $AH=\frac{1}{2}AS=\sqrt{3}$ (см);

$AC=2AH=2\sqrt{3}$ (см); $AB=a=2\sqrt{\frac{3}{2}}$ (см); $MH=\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{3}{2}}$ (см);

$SM=b=\sqrt{SH^2+MH^2}=\sqrt{9+\frac{3}{2}}=\sqrt{\frac{21}{2}}$ (см).

$S=2\cdot 2\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{\frac{21}{2}}+4\cdot\frac{3}{2}=6\sqrt{7}+6$ (см^2). Ответ: $6(1+\sqrt{7})$ (см^2).

3.27. $S=S_{бок.}+S_{осн.}=2ab+a^2$, где a – длина стороны основания, b – длина апофемы.
В ΔMHS угол H прямой и по условию угол M равен 60°, тогда

$tgM=\frac{SH}{MH}$; $MH=\frac{SH}{tgM}=\frac{6}{tg60^\circ}=2\sqrt{3}$ (см). $a=2MH=4\sqrt{3}$ (см).

$SM^2=MH^2+SH^2$; $b=SM=\sqrt{36+12}=4\sqrt{3}$ (см).

$S=2\cdot 4\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{3}+16\cdot 3=144$ (см^2). Ответ: 144 (см^2).

3.28. $S=2ab+a^2$ (из предыдущей задачи), где апофема $SM=b$, сторона основания имеет длину a, а по условию равна 12 см.

В ΔSMH $MH=\frac{a}{2}=6$ (см).

$\cos M=\frac{MH}{SM}$; $b=SM=\frac{MH}{\cos 30^\circ}=\frac{12}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$ (см).

$S=2\cdot 12\cdot 4\sqrt{3}+12^2=48(2\sqrt{3}+3)$ (см^2).

Ответ: $48(2\sqrt{3}+3)$ (см^2).

3.29. $V=\frac{1}{3}a^2h$, где a – длина стороны основания.

В $\Delta SMH: MH=\frac{a}{2}$ (как в предыдущей задаче)

$tgMSH = \dfrac{MH}{SH}$; $\dfrac{a}{2} = h \cdot tg30^\circ$; $a = 2 \cdot 6 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$ (см).

$V = \dfrac{1}{3} \cdot \left(4\sqrt{3}\right)^2 \cdot 6 = 96$ (см^3). Ответ: 96 см^3.

3.30. $V = \dfrac{1}{3}a^2h$; $\angle ASH = 45° \Rightarrow AH = SH = 10$ 10 см;

$AC = 2AH$; $AC = 20$ (см). $a = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = 10\sqrt{2}$ (см).

$V = \dfrac{1}{3} \cdot 200 \cdot 10 = \dfrac{2000}{3}$ см^3. Ответ: $\dfrac{2000}{3}$ см^3.

3.31. $S = 3 \cdot S_{ABS} = 3 \cdot \dfrac{1}{2}ab$, где a – длина стороны основания, b – длина апофемы.

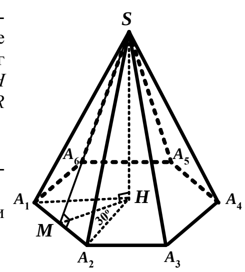
$AH = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ (см). $R = \dfrac{a}{2\sin 60^\circ} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$,

т.е. $\dfrac{a}{\sqrt{3}} = 6$, $a = 6\sqrt{3}$ (см). $b = MS = \sqrt{10^2 - \left(3\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{73}$ см.

$S_{бок.} = 3 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot \sqrt{73} = 9\sqrt{219}$ см^2. Ответ: $9\sqrt{219}$ см^2.

3.32. Задача не имеет решений, т.к. длина бокового ребра должна быть больше высоты пирамиды, а не наоборот. 16 < 20.

3.33.



1. Основание H высоты, опущенной из вершины B, лежит на центре окружности, описанной вокруг шестиугольника $A_1A_2…A_6$. A_1H имеет длину, равную радиусу R этой окружности.

ΔA_1A_2H – равносторонний

$A_1H = R = a$, a – длина стороны основания.

2. В ΔA_1HS угол H прямой, и $A_1H_1^2 = SA^2 - SH^2$;

$a = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ см;

3. ΔA_1A_2S – равнобедренный ($A_1S = A_2S$), и SM – высота и медиана, поэтому A_1M равна половине AA_1, т.е. $A_1M = 2{,}5$ см

$SM^2 = SA_1^{\ 2} - A_1M^2 = 13^2 - 2{,}5^2 = 10{,}5 \cdot 15{,}5 = 0{,}5^2 \cdot 21 \cdot 31.$

$SM = 0{,}5\sqrt{21 \cdot 31}$.

$S_{бок.} = 6 \cdot S_{A1A2S} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot A_1A_2 \cdot SM = 15 \cdot 0{,}5\sqrt{651}$ см^2.

Ответ: $\frac{15}{2}\sqrt{651}$ см^2.

3.34. В ΔMHS угол H прямой и $\angle M = 60^o$, значит, $tgM = \frac{h}{MH}$, т.е.

$h = \frac{a}{2} \cdot tg60^\circ = 4\sqrt{3}$ (см); $V = \frac{1}{3}a^2h = \frac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot 4\sqrt{3} = \frac{256}{\sqrt{3}}$ (см^3).

Ответ: $\frac{256}{\sqrt{3}}$ см^3.

3.35. Так же как и в задаче 3.34 находим, что $MH = \frac{a}{2}$ (a – длина стороны основания). Далее рассмотрим ΔMHS.

$tgSMH = \frac{h}{MH} = \frac{2h}{a}$; $a = \frac{2h}{tg30^\circ} = \frac{16}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 16\sqrt{3}$ см;

$V = \frac{1}{3}a^2h = 2048$ см^3. Ответ: 2048 см^3.

3.36. В ΔSMH угол H прямой, $\angle M = 45^o$ (по условию) и $\angle S = 45^o$, т.к. сумма углов треугольника равна 180^o, значит ΔSMH – равнобедренный, $\angle M = \angle S = 45^o$, и отсюда $MH = SH$, $MH = \frac{a}{2}$ (a – длина стороны основания). По теореме

$h = \frac{a}{2} = MH = SM \cdot \cos\angle SMH = SM\frac{\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{2}$ (см).

$V = \frac{1}{3}a^2h = \frac{1}{3} \cdot (16\sqrt{2})^2 \cdot 8\sqrt{2}$ см^2. ($S_{осн.} = a^2$, т.к. $ABCD$ – квадрат).

Ответ: $V = \frac{4096}{3}\sqrt{2}$ см^3.

3.37. Т.к. основание – квадрат, то его диагональ, вычисленная по теореме Пифагора, равна $AC = \sqrt{2}a = 5\sqrt{2}$ (см) и $S_{осн.} = 25$см^2.

$S_{ACS} = \frac{1}{2} AC \cdot h$, где h – высота пирамиды, $SH = h$; $S_{осн.} = \frac{5\sqrt{2}}{2} h$;

$\frac{5\sqrt{2}}{2} h = 25;\ h = 5\sqrt{2}$ (см). $MH = \frac{a}{2}$ т.е. $MH = 2{,}5$ (см).

В ΔSMH угол H прямой, значит $SM^2 = MH^2 + SH^2$

$b = SM = \sqrt{2{,}5^2 + (5\sqrt{2})^2} = 7{,}5$ (см).

$S_{бок.} = 4 \cdot S_{ABS} = 4 \cdot \frac{1}{2} ab = 2ab = 2 \cdot 5 \cdot 7{,}5 = 75$ (см^2). Ответ: 75 см^2.

3.38. $S_{ACS} = \frac{1}{2} AC \cdot SH$

AC – диагональ квадрата со стороной а равна $\sqrt{2}a$ (нах-ся по теор. Пифагора), и $S_{осн.} = a^2$. По условию $\frac{1}{2}\sqrt{2}ah = a^2$,

т.е. $\frac{\sqrt{2}}{2} h = a,\quad a = 5\sqrt{2}$ см. $MH = \frac{a}{2}$, $MH = \frac{5}{\sqrt{2}}$ см.

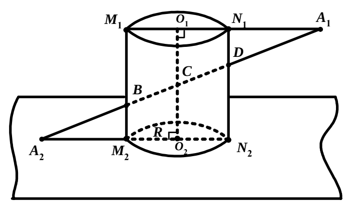
В ΔSMH угол H прямой, и поэтому $SM^2 = MH^2 + SH^2$,

$b = SM = \sqrt{\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 + 10^2} = \frac{15}{\sqrt{2}}$ см.

$S_{бок.} = 4 \cdot S_{ABS} = 4 \cdot \frac{1}{2} ab = 2ab = 2 \cdot 5\sqrt{2} \cdot \frac{15}{\sqrt{2}} = 150$ см^2

Ответ: 150 см^2.

3.39.



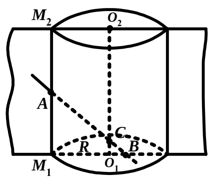
Проведем плоскость через прямую AD и ось цилиндра O_1O_2. Плоскость пересекает поверхность цилиндра по образующим M_1M_2 и N_1N_2.

1. $\Delta A_1O_1C = \Delta A_2O_2C$ (по двум углам: $\angle A_1O_1C$ и $\angle A_2O_2C$ – прямые, $\angle A_1CO_1$ и $\angle A_2CO_2$ = вертикальные; и $O_1C = CO_2$ по условию).
2. Значит, $\angle O_1A_1C = \angle O_2A_2C$ и $O_1A_1 = O_2A_2 = 24$ см, отсюда A_1N_1 – 24 см – R = 16 см. $\Delta A_1N_1D \propto \Delta A_2N_2D$ (по двум равным углам: $\angle O_1A_1C = \angle O_2A_2C$ и углы $\angle A_2DN_2$, $\angle A_1DN_1$ – вертикальные).

$A_2N_2 = A_2O_2 + R = 32$ см. $\frac{N_1D}{DN_2} = \frac{A_1N_1}{A_2N_2} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$.

3. Так же находим отношение $\frac{M_1B}{BM_2} = \frac{2}{1}$, только показываем подобие ΔA_2M_2B и ΔA_1M_1B. Ответ: $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{1}$.

3.40.

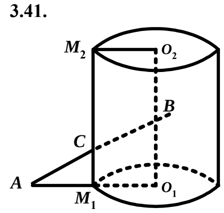


Проведем плоскость через прямую AB и образующую, которую прямая AB пересекает M_1M_2. Этой плоскости принадлежит ось цилиндра O_1O_2, т.к. она имеет с ней общую точку C и параллельна M_1M_2.
Т.к. $M_1M_2 \parallel O_1O_2$, то $\angle M_1AC = \angle O_1CB$, как соответственные при параллельных прямых. Отсюда $\Delta ABM_1 \propto \Delta CBO_1$ (по двум равным углам, т.к. еще у этих треугольников $\angle ABM_1$ – общий. Значит, $\frac{AM_1}{CO_1} = \frac{BM_1}{BO_1} = \frac{BO_1 + R}{BO_1} = \frac{3}{1}$.

$CO_1 = \frac{1}{3}AM_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{M_1M_2}{2} = \frac{M_1M_2}{3 \cdot 2}$ (по условию)

$O_1O_2 = M_1M_2$, и $CO_1 = \frac{O_1O_2}{6}$; отсюда $CO_2 = \frac{5O_1O_2}{6} \cdot \frac{CO_1}{CO_2} = \frac{1}{5}$.

3.41.

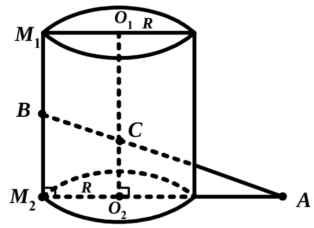


Длина O_1O_2 есть высота цилиндра. Проведем плоскость через прямую AB, которая пересекает ось O_1O_2 в середине и т.д. по условию, и саму ось цилиндра O_1O_2. Эта плоскость пересекает поверхность цилиндра по образующей M_1M_2. Т.к. любая образующая цилиндра параллельна его оси, то $O_1O_2 \parallel M_1M_2$. Отсюда можно сказать, что $\angle AM_1C = \angle AO_1B = 90^o$, угол A общий у треугольников ΔAM_1C и ΔABO_1, значит они подобны по двум равным углам.

$\frac{AM_1}{AO_1} = \frac{CM_1}{BO_1}$; $\frac{AM_1}{AO_1} = \frac{AO_1 - R}{AO_1} = \frac{1}{3}$, значит, $BO_1 = 3CM_1 = 6$ см.

$BO_1 = \frac{O_1O_2}{2}$ (по условию). $O_1O_2 = 12$ см. Ответ: 12 см.

3.42.

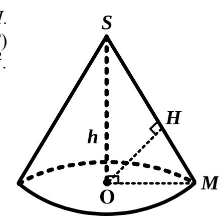


Проведем плоскость через данную в условии задачи прямую AB и ось цилиндра O_1O_2. Эта плоскость содержит также образующую M_1M_2, в которой пересекается с поверхностью цилиндра. Длина M_1M_2 равна высоте цилиндра, т.е. $M_1M_2 = 12$ см, тогда по условию $BM_2 = 6$ см.

$M_1M_2 \parallel O_1O_2$, значит, $\angle BM_2A = \angle CO_2A = 90^o$, еще у треугольников ΔABM_2 и ΔACO_2 общий угол A, и значит они подобны.

Отсюда $\frac{CO_2}{BM_2} = \frac{AO_2}{AM_2}$, т.е. $\frac{4}{6} = \frac{18}{18 + R}$, $4(18 + R) = 6 \cdot 18$, $4R = 36$, $R = 9$ (см). Ответ: 9 см.

3.43.



Рассмотрим ΔSOM с высотой OH. Пусть OM равно R, тогда ($\angle SOM = 90^o$) по теореме Пифагора $SM^2 = SO^2 + OM^2$.

$SM^2 = h^2 + R^2$, $SM = \sqrt{400 + R^2}$.

Вычислим площадь ΔSOM.

$S_\Delta = \frac{1}{2} SO \cdot OM = \frac{1}{2} OH \cdot SM$, т.е.

$20 \cdot R = 12 \cdot \sqrt{400 + R^2}$;

$5R = 3 \cdot \sqrt{400 + R^2}$; $16R^2 = 400 \cdot 9$; $R = 15$ см.

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 225 \cdot 20 = 1500\pi$ см^3

Ответ: 1500π см^3.

3.44. см. рис 3.43.

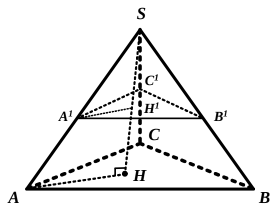
В ΔSOM угол прямой, его высота OH по условию равна 12 см. Пусть длина SM равна l, тогда по теор. Пифагора

$h^2 = SO^2 = l^2 - OM^2 = l^2 - 400$. $S_{\Delta SOM} = \frac{1}{2} l \cdot OH = \frac{1}{2} OM \cdot h$, т.е.

$12l = 20\sqrt{l^2 - 400}$, $3l = 5\sqrt{l^2 - 400}$, $16l^2 = 25 \cdot 400$, $l = 25$ см.

$S_{бок.} = \pi Rl = \pi \cdot 20 \cdot 25 = 500\pi$ см^2. Ответ: 500π см^2.

3.45.



$\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ с коэффициентом 2

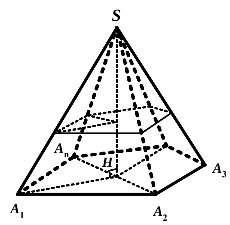
Получаем, что $\Delta A'B'C' \infty \Delta ABC$ по трем сторонам, значит $\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{1}{4}$;

$S_{ABC} = \frac{1}{2} ACBC =$

$= \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 - BC^2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{15^2 - 9^2}$

$9 = 54$. Ответ: 13,5 см^2.

3.46.



Рассмотрим $\Delta A'_1SH'$ и ΔA_1SH, угол A_1 у них общий, угол H' и угол H прямые, т.к. SH перпендикуляр двум параллельным плоскостям, значит, по двум равным углам $\Delta A'_1SH' \infty \Delta A_1SH$.

Аналогично доказывается подобие ΔA_2SH и $\Delta A'_2SH'$ и т.д., т.е. $K = \frac{SH'}{SH} = \frac{A_1'H'}{A_1H} = \frac{A_2'H'}{A_2H} = \frac{A_1'S}{A_1S} = \frac{A_2'S}{A_2S}$

, отсюда можно сказать, что $\Delta A_1'A_2'S \infty \Delta A_1A_2S$ по двум сторонам и углу между ними (угол S – общий) и т.д.

Получаем, что $\Delta A_1'A_2'H \infty \Delta A_1A_2H$ по трем пропорциональным сторонам и т.д. до $\Delta A_n'A_1'H' \infty \Delta A_nA_1 H$.

Значит, каждому треугольнику основания соответствует подобный треугольник в сечении с коэф. K

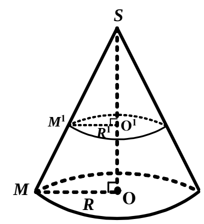
Найдем его: известно, что если треугольник подобный с коэффициентом К, то их площади отн. Как К^2

$$\frac{S_{A_n'A_2'H'}}{S_{A_1A_2H}} = \frac{S_{A_n'A_1'H'}}{S_{A_nA_1H}} = K^2 \ ,$$

Тогда получаем, что $\frac{S_{A_n'A_2'\ldots A_n'}}{S_{A_1A_2\ldots A_n}} = K^2 = \frac{1}{4}$ поусловию $K = \frac{1}{2}$

$S = 4S' = 40$ см^2; $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{320}{3}$ см^3; Ответ: $\frac{320}{3}$ см^3.

3.47. $\Delta MSO \infty \Delta M'SO'$ по двум равным углам:
1. Угол S – общий угол,
2. $\angle M'O'S = \angle MOS = 90^o$, т.к. SO перпендик. основанию, а плоскость сечения параллельна основанию.



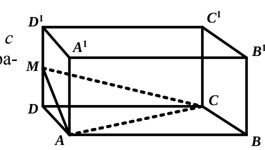
Значит, $\frac{SO'}{SO} = \frac{M'O'}{MO} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

$SO' = \frac{2}{3}SO, \quad OO' = SO - SO' = \frac{1}{3}SO$.

$\frac{SO'}{O'O} = \frac{\frac{2}{3}SO}{\frac{1}{3}SO} = \frac{2}{1}$. Ответ: $\frac{2}{1}$.

3.48. см. рис 3.47.
$S' = \pi R'^2 = \pi$ см^2 – по условию. $R' = 1$ см.
$\Delta MSO \infty \Delta M'SO'$ (доказательство см. 3.47)
$\frac{SO'}{SO} = \frac{R'}{R} = \frac{1}{3}$; $SO' = \frac{1}{3} \cdot SO = \frac{1}{3}h = 4$ см. Ответ: 4 см.

3.49.



$V=abc$, где $AD = a$, $AB = b$, $AA' = c$
Запишем выражение объема пирамиды $DACM$. $V' = \frac{1}{3}S'_{ACM}h = \frac{50}{3}$

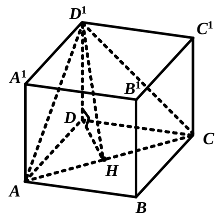
или $V' = \frac{1}{3} \cdot S_{ADC} \cdot DM$,

$S_{ADC} = \frac{1}{2}ab, \quad DM = \frac{c}{2}$; т.е. $V' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}ab \cdot \frac{1}{2}c = \frac{1}{12}abc$;

$\frac{1}{12}abc = \frac{50}{3}$; $V = abc = 200$ см^3. Ответ: 200 см^3.

3.50.

$S_{ACD'} = \frac{1}{2} AC \cdot D'H = \frac{1}{2}\sqrt{2}a \cdot D'H = 20$ см^2.



$S_{осн.} = a^2 = 20$ см^2, $a = 2\sqrt{5}$ см

$$D'H = \frac{20}{\frac{\sqrt{2}}{2}a} = \frac{40}{2\sqrt{10}} = 2\sqrt{10} \text{ см}$$

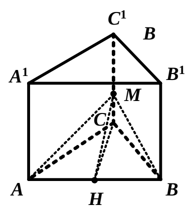
Из прямоугольного треугольника DD′H имеем:

$D'D^2 = D'H^2 - DH^2$

$h = \sqrt{(2\sqrt{10})^2 - (\sqrt{10})^2} = \sqrt{30}$ см;

$V = S_{осн.} \cdot h = 20 \cdot \sqrt{30}$ см^3. Ответ: $20\sqrt{30}$ см^3.

3.51.



$S_{ABM} = \frac{1}{2} AB \cdot MH$.

В ΔABC ($AB = BC = AC$) CH – медиана и высота, тогда

$CH^2 = BC^2 - BH^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2$, где a – длина стороны основания.

В ΔMHC: $tgMHC = \frac{MC}{CH}$,

$$tg45° = \frac{\frac{1}{2}CC'}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}, \quad h = CC' = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2, \qquad \cos MHC = \frac{CH}{MH};$$

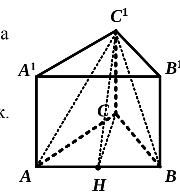
$$\cos 45^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{MH}; \ MH = \sqrt{\frac{3}{2}}a; \ S_{ABM} = \frac{1}{2}a \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}a = 4\sqrt{6}$$

$a^2 = 8 \cdot 2$, $a = 4$

$$V = S_{осн.} \cdot h = \frac{1}{2} AB \cdot CH \cdot h = \frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \sqrt{3}a = \frac{3}{4}a^3 = 48 \text{ см}^3$$

Ответ: 48 см^3.

3.52.



В $\Delta C'HC$ угол C – прямой, а $\angle H = 60^o$, тогда

$$\frac{CH}{CC'} = ctg60^\circ, \quad CH = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} \text{ см}$$

В ΔBCH угол H прямой, а $\angle B = 60^o$, т.к. ΔABC равносторонний, тогда ($BC = a$)

$$a = BC = \frac{CH}{\sin 60^\circ} = 8 \text{ см}; \ a = 8 \text{ см}$$

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot h = \frac{1}{2} AB \cdot CH \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 12 = 192\sqrt{3} \text{ см}^3$$

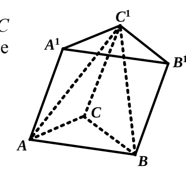
Ответ: $192\sqrt{3}$ см^3.

3.53. см. рис. 3.49. $V = abc$, a, b, c – длины AD, AB, AA', соответственно (или BC, CD, DD')

$$V_{DACM} = \frac{1}{3} \cdot S_{ACD} \cdot \frac{1}{2} DD' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} AD \cdot CD \cdot \frac{c}{2} = \frac{1}{12} abc;$$

$V = 12 \cdot V_{DAMC} = 480$ см^3. Ответ: 480 см^3.

3.54.

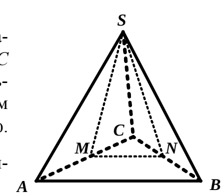


Призма $ABCA'B'C'$ и пирамида $C'ABC$ имеют одну и ту же высоту и одно и то же основание:

$$\frac{V_{C'ABC}}{V} = \frac{\frac{1}{3} S_{осн.} h}{S_{осн.} h} = \frac{1}{3}; \quad \frac{V_{C'ABC}}{V - V_{C'ABC}} = \frac{\frac{1}{3} V}{V - \frac{1}{3} V} = \frac{1}{2}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

3.55.



MN – средняя линия, значит, она параллельна AB, отсюда $\angle BAC = \angle NMC$ как соответственные при параллельных прямых. $\Delta ACB \infty \Delta MNC$ (по двум равным углам, т.к. $\angle C$ – общий), коэф. Подобия k равен $\frac{1}{2}$, т.к. средняя линия MN равна половине AB^2.

Значит, $S_{MNC} = \frac{1}{4} S_{ABC}$.

$V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h$ и $V_{SMNC} = \frac{1}{3} S_{MNC} \cdot h$ (высота у них одинаковая),

$\frac{V_{SMNC}}{V_{SABC}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} S_{ABC} h}{\frac{1}{3} \cdot S_{ABC} h} = \frac{1}{4}$; $\frac{V_{SMNC}}{V_{SABC} - V_{SMNC}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$. Ответ: $\frac{1}{3}$.

3.56.

Пусть $AB = BC = CD = AD = a$, $SO = h$. Тогда $V = \frac{1}{3} a^2 \cdot h$.

$V_1 = V_{MNCL} = \frac{1}{3} MH \cdot CH \cdot NL \cdot \frac{1}{2}$.

Рассмотрим $\Delta CNL \cdot CL = \frac{a}{2}$, $CN = \frac{a}{2}$. $\angle C = 90°$.

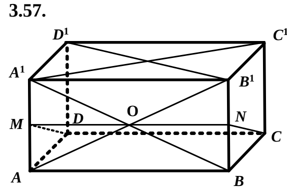
Значит $NL = \frac{a}{\sqrt{2}}$. $CH = \frac{1}{2} CO = \frac{a}{2\sqrt{2}}$.

Так как $CH = \frac{1}{2} CO$ и $\Delta SCO \sim \Delta MCH$, то $MH = \frac{1}{2} SO = \frac{1}{2} h$.

$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} h \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{3} a^2 h \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{16} V$.

Значит $\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1}{V - V_1} = \frac{1}{15}$.

3.57.



Данная плоскость пересекает две параллельные плоскости боковых граней и значит, $MN \parallel CD$.

Но по определению прямоугольного параллелепипеда $AB \parallel CD$, отсюда если одна прямая параллельна одной из двух параллельных прямых, то она параллельна третьей, т.е. $MN \parallel AB$, значит, $\angle BAB' = \angle NOB'$, т.к. это соответственные углы при параллельных прямых. Отсюда $\Delta ABB' \infty \Delta ONB'$ (по двум равным углам, $\angle B'$ у них общий). Коэф. подобия равен $\frac{1}{2}$, т.к. диагонали прямоугольника $ABB'A$ точкой пересечения делятся пополам, т.е.

$$\frac{B'N}{BB'}=\frac{1}{2} \text{ или } \frac{BN}{BB'}=\frac{1}{2}.$$

Найдем объем отсекаемой прямой призмы с основанием ΔBCN (угол B прямой).

$$V' = S'_{\text{осн.}} \cdot AB = \frac{1}{2}BN \cdot BC \cdot AB = \frac{1}{4}AB \cdot BC \cdot BB'.$$

Объем параллелепипеда равен $V = AB \cdot BC \cdot BB'$.

$$\frac{V'}{V}=\frac{1}{4}; \quad \frac{V'}{V-V'}=\frac{\frac{1}{4}V}{V-\frac{1}{4}V}=\frac{1}{3}. \quad \text{Ответ: } \frac{1}{3}.$$

3.58. см. рис. 3.46.

В 3.46 доказано, что площадь параллельного основанию сечения пирамиды относится к площади основания как квадрат отношения длины отрезка (считая от вершины), который отсекает плоскость, к высоте пирамиды.

Пусть k – коэффициент отношения отрезка к высоте, V – объем пирамиды, V' – объем отсекаемой пирамиды.

$$V'=\frac{1}{3}S' \cdot h', \text{ где } \frac{S'}{S}=k^2, \ \frac{h'}{h}=k, \text{ т.е. } V'=\frac{1}{3}k^3 \cdot Sh. \ \ V=\frac{1}{3}Sh.$$

$$\frac{V'}{V}=k^3, \text{ а по условию } \frac{V'}{V-V'}=\frac{1}{26} \Rightarrow \frac{V'}{V}=k^3=\frac{1}{27}, \ k=\frac{1}{3}.$$

Значит высота делиться в отношении $\frac{k}{1-k}=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

3.59. см. рис. 3.46.

Пусть h' – высота отсекаемой пирамиды, h – высота данной пирамиды, S' – основание отсекаемой пирамиды, S – данной пирамиды; тогда по сформулированному в 3.58

$$\frac{h'}{h}=k, \text{ по условию } \frac{h'}{h-h'}=\frac{2}{1}; \quad \frac{kh}{h-kh}=\frac{2}{1};$$

$k = 2 \cdot (1-k)$, $k=\frac{2}{3}$, тогда $\frac{S'}{S}=\frac{4}{9}$ (см. 3.58).

$$\frac{V'}{V}=\frac{\frac{1}{3}S'h'}{\frac{1}{3}Sh}=\frac{\frac{1}{3}k^3\cdot Sh}{\frac{1}{3}\cdot Sh}=k^3=\frac{8}{27};\ \frac{V'}{V-V'}=\frac{\frac{8}{27}V}{V-\frac{8}{27}V}=\frac{8}{19}.$$

Ответ: $\frac{8}{19}$.

3.60. см. рис. 3.46.

По условию $\frac{V'}{V-V'}=1$, где V' – объем отсекаемой пирамиды, а V – объем данной с основанием S = 1 м^2. Пусть S' – площадь сечения, тогда (см. 3.58) $k^2=\frac{S'}{S}$, $S'=k^2S$. (см. 3.59) $\frac{V'}{V}=k^3$, $V'=k^3V$

$$\frac{k^3V}{V-k^3V}=1,\ \frac{k^3}{1-k^3}=1,\ 2k3=1,\ k=\sqrt[3]{\frac{1}{2}};\ S'=k^2S=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\cdot 1\text{ см}^2.$$

Ответ: $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$.

3.61. *1 случай*

Если высота призмы равна 12 см, а периметр основания (треугольник) равен 15, т.е. h = 12 см, $3a$ = 15, a = 5.

$$V=h\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin 60^\circ\cdot a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 12\cdot 25=75\sqrt{3}.$$

2 случай

h = 15, $3a$ = 12, a = 4. $V=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 16\cdot 15=60\sqrt{3}$.

Ответ: $V=60\sqrt{3}$ см3, $V=75\sqrt{3}$ см^3.

3.62. Пусть h – высота призмы, периметр $3a$, где a – сторона основания.

1 случай

$3a$ = 9 см, a = 3 см, h = 18 см;

$$S_{осн}=\frac{1}{2}a\cdot a\cdot\sin 60^\circ=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{9\sqrt{3}}{4};$$

$$S=S_{бок.}+2S_{осн.}=3ah+\frac{9\sqrt{3}}{2};$$

$$S=3\cdot 3\cdot 18+\frac{9\sqrt{3}}{2}=162+\frac{9\sqrt{3}}{2}\text{ см}^2$$

2 случай
$3a = 18$ см, $a = 6$ см, $h = 9$ см;
$S_{бок} = 9\sqrt{3}$; $S = 9 \cdot 18 + 2 \cdot 9\sqrt{3} = 162 + 18\sqrt{3}$.

Ответ: $162 + \frac{9\sqrt{3}}{2}$ (см^2) и $162 + 18\sqrt{3}$ (см^2).

3.63. Пусть h – высота призмы, $4a$ – периметр, где a – сторона основания
1 случай
$4a = 12$ см, $a = 3$ см, $h = 16$ см. $V_1 = a^2h = 144$ см^3.
2 случай
$4a = 16$ см, $a = 4$ см, $h = 12$ см; $V_2 = a^2h = 296$ см^3.
Ответ: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{4}$.

3.64. Пусть h – высота призмы, $4a$ – периметр, где a – длина стороны основания.
1 случай
$4a = 24$ см, $a = 6$ см, $h = 10$ см. $S = S_{бок.} + 2S_{осн.} = 4ah + 2a^2$.
$S_1 = 24 \cdot 10 + 2 \cdot 6^2 = 312$ см^2.
2 случай
$4a = 10$ см, $a = 2{,}5$ см, $h = 24$ см. $S_2 = 10 \cdot 24 + 2 \cdot 2{,}5^2 = 252{,}5$ см^2.
Ответ: S_1 больше на 59,5 см^2, чем S_2.

3.65. Пусть h – высота призм и по условию равна 8 см, a – длина стороны основания
1 случай
$3a = 12$ см, $a = 4$ см.
$V_1 = S_{осн.} \cdot h = \frac{1}{2}a^2 \cdot \sin 60^\circ \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 16 \cdot 8 = 32\sqrt{3}$ см^3.
2 случай
$4a = 12$ см, $a = 3$ см; $V_2 = a^2h = 9 \cdot 8 = 72$.
Ответ: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$.

3.66. Пусть h – высота обеих призм и по условию равна 10 см, a – длина стороны основания
1 случай
$3a = 24$ см, $a = 8$ см
$S_1 = S_{бок.} + 2S_{осн.1} = 3ah + a^2 \cdot \sin 60^\circ = 240 + 2 \cdot 16\sqrt{3} = 16(15 + 2\sqrt{3})$ см^2.

2 случай
$4a = 24$ см, $a = 6$ см.
$S_2 = S_{бок.} + 2S_{осн.2} = 4ah + 2a^2 = 240 + 2 \cdot 36 = 312$ см^2.

Ответ: S_1 меньше S_2 на $8 \cdot (9 - 4\sqrt{3})$ см^2.

3.67. Пусть h – высота пирамиды, по условию она равна стороне квадрата, т.е. 12 см, периметр равен тоже 12 см.
1 случай
$3a = 12$ см, где a – сторона основания. $a = 4$ см.

$$S_{осн.1} = \frac{1}{2}a^2 \cdot \sin 60^\circ$$

$$S_1 = S_{бок.1} + 2S_{осн.1} = 3a \cdot h + a^2 \cdot \sin 60^\circ = 12 \cdot 12 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4^2 = 8 \cdot (18 + \sqrt{3}) \text{ см}^2.$$

2 случай
$4a = 12$ см, $a = 3$ см. $S_{осн.2} = a^2$,
$S_2 = S_{бок.} + 2S_{осн.2} = 4ah + 2a^2 = 12 \cdot 12 + 2 \cdot 9 = 162$ см^2.

Ответ: S_2 больше S_1 на $2S_{осн.2} - 2S_{осн.1} = 18 - 8\sqrt{3}$ см^2.

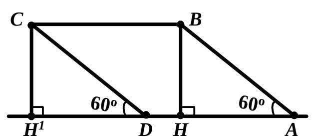
3.68. Пусть h – высота, тогда по условию она равна стороне квадрата, т.е. 24 см, периметр равен тоже 24 см
1 случай

$3a = Р$, $a = Р/3 = 8$ см. $V_1 = S_{осн.1} \cdot h = \frac{1}{2}a^2 \cdot \sin 60^\circ \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{p^2}{9}$

2 случай
$4a = p$, $a = p/4 = 6$ см. $V_2 = S_{осн.2} \cdot h = a^2 \cdot h = 36 - 24$ см^2

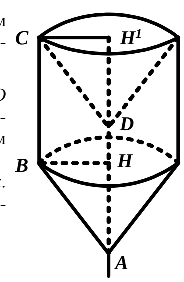
Ответ: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_{осн.1}}{S_{осн.2}} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$.

3.69.



1. При вращении AB около AD получается конус с образующей равной AB, и радиусом равны BH. (В ΔABH $\angle H$ прямой, $\angle A$ по условию 60°, $BH = AB \cdot \sin 60^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$ см, $AH = AB \cdot \cos 60^\circ = 5$ см)

2. При вращении BC около AD получаем цилиндр высотой равной BC, т.е. по условию 10 см, и радиусом $BH = 5\sqrt{3}$ см.



При вращении CD – конус, образующая $CD = AB$, и радиус $CH' = BH$ (т.к. по определению ромба $AD \parallel CB$), значит, общий объем V равен.

$V = V_{\text{конус1}} + V_{\text{цилиндр}} - V_{\text{конус2}} = V_{\text{цилиндр}}$ (т.к. $V_{\text{конус1}} = V_{\text{конус2}}$, т.к. $\Delta ABH = \Delta CDH'$ по гипотенузе и катету: $AB = CD$, $BH = CH'$,

т.е. $V_{\text{конус1}} = \frac{1}{3}\pi BH^2 \cdot AH$ и $V_{\text{конус2}} =$

$= \frac{1}{3}\pi CH'^2 \cdot DH'$). $V_{\text{цилиндр}} = \pi BH^2 \cdot BC = \pi \cdot 10 \cdot 75 = 750\pi$ (см^2).

Ответ: 750π см^2.

3.70. см. рис 3.69.

1. AB, вращаясь, дает конус с высотой AH (т.к. в ΔABH $\angle H$ прямой и по условию AB = 8 см, угол A равен 60°, то радиус $BH = AB \cdot \cos 60^\circ = 4\sqrt{3}$ см), образующая AB по условию равна 8 см.

$S_{\text{пов.1}} = \pi BH \cdot AB = \pi \cdot 4\sqrt{3} \cdot 8 = 32\sqrt{3}\pi$ см^2

2. BC, вращаясь, дает цилиндр с образующей BC, равной по условию 8 см, и радиусом BH, равным $4\sqrt{3}$ см.

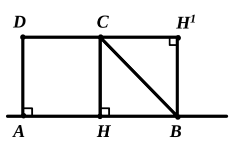
$S_{\text{пов.2}} = 2\pi BH \cdot BC = 2\pi \cdot \left(4\sqrt{3}\right) \cdot 8 = 64\sqrt{3}\pi$ см^2

3. CD, вращаясь, дает конус с образующей CD, равной по длине AB, и радиусом CH', равным BH, т.к. $AD \parallel BC$ по определению ромба, значит $S_{\text{пов.3}} = S_{\text{пов.1}}$

4. $S = 2S_{\text{пов.1}} + S_{\text{пов.2}} = 128\sqrt{3}\pi$ см^2. Ответ: $128\sqrt{3}\pi$ см^2.

3.71.

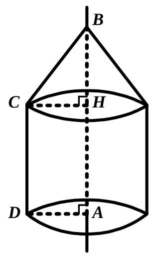
1. BC, вращаясь, дает конус с образующей BC, радиусом CH и высотой BH.

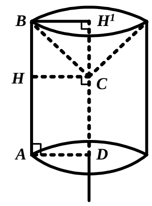


CH = 4 см (по условию)

$AHCD$ – прямоугольник, значит $AH = DC$ и $BH = AB - AH = AB - CD =$ = 8 см – 5 см = 3 см.

$V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3}\pi CH^2 \cdot BH = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 3 = 16\pi$ см^3.





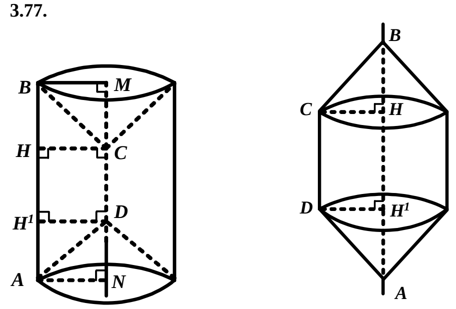
2. CD, вращаясь около AB, дает цилиндр с радиусом CH и высотой AH. По условию $AH = DC = 5$ см, $CH = 4$ см.
$V_{\text{цил.}} = \pi CH^2 \cdot AH = \pi \cdot 4^2 \cdot 5 = 80\pi$ см^3.
3. $V = V_{\text{кон.}} + V_{\text{цил.}} = 16\pi + 80\pi = 96\pi$ см^3. Ответ: 96π см^3.

3.72. 1. BC, вращаясь около AB, дает конус с образующей BC и радиусом CH, равным по условию 3 см.
$BC^2 = CH^2 + BH^2$, $BH = AB - AH$, а $AH = CD$, т.к. это стороны прямоугольника $AHCD$, тогда по условию
$BH = AB - CB = 10 - 6 = 4$ см, и $BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ (см).
$S_1 = \pi \cdot CH \cdot BC = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi$ см^2
2. CD, вращаясь около AB, дает цилиндр с радиусом CH, равным по условию 3 см, и высотой AH, равной 6 см, тогда
$S_2 = 2\pi\, CH \cdot AH = 2\pi \cdot 3 \cdot 6 = 36\pi$ см^2
3. DA, вращаясь около AB, дает окружность радиусом CH,
$S_3 = \pi CH^2 = 9\pi$ см^2, $S = S_1 + S_2 + S_3 = 15 + 36 + 9 = 60$ см^2
Ответ: 60 см^2.

3.73. 1. AB, вращаясь около CD, дает цилиндр с радиусом AD, равным по условию 3 см, и высотой DH', равной AB, которая по условию равна 14 см, т.к. $ABH'D$ по условию и построению параллелограмм, то его противоположные стороны равны.
$V_1 = \pi \cdot AD^2 \cdot AB = \pi \cdot 3^2 \cdot 14 = 126\pi$ см^3
2. BC, вращаясь вокруг CD, дает конус с высотой CH', радиусом BH', равным AD, т.к. $AB \parallel CD$ по определению трапеции, т.е. $BH' = 3$ см.
$CH' = DH' - CD = AB - CD = 14 - 10 = 4$ см
$$V_2 = \frac{1}{3}\pi BH'^2 \cdot CH' = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi$$
3. $V = V_1 - V_2 = 126\pi - 12\pi = 114\pi$ см^3
Ответ: 114π см^3.

3.74. 1. Вращаясь около *CD*, *AB* дает поверхность цилиндра с радиусом, равным *CH* (по условию *CH* = 4 см) и высотой, равной *AB* (по условию *AB* = 15 см).
S1 = 2πCH · AB = 120π см2
2. Вращаясь около *CD*, *BC* дает поверхность конуса с образующей *BC* и радиусом *BH'*.
$BC^2 = CH^2 + BH^2$, $BH = AB - AH = AB - DC$, т.к. *AHCD* – прямоугольник, а в прямоугольнике противоположные стороны равны, значит *BH* = 15 см – 12 см = 3 см, $BC = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ см
$S_2 = \pi BH' \cdot BC = 20\pi$ см^2.
3. *AD*, вращаясь, дает окружность с радиусом *AD*, *AD*=*CH* = 4 см.
$S_3 = \pi CH^2 = 16\pi$ см^2.
4. $S = S_1 + S_2 + S_3 = 120\pi + 20\pi + 16\pi = 156\pi$ см^2
Ответ: 156π см^2.
3.75. *1 случай*
Пользуемся выражениями объема, данными в задаче 3.73.
$V_1 = \pi \cdot AD^2 \cdot AB = \pi \cdot 12^2 \cdot 15 = 2160\pi$ см^3 – для цилиндра
$V_2 = \frac{1}{3}\pi BH'^2 \cdot CH' = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 5\pi = 240\pi$ см^3 – для конуса
$CH' = AB - CD = 15$ см – 10 см = 5 см, $AD = CH = 12$ см.
$V = V_1 - V_2 = 1920\pi$ см^3.
2 случай
Возьмем выражения из 3.71.
$V'_1 = \pi CH^2 \cdot AH = \pi \cdot 12^2 \cdot 10 = 1440\pi$ см^3 – для цилиндра,
$AH = CD = 10$ см
$V'_2 = \frac{1}{3}\pi CH^2 \cdot BH = \frac{1}{3}\pi \cdot 12^2 \cdot 5 = 240\pi$ см^3 – для конуса,
$BH = AB - CD = 5$ см
$V' = V'_1 + V'^2 = 1680\pi$ см^3
Ответ: *V* больше *V'* на 240π см^3.
3.76. см. рис. 3.71.
1 случай
Пользуемся выражением площади из 3.74.
$S_1 = 2\pi \cdot CH \cdot AB = 2\pi \cdot 15 \cdot 20 = 600\pi$ см^2 – площадь цилиндра
$S_2 = \pi \cdot BH' \cdot BC$, где $BH' = CH = 15$ см и $BC = \sqrt{CH^2 + HB^2}$,
$HB = AB - CD = 20$ см – 12 см = 8 см. $BC = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$ см.
$S_2 = \pi \cdot 15$ см $\cdot$ 17 см = 255π см^2 – площадь боковой поверхности конуса

$S_3 = \pi AD^2$, $AD = CH = 15$ см.
$S_3 = \pi \cdot 15^2 = 225\pi$ см^2 – площадь окружности.
$S = S_1 + S_2 + S_3 = 1080\pi$ см^2.
2 случай
Пользуемся выражением из 3.72.
$S'_1 = \pi CH \cdot BC$, где $CH = 15$ см по условию, а $BC = \sqrt{CH^2 + HB^2}$,
$BH = AB - CD = 20$ см – 12 см = 8 см, $BC = 17$ см
$S'_1 = \pi \cdot 15 \cdot 17 = 255\pi$ см^2 – площадь боковой поверхности конуса
$S'_2 = 2\pi CH \cdot CD = 2\pi \cdot 15 \cdot 12 = 360\pi$ см^2 – площадь боковой поверхности цилиндра.
По условию $CH = 15$ см, $CD = 12$ см.
$S'_3 = \pi CH^2 = 225\pi$ см^2 – площадь окружности
$S' = S'_1 + S'_2 + S'_3 = 840\pi$ см^2
Ответ: S больше S' на 240π см^2, т.е. на $S_1 - S'_2$ (разность площадей поверхностей цилиндров в 1-ом случае и во 2-ом случае).
3.77.



Рассмотрим равнобокую трапецию $ABCD$ с меньшим основанием CD и большим AB. $BM = CH$, т.к. CH – по построению высота трапеции, и $BM \perp DC$, т.е. расстояние от любой точка одной из параллельных прямых до другой прямой одинаково.
Аналогично, $AN = DH'$. ΔADN и ΔBCM – прямоугольные и равны по катетам $AN = BM$ ($AN = DH' = CH = BM$) и гипотенузам $AD = BC$, т.к. трапеция равнобокая, значит, $DN = CM$.
1. При вращении AD и BC вокруг CD, получаем конусы с одинаковым объемом, т.е.

$$V_1 = \frac{1}{3} BM^2 \cdot \pi \cdot CM \text{ и } V_2 = \frac{1}{3} \pi AN^2 \cdot DN. \quad V_1 = V_2 = V_{\text{кон.}}$$

2. При вращении AB вокруг DC получается цилиндр с высотой, $AB = 16$ см; с радиусом, $CH = 4$ см.
$V_{цил.} = \pi CH^2 \cdot AB = 16^2\pi = 256\pi$ см^3.
3. $ABMN$ – прямоугольник по построению.

$$DN = CM = \frac{AB - CD}{2} \qquad CM = \frac{16-10}{2} = 3 \text{ см}, BM = CH = 4 \text{ см}.$$

$$V_{кон.} = \frac{1}{3}\pi BM^2 \cdot CM = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 3 = 16\pi \text{ см}^3$$

4. $V = V_{цил.} - 2V_{кон.} = 256\pi - 32\pi = 224\pi$ см^3
Ответ: 224π см^3.
3.78. 1. Т.к. $AD = BC$ и $AN = BM$ (см. 3.77), то
$S_1 = \pi AN \cdot AD$ и $S_2 = \pi BM \cdot BC$, то
$S_1 = S_2 = S_{кон.} = \pi \cdot CH \cdot AD$
Найдем AD по теор. Пифагора, т.е. $AD^2 = AN^2 + DN^2$;

$AN = CH = 3$ см, $DN = \dfrac{AB - CD}{2}$ (см. 3.77), значит,

$$AD^2 = CH^2 + \left(\frac{AB - CD}{2}\right)^2. \quad AD = \sqrt{3^2 + \left(\frac{18-10}{2}\right)^2} = 5 \text{ см}.$$

$S_{кон.} = \pi \cdot 3$ см $\cdot$ 5 см $= 15\pi$ см^2.
2. $S_{цил.} = 2\pi \cdot CH \cdot AB = 2\pi \cdot 3 \cdot 18 = 108\pi$ см^2.
3. $S = S_{цил.} + 2S_{кон.} = 108\pi + 2 \cdot 15\pi = 138\pi$ см^2. Ответ: 138π см^2.
3.79. В трапеции $ABCD$ $AD = BC$ (трапеция равнобокая), CH и DH' – высоты, значит, $\Delta ADH'$ и ΔBCH – прямоугольные и равные, по катетам и гипотенузе, значит, $BH = AH'$, а $CD = HH'$ (противолежащие стороны прямоугольника $CDH'H$).

$$AH' = BH = \frac{AB - CD}{2}.$$

1. Вращаем AD и BC около AB, получаем два конуса, с радиусом равным CH и DH' ($CH = DH'$) и высотой AH' и BH.

$V_1 = \dfrac{1}{3}\pi CH^2 \cdot BH$ и $V_2 = \dfrac{1}{3}\pi \cdot DH'^2 \cdot AH'$, т.е.

$V_1 = V_2 = V_{кон.} = \pi \cdot CH^2 \cdot \dfrac{AB - CD}{2}$. $V_{кон.} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 3 = 16\pi$ см^3.

2. Вращаем CD около AB, получаем цилиндр высотой равной длине CD, т.е. по условию 12 см, и радиусом равным длине CH, т.е. 4 см. $V_{цил.} = \pi \cdot CH^2 \cdot CD = \pi \cdot 4^2 \cdot 12 = 192\pi$ см^3.
3. $V = V_{цил.} + 2V_{кон.} = 224\pi$ см^3. Ответ: 224π см^3.

3.80. Воспользуемся зад. 3.79, найдем AD по теор. Пифагора

$AD=\sqrt{AH'^2+DH'^2}$, $AH'=BH=\dfrac{AB-CD}{2}$, т.е.

$AD=BC=\sqrt{CH^2+\left(\dfrac{AB-CD}{2}\right)^2}$, т.к. CH и DH' – высоты трапеции.

Вращая AD и BC около AB, получаем конусы с равными боковыми пов-ми, т.к. $S_1=\pi\cdot CH\cdot BC$ и $S_2=\pi\cdot DH'\cdot AH'$

$S_1=S_2=S_{кон.}=\pi\cdot CH\cdot\sqrt{CH^2+\left(\dfrac{AB-CD}{2}\right)^2}$.

$S_{кон.}=\pi\cdot 12\cdot\sqrt{12^2+5^2}=156\pi$ см^2

2. Вращаясь CD около AB, дает цилиндр с радиусом CH и высотой равной по длине CD.

$S_{цил.}=2\pi CH\cdot CD$; $S_{цил.}=2\pi\cdot 12\cdot 15=360\pi$ см^2;

3. $S=S_{цил.}+2S_{кон.}=672\pi$ см^2. Ответ: 672π см^2.

3.81. См. 3.77 и 3.79

1 случай

CH – высота трапеции, AB и CD – длины оснований трапеции

$V=V_{цил.}-2V_{кон.}=\pi CH^2\cdot AB - 2\cdot\dfrac{1}{3}\pi\cdot CH^2\cdot\dfrac{AB-CD}{2}=$

$=\pi\cdot CH^2\cdot\left(AB-\dfrac{AB-CD}{3}\right)=\pi\cdot 8^2\cdot\left(24-\dfrac{12}{3}\right)=1280\pi$ см^3

2 случай

$V'=V'_{цил.}+2V'_{кон.}=\pi CH^2\cdot CD+2\pi\cdot\dfrac{1}{3}CH^2\cdot\dfrac{AB-CD}{2}=$

$=\pi CH^2\left(CD+\dfrac{AB-CD}{3}\right)=\pi\cdot 8^2\cdot 16=1024$ см^3

Ответ: V больше на 256π см^3, чем V'.

3.82. *1 случай.*

Из т. Пифагора $AD=\sqrt{AH^{12}+(DH)^2}=10$ см^2

$S=S_{цил.}+2S_{кон.}=2\pi\cdot CH\cdot AB+2\cdot\pi CH\cdot\sqrt{AD}=$

$=2\pi CH\cdot\left(AB+\sqrt{AD}\right)=2\pi\cdot 6\cdot(28+10\pi)=456\pi$ см^2

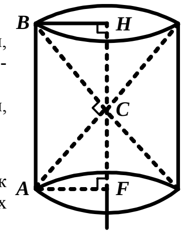
2 случай (см. 3.80)

$S'=S'_{цил.}+2S'_{кон.}=2\pi CH\cdot CD+2\pi CH\cdot\sqrt{AD}=$

$= 2\pi CH \cdot \left(CD + \sqrt{AD}\right) = 2\pi \cdot 6 \cdot \left(12 + 10\right) = 264\pi$ см^2.

Ответ: S больше, чем S' на 192π см^2.

3.83.



1. AB, вращаясь, дает цилиндр с радиусом, равным BH, и высотой, равной AB, по условию $AB = 6$ см.

Пусть AC – катет, по условию равный 3 см, тогда $\sin ABC = \dfrac{AS}{AB} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$, т.е.

$\angle ABC = 30^\circ$, тогда $\angle BCH = \angle ABC = 30^\circ$ как накрест лежащие при параллельных прямых AB и HF.

В ΔACF угол $\angle ACF = 180^\circ - (\angle ACB + \angle BCH) = 60^\circ$,

$AF = AC \cdot \sin ACF = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3$ см; $CF = AC \cdot \cos ACF = \dfrac{3}{2}$ см.

$AB = HF$, $AF = BH$ ($ABHF$ – прямоугольник), противоположные стороны прямоугольника равны.

$V_{цил.} = \pi \cdot BH^2 \cdot AB = \pi \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot 6 = \dfrac{81\pi}{2}$ см^3

2. ВС, вращаясь, дает конус с высотой $CH = AB - CF = \dfrac{9}{2}$ см и радиусом $BH = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ см.

$V_1 = \dfrac{1}{3}\pi BH^2 \cdot CH = \dfrac{1}{3}\pi \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \dfrac{9}{2} = \dfrac{81}{8}\pi$ см^3.

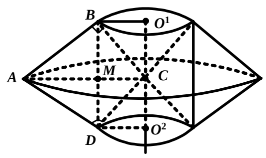
3. АС, вращаясь, дает конус с высотой $CF = \dfrac{3}{2}$ см и радиусом $AF = \dfrac{3\sqrt{3}}{3}$ см. $V_2 = \dfrac{1}{3}\pi AF^2 \cdot CF = \dfrac{27}{8}\pi$ см^3.

4. V = Vцил. – (V1 + V2) = $\dfrac{81\pi}{2} - \dfrac{27}{2}\pi = \dfrac{54}{2}\pi$ см^3.

Ответ: 27π см^3.

3.84.

AB, вращаясь, дает усеченный конус с высотой h, равной половине диагонали квадрата, т.е. $\frac{\sqrt{2}}{2}a$, где a – длина стороны квадрата, a=8 см, радиус верхнего основания тоже равен $\frac{\sqrt{2}}{2}a$, а радиус нижнего основания R равен длине диагонали $\sqrt{2}a$.



$$V=\frac{1}{3}\pi\left(R^2+r^2+Rr\right)\cdot h=\frac{1}{3}\pi\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2+\left(\sqrt{2}a\right)^2+\sqrt{2}a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a=$$

$$=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{5a^2}{2}+a^2\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{7\sqrt{2}}{4\cdot 3}\pi a^3=\frac{896\sqrt{2}\pi}{3}\text{ см}^3.$$

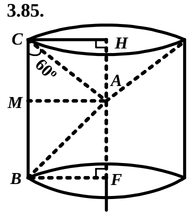
2. BC, вращаясь, дает конус с высотой, равной $\frac{\sqrt{2}}{2}a$, и радиусом той же длины. $V'=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot h=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{2\sqrt{2}}{8}a^3=\frac{128\sqrt{2}\pi}{3}$ см^3.

3. Объем полученной фигуры равен $2\cdot(V-V')$, т.к. фигура, полученная при вращении отрезков AB и BC, симметрична относительно плоскости большего основания с радиусом $\sqrt{2}a$ фигуре, полученной вращением отрезков AD и CD.

$$2\cdot\left(V-V'\right)=2\cdot\left(\frac{896\sqrt{2}\pi}{3}-\frac{128\sqrt{2}\pi}{3}\right)=256\sqrt{2}\pi\cdot 2=512\sqrt{2}\pi\text{ см}^3$$

Ответ: $512\sqrt{2}\pi$ см^3.

3.85.

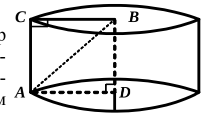


При вращении треугольника ΔABC получается цилиндр (с высотой, равной стороне треугольника, с радиусом, равным $AM=AC\cdot\sin ACM=4\cdot\sin 60^\circ=2\sqrt{3}$ см, по условию) с вырезанными из него одинаковыми конусами с высотой, равной по длине половине BC (т.к. AM – высота и медиана равностороннего треугольника), т.е. 2 см, и радиусами, равными длине AM, т.е. $2\sqrt{3}$ см.

$$V = V_{\text{цил.}} - 2V_{\text{кон.}} = \pi AM^2 \cdot BC - 2\cdot\frac{1}{3}\pi AM^2\cdot\frac{BC}{2} =$$

$$= \pi AM^2\cdot\left(BC - \frac{BC}{3}\right) = \frac{2\pi AM^2\cdot BC}{3} = 32\pi \text{ см}^3.$$ Ответ: 32π см^3.

3.86.

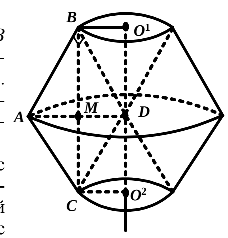


Вращая треугольник, получаем цилиндр высотой, равной AC, т.е. 3 см, и радиусом BC, т.е. по условию 4 см, с вырезанным конусом с тем же радиусом ($BC = AD$) и той же высотой.

$$V = V_{\text{цил.}} - V_{\text{кон.}} = \pi BC^2\cdot AC - \frac{1}{3}\pi BC^2\cdot AC = \frac{2}{3}\pi BC^2\cdot AC =$$

$$= \frac{2}{3}\pi\cdot 4^2\cdot 3 = 32\pi \text{ см}^2.$$ Ответ: 32π см^3.

3.87.

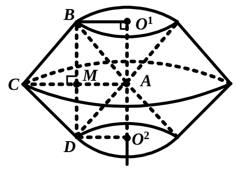


Фигура, полученная при вращении AB и BD, равна по объему фигуре, полученной при вращении AC и CD, т.к. эти фигуры симметричны относительно плоскости окружности, полученной при вращении AD.

AB, вращаясь, дает усеченный конус с меньшим радиусом r, равным половине AD, т.к. диагонали ромба точкой пересечения делятся пополам, с большим радиусом R равным AD (по условию 10 см), из прямоугольного ΔABM найдем длину высоты h усеченного конуса $BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ см. Из этого усеченного конуса вырезается конус с радиусом, равным $\frac{AD}{2}$, т.е. 5 см, и высотой, равной BM, т.е. 12 см.

$$V = 2\cdot(V_{\text{ус.кон.}} - V_{\text{кон.}}) = 2\cdot\left(\frac{1}{3}\pi\left(R^2 + r^2 + Rr\right)\cdot h - \frac{1}{3}\pi r^2 h\right) =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{3}\pi\left(R^2 + Rr\right)h = 2\cdot\frac{1}{3}\pi\left(10^2 + 10\cdot 5\right)\cdot 12 = 1200\pi \text{ см}^3.$$



3.88.
Как и в предыдущей задаче, найдем объем одной из симметричных фигур, состоящей из усеченного конуса (с высотой h, меньшим радиусом r, большим радиусом R) и удаленного из него конуса с радиусом r и высотой h.

$$V = 2\cdot(V_{\text{ус.кон.}} - V\text{кон.}) = 2\cdot\left(\frac{1}{3}\pi\left(R^2+r^2+Rr\right)h - \frac{1}{3}\pi r^2 h\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\pi\left(R^2+Rr\right)\cdot h\ .$$

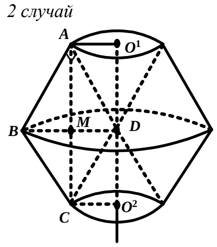
1 случай
$R = AC = 12$ см (по условию).

$r = \frac{AC}{2} = 6$ см, т.к. диагонали ромба перпендикулярны между собой и точкой пересечения делятся пополам.

$$h = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \sqrt{10^2-6^2} = 8 \text{ см, } \left(\frac{BD}{2} = 8 \text{ см, } BD = 16 \text{ см}\right)$$

$V_1 = \frac{2}{3}\pi\left(12^2+12\cdot 6\right)\cdot 8 = 1152\pi$ см^3. Ответ: 1152π см^3.

2 случай

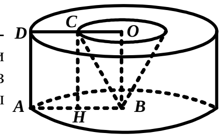


$R = BD = 16$ см; $r = \frac{BD}{2} = 8$ см; $h = \frac{AC}{2} = 6$ см.

$V_2 = \frac{2}{3}\pi\left(16^2+16\cdot 8\right)\cdot 6 = 256\cdot 6 = 1536\pi$ см^3.

Ответ: V_1 меньше V_2 на 384π см^3.

3.89.



AD, вращаясь, дает цилиндр с высотой, равной AD (по условию 6 см) и радиусом AB (по условию 18 см). Из него вырезается конус той же высоты и радиусом, равным HB.

$HB = AB - AH = AB - CD$ ($AHCD$ – прямоугольник, поэтому $AH = AB$). HB = 18 см – 10 см = 8 см.

$$V = V_{\text{цил.}} - V_{\text{кос.}} = \pi AB^2 \cdot AD - \frac{1}{3}\pi HB^2 \cdot AD =$$

$$= \pi \cdot AD \cdot \left(AB^2 - HB^2 \cdot \frac{1}{3}\right) = \pi \cdot 6 \cdot \left(18^2 - \frac{64}{3}\right) = 1816\pi \text{ см}^3.$$

Ответ: 1816π см^3.

3.90. $V_{\text{шар}} = 3V_{\text{куб}} = 3a^3$;

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 3a^3, \quad R = \sqrt[3]{\frac{9}{4}\pi a}. ; \; S_{\text{шар}} = 4\pi R^2 = 4\pi\sqrt[3]{\frac{81}{16\pi^2}a^2} ;$$

$3S_{\text{куб}} = 3 \cdot 6a^2 = 18a^2$;

$$\frac{3S_{куб.}}{S_{шар}} = \frac{18}{4\pi\sqrt[3]{\frac{81}{16\pi^2}}} = \frac{18}{\sqrt[3]{81 \cdot 4\pi}} > 1 ;$$

$18 \vee \sqrt[3]{81 \cdot 4\pi}$; $9^3 \cdot 2^3$ v $81 \cdot 4\pi$, $9 \cdot 2$ v π, $18 > \pi$.

Ответ: $3S_{\text{куб}}$ больше, чем $S_{\text{шар}}$.

3.91. $V_{\text{куб}} = 4V_{\text{шар}} = 4 \cdot \frac{4}{3}\pi a^3$. Пусть b – сторона куба, тогда

$$b^3 = \frac{16\pi}{3}a^3, \quad b = \sqrt[3]{\frac{16\pi}{3}}a ; \quad 4S_{\text{шар}} = 4 \cdot 4\pi a^2 = 16\pi a^2;$$

$$S_{\text{куб}} = 6b^2 = 6\left(\sqrt[3]{\frac{16\pi}{3}}a\right)^2 = 2 \cdot \sqrt[3]{3 \cdot 16^2\pi}a^2 = 8\sqrt[3]{12\pi^2}a^2 .$$

$$\frac{S_{куб}}{4S_{шар}} = \frac{8\sqrt[3]{12\pi^2}a}{16\pi a^2} = \frac{\sqrt[3]{12}}{2\sqrt[3]{\pi}} = \frac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{8\pi}} < 1 .$$

$12\pi < 8\pi$. Ответ: $S_{\text{куб}}$ меньше, чем $4S_{\text{шар}}$.

3.92. $V_{\text{куб}} = a^3 = 4^3 = 64$ см^3.

$$n \cdot V_{\text{шар}} = n \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = n \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 = \frac{4}{3}\pi n, n \in N \; \left(\frac{d}{2} = R\right)$$

$$\frac{V_{куб}}{nV_{шар}} = \frac{64}{\frac{4}{3}\pi n} = \frac{48}{\pi n} \geq 1$$, при $n \leq 15$. Ответ: 15 шариков.

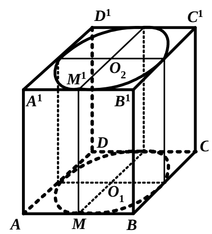
3.93. $n \cdot V_{куб} = na^3$, где a – сторона куба, равная по условию 2 см, n – число кубов.

$nV_{куб} = n \cdot 2^3 = 8n$; Vшар = $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = \frac{32}{3}\pi$ см^3.

$$\frac{V_{шар}}{nV_{куб}} = \frac{\frac{32}{3}\pi}{n \cdot 8} = \frac{4\pi}{3n} \geq 1,\ n \in N;\ \frac{4\pi}{3n} \geq 1;\ n \leq \frac{4\pi}{3};\ n \leq 4\ .$$

Ответ: 4 кубика.

3.94.



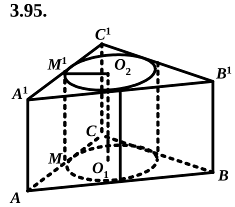
Радиус цилиндра равен половине стороны основания призмы, высота у цилиндра и призмы одинаковая. Пусть a – длина стороны основания, тогда

$V = V_{цил.} = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot h$ и $V_{призмы} = a^2 \cdot h$

$V = \frac{\pi}{4}a^2 \cdot h$; $\frac{4V}{\pi} = a^2h = V_{призмы}$.

Ответ: $\frac{4V}{\pi}$.

3.95.



Основание правильной треугольной призмы есть равносторонний треугольник, радиус вписанной окружности выражается через длину стороны этого треугольника.

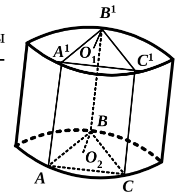
$r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$.

$S = S_{призмы} = 3a \cdot h$, где a – длина стороны основания, h – высота

$S_{цил.} = 2\pi rh = \frac{2\pi \cdot a}{2\sqrt{3}}h = \frac{\pi}{\sqrt{3}}ah = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}S$.

Ответ: $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}S$.

3.96.



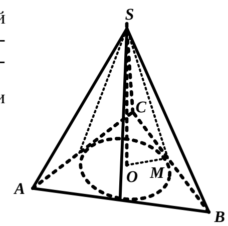
Основание правильной треугольной призмы – равносторонний треугольник, радиус описываемой окружности равен $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

(a – сторона основания)

$R = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $S = 3ah$,

$S_{\text{цил.}} = 2\pi R h = 2\pi \frac{a}{\sqrt{3}} h = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} S$. Ответ: $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} S$.

3.97.



Основание правильной треугольной пирамиды – равносторонний треугольник, радиус описанной окружности равен $\frac{a}{\sqrt{3}}$. Высоты у конуса и пирамиды одинаковые.

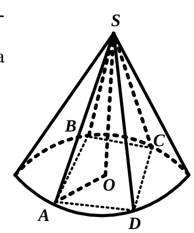
$r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$, $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3 \cdot 12}\pi a^2 h$;

$a^2 h = \frac{36}{\pi} V$.

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн.}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot \sin 60^\circ \cdot h = \frac{1}{6} a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} h = \frac{1}{4\sqrt{3}} a^2 h =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{3}} \cdot \frac{36}{\pi} V = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} V.$$ Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{\pi} V$.

3.98.

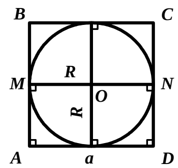


Радиус описанной вокруг квадрата окружности равен $\frac{\sqrt{2}}{2} a$, где a – сторона квадрата

$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} a^2 h$, $V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2} a^2 h$

$V_{\text{кон.}} = \frac{\pi}{2} V_{\text{пир}} = \frac{\pi}{2} V$. Ответ: $\frac{\pi}{2} V$.

3.99.



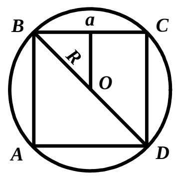
Проведем сечение через точку пересечения диагоналей куба, в этой же точке находится центр шара, вписанного в куб.

$S_{\text{шар}} = 4\pi R^2$ и $S_{\text{куб}} = 6a^2$

$R = \dfrac{a}{2}$. $S_{\text{шар}} = \pi a^2$, $\dfrac{S_{шар}}{S_{куб}} = \dfrac{\pi}{6}$.

Ответ: $\dfrac{S_{шар}}{S_{куб}} = \dfrac{\pi}{6}$.

3.100.



Если сторона куба a, то его диагональ $\sqrt{3}a$, поэтому радиус шара $= \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

$$\frac{V_{шар}}{V_{куб}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{a^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8}a^3}{a^3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{V_{шар}}{V_{куб}} = \dfrac{\pi\sqrt{3}}{2}$.

Раздел 4. Задания 9-10 для экзамена «Математика» Задания 6-7 для экзамена «Алгебра и начала анализа»

Тригонометрия

4.1. $\dfrac{\sin 75^\circ + \sin 45^\circ}{\sin 285^\circ} = \dfrac{2\sin 60^\circ \cos 15^\circ}{-\cos 15^\circ} = -2\sin 60^\circ = -\sqrt{3}$.

Ответ: $-\sqrt{3}$.

4.2. $\dfrac{\sin 70^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 25^\circ} = \dfrac{2\sin 45^\circ \cos 25^\circ}{\cos 25^\circ} = 2\sin 45^\circ = \sqrt{2}$.

Ответ: $\sqrt{2}$.

4.3. $\dfrac{\cos 105^\circ - \cos 15^\circ}{\cos 315^\circ} = \dfrac{-2\sin 60^\circ \sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} = -\sqrt{3}$.

Ответ: $-\sqrt{3}$.

4.4. $\dfrac{\sin 55^\circ \cos 35^\circ - \cos^2 10^\circ}{\sin 200^\circ} = \dfrac{\frac{1}{2}\left(\sin 20^\circ + \sin 90^\circ\right) - \frac{1}{2}(\cos 0^\circ + \cos 20^\circ)}{-\sin 20^\circ} =$

$= \dfrac{\frac{1}{2}(\sin 20^\circ \cos 20^\circ)}{-\sin 20^\circ} = \dfrac{1}{2}(ctg 20^\circ - 1)$.

4.5. $\dfrac{1 + \cos 40^\circ + \cos 80^\circ}{\sin 80^\circ + \sin 40^\circ} = \dfrac{1 + 2\cos 60^\circ \cos 20^\circ}{2\sin 60^\circ \cos 20^\circ} = \dfrac{1 + \cos 20^\circ}{\sqrt{3}\cos 20^\circ}$;

$\dfrac{\cos 105^\circ \cos 5^\circ + \sin 105^\circ \sin 5^\circ}{\sin 95^\circ \cos 5^\circ + \cos 95^\circ \sin 5^\circ} = \dfrac{\cos 100^\circ}{\sin 100^\circ} = ctg 100^\circ = -tg 10^\circ$.

Так как $\dfrac{1 + \cos 20^\circ}{\sqrt{3}\cos 20^\circ} > 0$ и $-\text{tg}10^\circ < 0$, то значение первого выражения больше значения второго.

Ответ: значение первого выражения больше.

4.6. $\dfrac{\sin 20^\circ - \sin 40^\circ}{1 - \cos 20^\circ + \cos 40^\circ} = \dfrac{-2\sin 10^\circ \cos 30^\circ}{1 - 2\sin 30^\circ \sin 10^\circ} = \dfrac{\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ - 1}$;

$\dfrac{\sin 25^\circ \cos 5^\circ - \cos 25^\circ \sin 5^\circ}{\cos 15^\circ \cos 5^\circ - \sin 15^\circ \sin 5^\circ} = \dfrac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} = tg 20^\circ$.

Так как $\frac{\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ - 1} < 0$ $(0 < \sin 10^o < 1)$ и $\mathrm{tg}20^o > 0$.

Ответ: значение первого выражения меньше.

4.7. $\cos(2\pi - 3x)\cos x + \sin 3x \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) =$

$= \cos 3x \cdot \cos x + \sin 3x \cdot \sin x = \cos 2x$;

$\cos 2x = -\frac{1}{2}$; $2x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi k$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$.

Ответ: cos2x; $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$.

4.8. $\sin(\pi - 3x)\cos x + \cos 3x \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) =$

$= \sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x = \sin 2x$;

$\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $2x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{3} + \pi k$, $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}k, k \in Z$.

Ответ: $\sin 2x$; $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}k, k \in Z$.

4.9. $\sin x^o = \sin^2 15^o - 2\sin 15^o \cos 15^o + \cos^2 15^o$;

$\sin x^o = 1 - \sin 30^o$; $\sin x^\circ = \frac{1}{2}$; $x = 30$. Ответ: 30.

4.10. $\cos x^\circ = \frac{\cos^2 75^\circ - \sin^2 75^\circ}{\sin 270^\circ}$; $\cos x^\circ = \frac{\cos 150^\circ}{-1}$; $\cos x^o = \cos 30^o$;

$\cos x^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $x = 30$. Ответ: 30.

4.11. $\frac{\sin 30^\circ \cos x^\circ + \cos 30^\circ \sin x^\circ}{\cos 180^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin(30^\circ + x^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$x = 195$. Ответ: 195.

4.12. $\frac{\cos 45^\circ \cos x^\circ - \sin 45^\circ \sin x^\circ}{\sin 270^\circ} = 0{,}5$; $\cos(45^\circ + x^\circ) = -\frac{1}{2}$;

$x = 75$. Ответ: 75.

4.13. $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$. $\sin x = a$, $a \in [-1; 1]$.

$2a^2 - 3a + 1 = 0$; $D = 1$; $a_1 = \frac{1}{2}$; $a_2 = 1$;

1) $\sin x = \frac{1}{2}$; $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$;

2) $\sin x = 1$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$.

Ответ: $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $k, n \in Z$.

4.14. $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$;
$\cos x = a$, $a \in [-1; 1]$.

$2a^2 - a - 1 = 0$; $D = 9$; $a_1 = 1$, $a_2 = -\frac{1}{2}$.

1) $\cos x = 1$; $x = 2\pi k$, $k \in Z$;

2) $\cos x = -\frac{1}{2}$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$.

Ответ: $2\pi k$, $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$.

4.15. $\cos^2 x + 6\sin x - 6 = 0$;
$1 - \sin^2 x + 6\sin x - 6 = 0$; $\sin^2 x - 6\sin x + 5 = 0$.
Пусть $a = \sin x$, $a \in [-1,1]$; $a^2 - 6a + 5$; $a_1 = 5$, $a_1 \notin [-1; 1]$;

$a_2 = 1$; $\sin x = 1$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$. Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$.

4.16. $2\sin^2 x + 7\cos x + 2 = 0$;
$2 - 2\cos^2 x + 7\cos x + 2 = 0$; $2\cos^2 x - 7\cos x - 4 = 0$.
$\cos x = a$, $a \in [-1; 1]$.
$2a^2 - 7a - 4 = 0$; $D = 81$; $a_1 = 4$ – не удовлетворяет условию

$a \in [-1; 1]$; $a_2 = -\frac{1}{2}$; $\cos x = -\frac{1}{2}$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$.

Ответ: $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$.

4.17. $\cos 2x + 8\sin x = 3$;
$1 - 2\sin^2 x + 8\sin x - 3 = 0$; $\sin^2 x - 4\sin x + 1 = 0$.
$\sin x = a$, $a \in [-1; 1]$.

$a^2 - 4a + 1 = 0$; $\frac{D}{4} = 3$; $a_1 = 2 + \sqrt{3}$ - не удовлетворяет условию

$a_2 = 2 - \sqrt{3}$; $\sin x = 2 - \sqrt{3}$; $x = (-1)^k \arcsin\left(2 - \sqrt{3}\right) + \pi k, k \in Z$.

Ответ: $(-1)^k \arcsin\left(2 - \sqrt{3}\right) + \pi k, k \in Z$.

4.18. $\cos 2x = 1 + 4\cos x$;
$2\cos^2 x - 1 - 1 - 4\cos x = 0$; $\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0$.
$\cos x = a$, $a \in [-1; 1]$. $a^2 - 2a - 1 = 0$;
$a_1 = 1 + \sqrt{2}$ – не удовлетворяет условию а $\in [-1; 1]$;
$a_2 = 1 - \sqrt{2}$; $\quad x = \pm(\pi - \arccos(\sqrt{2} - 1)) + 2\pi k, k \in Z.$
Ответ: $\pm(\pi - \arccos(\sqrt{2} - 1)) + 2\pi k, k \in Z.$
4.19. $\cos 2x + \sin x = 0$; $1 - 2\sin^2 x + \sin x = 0$.
$\sin x = a$, $a \in [-1; 1]$. $2a^2 - a - 1 = 0$; $D = 9$;
$a_1 = 1$; $\sin x = 1$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$
$a_2 = -\frac{1}{2}$; $\sin x = -\frac{1}{2}$; $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$
Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$
4.20. $\cos 2x + \cos x = 0$; $2\cos^2 x - 1 + \cos x = 0$.
$\cos x = a$, $a \in [-1; 1]$. $2a^2 + a - 1 = 0$; $D = 9$; $a_1 = -1$; $a_2 = \frac{1}{2}$;
$\cos x = -1$ или $\cos x = \frac{1}{2}$;
$x = \pi + 2\pi n, n \in Z$; $\quad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z.$
Ответ: $\pi + 2\pi n$; $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z.$
4.21. $5 - 4\sin^2 x = 4\cos x$;
$5 - 4 + 4\cos^2 x = 4\cos x$; $4\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0$. $\cos x = a$, $a \in [-1; 1]$.
$4a^2 - 4a + 1 = 0$; $(2a - 1)^2 = 0$; $a = \frac{1}{2}$; $\cos x = \frac{1}{2}$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z.$
Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z.$
4.22. $\cos 2x + 9\sin x + 4 = 0$;
$1 - 2\sin^2 x + 9\sin x + 4 = 0$; $2\sin^2 x - 9\sin x - 5 = 0$.
$\sin x = a$, $a \in [-1; 1]$. $2a^2 - 9a - 5 = 0$;
$a_1 = 5$ – не удовлетворяет условию $a \in [-1; 1]$;
$a_2 = -\frac{1}{2}$; $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$ Ответ: $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$

4.23. $\cos 2x - 7\cos x + 4 = 0$;
$2\cos^2 x - 1 - 7\cos x + 4 = 0$; $2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0$.
$\cos x = a$, $a \in [-1; 1]$. $2a^2 - 7a + 3 = 0$; $D = 25$;
$a_1 = 3$ – не удовлетворяет условию $a \in [-1; 1]$;
$a_2 = \frac{1}{2}$; $\cos x = \frac{1}{2}$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$. Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.
4.24. $2\cos 2x = 1 + 4\cos x$;
$4\cos^2 x - 2 - 1 - 4\cos x = 0$; $4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0$.
$\cos x = a$, $a \in [-1; 1]$. $4a^2 - 4a - 3 = 0$; $D = 64$;
$a_1 = 1{,}5$ – не удовлетворяет условию $a \in [-1; 1]$;
$a_2 = -\frac{1}{2}$; $\cos x = -\frac{1}{2}$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.

Ответ: $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.
4.25. $2\sin^2 x + 5\cos x = 4$;
$2 - 2\cos^2 x + 5\cos x = 4$; $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$.
$\cos x = a$, $a \in [-1; 1]$. $2a^2 - 5a + 2 = 0$; $D = 9$;
$a_1 = 2$ – не удовлетворяет условию $a \in [-1; 1]$;
$a_2 = \frac{1}{2}$; $\cos x = \frac{1}{2}$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.
4.26. $2\cos 2x = 8\sin x + 5$;
$2 - 4\sin^2 x = 8\sin x + 5$; $4\sin^2 x + 8\sin x + 3 = 0$. $\sin x = a$, $a \in [-1; 1]$.
$4a^2 + 8a + 3 = 0$; $a_1 = -1{,}5$ – не удовлетворяет условию $a \in [-1; 1]$;
$a_2 = -\frac{1}{2}$; $\sin x = -\frac{1}{2}$; $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$.

Ответ: $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$.
4.27. $\sin 2x - \sin x = 2\cos x - 1$; $2\sin x\cos x - \sin x - 2\cos x + 1 = 0$;
$2\cos x(\sin x - 1) - (\sin x - 1) = 0$; $(\sin x - 1)(2\cos x - 1) = 0$;

$\sin x = 1$ или $\cos x = \frac{1}{2}$;

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $n, k \in Z$.
4.28. $\sin 2x - \cos x = 2\sin x - 1$; $2\sin x\cos x - \cos x - 2\sin x + 1 = 0$;
$2\sin x(\cos x - 1) - (\cos x - 1) = 0$; $(\cos x - 1)(2\sin x - 1) = 0$;

$\cos x = 1$ или $2\sin x = 1$;

$x = 2\pi n,\ n \in Z$; $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$

Ответ: $2\pi n$; $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$

4.29. $\sin 2x + 2\sin x = \cos x + 1$; $2\sin x \cos x + 2\sin x - \cos x - 1 = 0$;
$2\sin x(\cos x + 1) - (\cos x + 1) = 0$; $(\cos x + 1)(2\sin x - 1) = 0$;

$\cos x = -1$ или $\sin x = \frac{1}{2}$;

$x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$ $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$

Ответ: $\pi + 2\pi n$; $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ n, k \in Z.$

4.30. $\sin 2x + 2\cos x = \sin x + 1$; $2\sin x \cos x + 2\cos x - \sin x - 1 = 0$;
$2\cos x(\sin x + 1) - (\sin x + 1) = 0$; $(\sin x + 1)(2\cos x - 1) = 0$;

$\sin x = -1$ или $\cos x = \frac{1}{2}$;

$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z.$

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ n, k \in Z.$

4.31. $\cos 2x + \sin^2 x = \cos x$, $[-\pi, \pi]$;
$\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x = \cos x$; $\cos x(\cos x - 1) = 0$;
$\cos x = 0$ или $\cos x = 1$;

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$; $x = 2\pi k,\ k \in Z.$

Из этих корней отрезку $[-\pi; \pi]$ принадлежат только корни $-\frac{\pi}{2}; 0; \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{2}$; 0; $\frac{\pi}{2}$.

4.32. $\cos 2x + \sin x = \cos^2 x$, $[0; 2\pi]$;
$\cos^2 x - \sin^2 x + \sin x - \cos^2 x = 0$; $\sin x(1 - \sin x) = 0$;
1) $\sin x = 0$; 2) $\sin x = 1$;

$x = \pi n,\ n \in Z.$ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z.$

Ответ: 0; $\pi/2$; π; 2π.

4.33. $\cos 2x - \cos^2 x - \sqrt{2}\sin x = 0$, [-π; π];

$2\cos^2 x - 1 - \cos^2 x - \sqrt{2}\sin x = 0$; $\cos^2 x - 1 - \sqrt{2}\sin x = 0$;

$-\sin^2 x - \sqrt{2}\sin x = 0$; $\sin x\left(\sin x + \sqrt{2}\right) = 0$;

1) $\sin x = 0$; $x = \pi n$, $n \in Z$;

2) $\sin x = -\sqrt{2}$ не имеет решений, так как $|\sin x| \le 1$.

Ответ: $-\pi$; 0; π.

4.34. $\cos 2x + \sin^2 x + \sqrt{3}\cos x = 0$, [-π; π];

$\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x + \sqrt{3}\cos x = 0$; $\cos x(\cos x + \sqrt{3}) = 0$;

1) $\cos x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$;

2) $\cos x = -\sqrt{3}$ - не имеет решений, так как $|\cos x| \le 1$.

Ответ: $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$.

4.35. $\sin x = \cos x$, $[-2\pi; 0]$; $\sin x - \cos x = 0$. Т.к. $\sin x \ne 0$, то

$1 - \operatorname{ctg} x = 0$; $\operatorname{ctg} x = 1$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

$-\frac{7\pi}{4}$ (k = -2), $x = -\frac{3\pi}{4}$ (k = -1). Ответ: $-\frac{7\pi}{4}$; $-\frac{3\pi}{4}$.

4.36. $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$, [π; 3π]. Т.к. $\sin x \ne 0$, $x \ne \pi n$, $n \in Z$.

$\sqrt{3} + ctgx = 0$; $ctgx = -\sqrt{3}$; $x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$.

$x = \frac{11\pi}{6}$ $(k = 2)$ и $x = \frac{17\pi}{6}$ $(k = 3)$. Ответ: $\frac{11\pi}{6}$; $\frac{17\pi}{6}$.

4.37. sin x + cos x = 0, [-π; π].

$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = 0$; $\cos\frac{\pi}{4}\sin x + \sin\frac{\pi}{4}\cos x = 0$;

$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$; $x + \frac{\pi}{4} = \pi k$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$. Ответ: $-\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$.

4.38. $\sin x = \sqrt{3}\cos x$, [π; 3π]; $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$.

$\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 0$; $\sin x\cos\frac{\pi}{3} - \cos x\sin\frac{\pi}{3} = 0$;

$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0;\ \ x-\frac{\pi}{3}=\pi k,\ \ x=\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z.$

Отрезку [π; 3π] принадлежат $x=\frac{4\pi}{3}$ ($k = 1$) и $x=\frac{7\pi}{3}$ ($k = 2$).

Ответ: $\frac{4\pi}{3};\ \ \frac{7\pi}{3}.$

4.39. $\frac{2\cos x+\sin x}{\cos x-7\sin x}=-\frac{1}{2},\ \ \cos x-7\sin x\neq 0;$

$4\cos x + 2\sin x = -\cos x + 7\sin x$; $5\cos x - 5\sin x = 0$; $\cos x - \sin x = 0$

$x=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z.$

Отрезку [-π; π] принадлежат $x=\frac{\pi}{4}$ ($k = 0$), $x=-\frac{3\pi}{4}$ ($k = -1$).

Ответ: $-\frac{3\pi}{4};\ \ \frac{\pi}{4}.$

4.40. $\frac{3\sin x+\cos x}{\cos x+5\sin x}=\frac{1}{2}$, [-π; π];

$\frac{2(3\sin x+\cos x)-(\cos x+5\sin x)}{2(\cos x+5\sin x)}=0$; $\frac{\sin x+\cos x}{\cos x-5\sin x}=0$;

$\begin{cases}\sin x+\cos x=0,\\ \cos x+5\sin x\neq 0;\end{cases}$ $\cos x\neq 0;$ $\begin{cases}tgx+1=0,\\ 1+5tgx\neq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}tgx=-1,\\ tgx\neq -\frac{1}{5};\end{cases}$

$x=-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z,$; $k = 0$, $k = 1$; $x_1=-\frac{\pi}{4};\ \ x_2=\frac{3}{4}\pi.$

Ответ: $-\frac{\pi}{4};\ \ \frac{3}{4}\pi.$

4.41. $\frac{2\sin x-\cos x}{5\sin x-4\cos x}=\frac{1}{3},$ $[-\pi, \pi]$;

$6\sin x - 3\cos x = 5\sin x - 4\cos x$, $5\sin x - 4\cos x \neq 0$;

$\sin x + \cos x = 0$; $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z.$

$x=\frac{3\pi}{4}$ ($k = 1$) и $x=-\frac{\pi}{4}$ ($k = 0$). Ответ: $-\frac{\pi}{4};\ \ \frac{3\pi}{4}.$

4.42. $\dfrac{\sin x - 2\cos x}{2\sin x + \cos x} = -\dfrac{1}{3}$, $2\sin x + \cos x \neq 0$;

$3\sin x - 6\cos x = -2\sin x - \cos x$; $\sin x - \cos x = 0$; $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

Отрезку $[0; 2\pi]$ принадлежат $x = \dfrac{\pi}{4}$ $(k = 0)$ и $x = \dfrac{5\pi}{4}$ $(k = 1)$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}$; $\dfrac{5\pi}{4}$.

4.43. $y = \sin^2 x$; $y = \cos^2 x$.
Решим уравнение $\sin^2 x = \cos^2 x$.

$\sin^2 x - \cos^2 x = 0$; $\cos 2x = 0$; $2x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}, k \in Z$;

$y\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}\right) = \sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$. Ответ: $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}$, $y = \dfrac{1}{2}, k \in Z$.

4.44. $y = 3\sin^2 x$, $y = \cos^2 x$. $3\sin^2 x = \cos^2 x$; $3\sin^2 x = 1 - \sin^2 x$;

$\sin x = \pm\dfrac{1}{2}$; $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$, $y = \dfrac{3}{4}$. Ответ: $\left(\pm\dfrac{\pi}{6} + \pi k; \dfrac{3}{4}\right)$, $k \in Z$.

4.45. $y = \sin^2 x$; $y = 3\cos^2 x$.

$\sin^2 x = 3\cos^2 x$; $1 - \cos^2 x = 3\cos^2 x$; $\cos^2 x = \dfrac{1}{4}$;

$\cos x = \pm\dfrac{1}{2}$; $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$; $y = \dfrac{3}{4}$.

Ответ: $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi k$, $y = \dfrac{3}{4}$, $k \in Z$.

4.46. $y = \sin 2x$, $y = 2\cos^2 x$.
$\sin 2x = 2\cos^2 x$; $2\sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$; $2\cos x(\sin x - \cos x) = 0$;

1) $\cos x = 0$; $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$;

2) $\sin x = \cos x$; $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$;

$y\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n\right) = 0$; $y\left(\dfrac{\pi}{4} + \pi n\right) = 1$.

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n; 0\right)$; $\left(\dfrac{\pi}{4} + \pi k; 1\right)$, $n, k \in Z$.

4.47. $y = \sin x$, $y = \sin 2x$;
$\sin x = \sin 2x$; $2\sin x \cos x - \sin x = 0$; $\sin x\,(2\cos x - 1) = 0$;
1) $\sin x = 0$; $x = \pi n$, $n \in Z$;

2) $\cos x = \frac{1}{2}$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.

Ответ: πn; $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $n, k \in Z$.

4.48. $y = 2 + \cos 2x$, $y = \cos x$
$2 + \cos 2x = \cos x$; $2 + 2\cos^2 x - 1 = \cos x$; $2\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$.
Пусть $\cos x = a$, $|a| \le 1$. Тогда $2a^2 - a + 1 = 0$, $D < 0$ – уравнение корней не имеет, значит, графики функций $y = 2 + \cos 2x$ и $y = \cos x$ не имеют общих точек.
Ответ: точек пересечения нет.

4.49. $y = 3\sin 2x$, $y = 4\cos x$;
$3\sin 2x = 4\cos x$; $6\sin x \cos x = 4\cos x$; $2\cos x(3\sin x - 2) = 0$

1) $\cos x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$;

2) $\sin x = \frac{2}{3}$; $x = (-1)^n \arcsin\frac{2}{3} + \pi n, n \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $(-1)^n \arcsin\frac{2}{3} + \pi n$, $k, n \in Z$.

4.50. $y = 3\cos x - 1$ и $y = \cos 2x$;
$3\cos x - 1 = \cos 2x$; $3\cos x - 1 = 2\cos^2 x - 1$;
$2\cos^2 x - 3\cos x = 0$; $\cos x(2\cos x - 3) = 0$;

$$\left[\begin{array}{l}\cos x = 0,\\ \cos x = 1{,}5\end{array}\right.$$

$\cos x = 1{,}5$ – не имеет решения, т.к. $|\cos x| \le 1$;

$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$. Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.

Степени и логарифмы

4.51. $\log_{216} 27 + \log_{36} 16 + \log_6 3 = \log_{6^3} 3^3 + \log_{6^2} 4^2 + \log_6 3 =$
$= \log_6 3 + \log_6 4 + \log_6 3 = \log_6 36 = 2$. Ответ: 2.

4.52. $\log_{0,2} 125 : \log_{16} 64 \cdot \log_3 81 = \log_{5^{-1}} 5^3 : \log_{2^4} 2^6 \cdot \log_3 3^4 =$

$= -3 : \frac{6}{4} \cdot 4 = -8$. Ответ: -8.

4.53. $\log_{\frac{1}{2}} 16 \cdot \log_5 \frac{1}{25} : 9^{\log_3 2} = -\log_2 2^4 \cdot \log_5 5^{-2} : 3^{\log_3 4} =$

$= -4 \cdot (-2) : 4 = 2.$ Ответ: 2.

4.54. $\log_{\frac{1}{3}} 9 \cdot \log_2 \frac{1}{8} : 7^{2\log_{49} 2} = -\log_3 3^2 \cdot \log_2 2^{-3} : 7^{\log_7 2} =$

$= -2 \cdot (-3) : 2 = 3.$ Ответ: 3.

4.55. $\left(3\log_7 2 - \log_7 24\right) : \left(\log_7 3 + \log_7 9\right) = \log_7 \frac{8}{24} : \log_7 27 =$

$= \log_7 3^{-1} : \log_7 3^3 = \frac{-\log_7 3}{3\log_7 3} = -\frac{1}{3}.$ Ответ: $-\frac{1}{3}.$

4.56. $(3\lg 2 + \lg 0{,}25) : (\lg 14 - \lg 7) = \lg 2 : \lg 2 = 1.$ Ответ: 1.

4.57. $\left(\log_2 12 - \log_2 3 + 3^{\log_3 8}\right)^{\lg 5} = \left(\log_2 4 + 8\right)^{\lg 5} = 10^{\lg 5} = 5.$

Ответ: 5.

4.58. $\left(\log_6 2 + \log_6 3 + 2^{\log_2 4}\right)^{\log_5 7} = \left(\log_6 6 + 4\right)^{\log_5 7} = 5^{\log_5 7} = 7.$

Ответ: 7.

4.59. $2^{2-x} - 2^{x-1} = 1;$

$\frac{2^2}{2^x} - \frac{2^x}{2} - 1 = 0.$ Пусть $2^x = y$, $y > 0$.

Имеем: $\frac{4}{y} - \frac{y}{2} - 1 = 0;\quad 8 - y^2 - 2y = 0;$

$y^2 + 2y - 8 = 0;\ y_1 = -4;\ y_2 = 2.\ \ y > 0;\ \ 2^x = 2;\ x = 1.$ Ответ: 1.

4.60. $3^{1-x} - 3^x = 2$

Пусть $3^x = y$, $y > 0$, тогда $3^{1-x} = \frac{3}{y}$. Получаем:

$\frac{3}{y} - y - 2 = 0;\ \ 3 - y^2 - 2y = 0;\ y^2 + 2y - 3 = 0,$

$y_1 = -3,\ y_2 = 1;\ \ y > 0,\ \ 3^x = 1,\ 3^x = 3^0,\ x = 0.$ Ответ: 0.

4.61. $\frac{1}{2} \cdot 2^{x-1} + 2^{3-x} = 3;\ \ \frac{1}{2} \cdot \frac{2^x}{2} + \frac{2^3}{2^x} - 3 = 0;\ \ \frac{2^x}{4} + \frac{8}{2^x} - 3 = 0.$

Пусть $2^x = y$, $y > 0$. Тогда:

$\frac{y}{4} + \frac{8}{y} - 3 = 0;\ \ y^2 + 32 - 12y = 0;\ y^2 - 12y + 32 = 0;$

$y_1 = 4,\ y_2 = 8.\ \ 2^x = 4;\ x = 2;\ \ 2^x = 8;\ x = 3.$ Ответ: 2; 3.

4.62. $\frac{1}{27}\cdot 3^{x+2}+3^{2-x}=4.$ $\frac{3^x\cdot 9}{27}+\frac{9}{3^x}-4=0;$ $\frac{3^x}{3}+\frac{9}{3^x}-4=0.$

$3^x = y$, $y > 0$. Тогда: $\frac{y}{3}+\frac{9}{y}-4=0;$ $y^2 - 12y + 27 = 0$; $y_1 = 3$, $y_2 = 9$.

1) $3^x = 3$, $x = 1$; 2) $3^x = 9$, $x = 2$. Ответ: 1; 2.

4.63. $5^x-\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}=4;$ $5^x - 5^{1-x} - 4 = 0$; $5^x-\frac{5}{5^x}-4=0.$

Пусть $5^x = m$, $m > 0$. Тогда: $m-\frac{5}{m}-4=0;$ $m^2 - 5 - 4m = 0$;

$m_1 = -1$, $m_2 = 5$. $m > 0$; $5^x = 5$; $x = 1$. Ответ: 1.

4.64. $8\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{x+1}-7^{x-1}=1.$

$8\cdot\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^x-\left(\frac{1}{7}\right)^{1-x}=1.$ Пусть $\left(\frac{1}{7}\right)^x=y,$ $y > 0$. Тогда:

$\frac{8y}{7}-\frac{1}{7y}-1=0;$ $8y^2 - 7y - 1 = 0$; $D = 49 + 32 = 81$,

$y_1=-\frac{1}{8},$ $y_2 = 1$; $\left(\frac{1}{7}\right)^x=1;$ $\left(\frac{1}{7}\right)^x=\left(\frac{1}{7}\right)^0=0.$ Ответ: 0.

4.65. $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{x-1}-\left(\frac{1}{3}\right)^x=0;$ $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}\cdot 3^2-\left(\frac{1}{3}\right)^x=0.$

Пусть $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x,$ $y > 0$. Имеем: $y(3y - 1) = 0$.

y = 0 или $y=\frac{1}{3}.$ Условию y > 0 удовлетворяет $y=\frac{1}{3}.$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=\frac{1}{3};$ $x = 1$. Ответ: 1.

4.66. $9\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x=0;$

$9\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x=0.$ Пусть $\left(\frac{1}{2}\right)^x=y,$ $y > 0$.

$9y^2 - 2y = 0$; $y(9y - 2) = 0$,

$y = 0$ или $y = \frac{2}{9}$. $y > 0$; $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{2}{9}$; $x = \log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{9}$.

Ответ: $\log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{9}$.

4.67. $9^x - 3^{x+1} = 54$; $3^{2x} - 3 \cdot 3^x - 54 = 0$. Пусть $3^x = t$, $t > 0$. Имеем: $t^2 - 3t - 54 = 0$; $t_1 = -6$, $t_2 = 9$; $t > 0$; $3^x = 9$; $3^x = 3^2$; $x = 2$.
Ответ: 2.

4.68. $3^{x-1} + 2 \cdot 3^{-x-1} - 1 = 0$. $\frac{3^x}{3} + \frac{2}{3 \cdot 3^x} - 1 = 0$. Пусть $3^x = y$, $y > 0$.

Тогда: $\frac{y}{3} + \frac{2}{3y} - 1 = 0$; $y^2 + 2 - 3y = 0$; $y^2 - 3y + 2 = 0$;

$y_1 = 1$, $y_2 = 2$.
1) $3^x = 1$, $3^x = 3^0$, $x = 0$; 2) $3^x = 2$, $x = \log_3 2$. Ответ: 0; $\log_3 2$.

4.69. $2^x \cdot 5^x = 0{,}1 \cdot 10^{3x^2-1}$; $10^x = (0{,}1)^2 \cdot 10^{3x^2}$; $10^2 \cdot 10^x - 10^{3x^2} = 0$;

$10^{2+x} = 10^{3x^2}$; $2 + x = 3x^2$; $3x^2 - x - 2 = 0$; $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = 1$.

Ответ: $-\frac{2}{3}$; 1.

4.70. $5^{x^2-15} = 25^x$; $5^{x^2-15} = 5^{2x}$.
$x^2 - 15 = 2x$; $x^2 - 2x - 15 = 0$; $x_1 = 5$; $x_2 = -3$. Ответ: -3; 5.

4.71. $0{,}1^{5x-8-x^2} = 100$; $10^{x^2-5x+8} = 10^2$; $x^2 - 5x + 6 = 0$; $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.
Ответ: 2; 3.

4.72. $3^{x^2-4x} = 243$; $3^{x^2-4x} = 3^5$; $x^2 - 4x - 5 = 0$; $x_1 = -1$, $x_2 = 5$.
Ответ: -1; 5.

4.73. $4^x - 3 \cdot 2^x = 4$; $2^{2x} - 3 \cdot 2^x = 4$. Пусть $2^x = y$, $y > 0$.
$y^2 - 3y - 4 = 0$; $y_1 = -1$, $y_2 = 4$. $2^x = 4$; $2^x = 2^2$, $x = 2$. Ответ: 2.

4.74. $9^x + 8 \cdot 3^x = 9$; $3^{2x} + 8 \cdot 3^x = 9$. Пусть $3^x = t$, $t > 0$.
Тогда $t^2+8t - 9 = 0$; $t_1=-9$, $t_2=1$. -9 не удовлетворяет условию $t > 0$.
$3^x = 1$, $3^x = 3^0$, $x = 0$. Ответ: 0.

4.75. $2^{2x+1} + 7 \cdot 2^x = 4$; $2 \cdot 2^{2x} + 7 \cdot 2^x = 4$. Пусть $2^x = y$, $y > 0$.

Тогда: $2y^2+7y-4=0$; $D = 49 + 32 = 81$; $y = \frac{-7 \pm 9}{4}$, $y_1 = -4$, $y_2 = \frac{1}{2}$.

$2^x = \frac{1}{2}$, $x = -1$. Ответ: -1.

4.76. $3^{2x+1} - 8 \cdot 3^x = 3$. $3 \cdot 3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 3 = 0$. Пусть $3^x = t$, $t > 0$.

Тогда: $3t^2 - 8t - 3 = 0$; $\frac{D}{4} = 16 + 9 = 25$; $t = \frac{4 \pm 5}{3}$; $t_1 = -\frac{1}{3}$, $t_2 = 3$.

$t > 0$. $3^x = 3$, $x = 1$.   Ответ: 1.

4.77. $9^x - 5 \cdot 3^{x+1} + 54 = 0$; $3^{2x} - 15 \cdot 3^x + 54 = 0$; $3^x = 6$ или $3^x = 9$;
$x = \log_3 6$ или $x = 2$. Ответ: 2; $\log_3 6$.

4.78. $2^{2x+1} - 7 \cdot 2^x + 3 = 0$; $2 \cdot 2^{2x} - 7 \cdot 2^x + 3 = 0$. Пусть $2^x = y$, $y > 0$.

Тогда: $2y^2 - 7y + 3 = 0$; $D = 49 - 24 = 25$; $y = \frac{7 \pm 5}{4}$; $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = 3$.

1) $2^x = \frac{1}{2}$, $x = -1$; 2) $2^x = 3$, $x = \log_2 3$.   Ответ: -1; $\log_2 3$.

4.79. $4^x + 2^x = 12$; $2^{2x} + 2^x - 12 = 0$. Пусть $2^x = y$, $y > 0$.
Тогда $y^2 + y - 12 = 0$; $y_1 = -4$, $y_2 = 3$; $y > 0$; $2^x = 3$; $x = \log_2 3$.
Ответ: $\log_2 3$.

4.80. $2^{x^2-1} \cdot 5^{x^2-1} = 0{,}001\left(10^{x+2}\right)^3$;

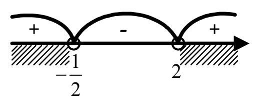
$10^{x^2-1} = 10^{-3} \cdot 10^{3x+6}$; $10^{x^2-1} = 10^{3x+3}$; $x^2 - 1 = 3x + 3$;

$x^2 - 3x - 4 = 0$; $x_1 = -1$, $x_2 = 4$. Ответ: -1; 4.

4.81. $3^{x^2} \le 81$; $3^{x^2} \le 3^4$; т.к. $a = 3 > 1$, то $x^2 \le 4$; $(x - 2)(x + 2) \le 0$;

$-2 \le x \le 2$. Ответ: [-2; 2].

4.82. $27^x < 9^{x^2-1}$; $3^{3x} < 3^{2x^2-2}$; $3x < 2x^2 - 2$;



$2x^2 - 3x - 2 > 0$; $2\left(x - 2\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) > 0$.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(2; \infty\right)$. .

4.83. $10^x - 8 \cdot 5^x \ge 0$; $2^x \cdot 5^x - 8 \cdot 5^x \ge 0$; $5^x(2^x - 8) \ge 0$.
Так как $5^x > 0$, то $2^x - 8 \ge 0$; $2^x \ge 2^3$; $x \ge 3$ (т.к. $a = 2 > 1$). Ответ: $[3; \infty)$.

4.84. $3^x - 2 \cdot 6^x > 0$; $3^x(1 - 2 \cdot 2^x) > 0 \mid : 3^x$, $(3^x > 0)$;

$1 - 2 \cdot 2^x > 0$; $2^x < \frac{1}{2}$; $x < -1$, т.к. $a = 2 > 1$.   Ответ: $(-\infty; -1)$.

4.85. $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} > 0$;

$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x > 0$; $\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x - 2\right) > 0 \,|: \left(\frac{1}{2}\right)^x > 0$;

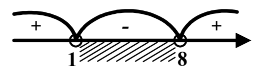
$\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$; $x < -1$, т.к. $a = \frac{1}{2} < 1$. Ответ: $(-\infty; -1)$.

4.86. $\frac{1}{16}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x - \left(\frac{1}{4}\right)^{3x+2} < 0$;

$\frac{1}{16}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x - \frac{1}{16}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{3x} < 0 \,|\, : \left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} > 0$; $1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{2x} < 0$;

$\left(\frac{1}{4}\right)^{2x} > 1$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x} > \left(\frac{1}{4}\right)^0$; $2x < 0$; $x < 0$. Ответ: $(-\infty; 0)$.

4.87. $2^x + 2^{3-x} < 9$;
$2^{2x} - 9\cdot 2^x + 8 < 0$;
$(2^x - 1)(2^x - 8) < 0$;
$1 < 2^x < 8$; $0 < x < 3$. Ответ: 2.



4.88. $3^x + 3^{2-x} < 10$; $3^x + 3^2\cdot 3^{-x} - 10 < 0$; $3^{2x} - 10\cdot 3^x + 9 < 0$;
$(3^x - 1)(3^x - 9) < 0$; $1 < 3^x < 9 \Rightarrow 0 < x < 2$ Ответ: 1
4.89. $\log_7(x^2 - 2x - 8) = 1$; $\log_7(x^2 - 2x - 8) = \log_7 7$; $x^2 - 2x - 15 = 0$;
$x_1 = 5$, $x_2 = -3$. Ответ: 5; -3.

4.90. $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 + 4x - 5\right) = -4$; $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 + 4x - 5\right) = \log_{\frac{1}{2}} 16$;

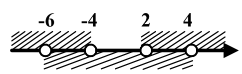
$x^2 + 4x - 5 = 16$; $x^2 + 4x - 21 = 0$; $x = -7$ или $x = 3$. Ответ: -7; 3.

4.91. $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - 5x + 6\right) = -1$; $x^2 - 5x + 6 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$;

$x^2 - 5x + 4 = 0$; $x = 1$ или $x = 4$. Ответ: 1; 4.
4.92. $\log_2(x^2 - 4x + 4) = 4$; $x^2 - 4x + 4 = 2^4$; $x^2 - 4x - 12 = 0$;
$x_1 = 6$, $x_2 = -2$. Ответ: -2; 6.
4.93. $\log_4(x^2 + 2x - 8) < 2$;

$\log_4(x^2 + 2x - 8) < \log_4 16$. Так как $4 > 1$, то $\begin{cases} x^2 + 2x - 8 < 16, \\ x^2 + 2x - 8 > 0; \end{cases}$

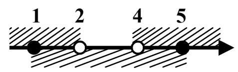
$\begin{cases} x^2 + 2x - 24 < 0, \\ x^2 + 2x - 8 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} (x+6)(x-4) < 0, \\ (x+4)(x-2) > 0; \end{cases}$



$(-6; -4) \cup (2; 4)$. Ответ: –5; 3.

4.94. $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2 - 6x + 8\right) \geq -1$;

$\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2 - 6x + 8\right) \geq \log_{\frac{1}{3}} 3$.

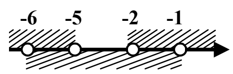


$$\begin{cases} x^2 - 6x + 8 > 0, \\ x^2 - 6x + 8 \le 3; \end{cases} \quad \begin{cases} (x-2)(x-4) > 0, \\ (x-1)(x-5) \le 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2 \text{ или } x > 4, \\ 1 \le x \le 5; \end{cases}$$

$[1; 2) \cup (4; 5]$. Ответ: 1; 5.

4.95. $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 + 7x + 10\right) > -2$;

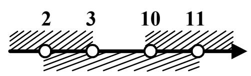


$\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 + 7x + 10\right) > \log_{\frac{1}{2}} 4$; $0 < \dfrac{1}{2} < 1$;

$$\begin{cases} x^2 + 7x + 10 < 4, \\ x^2 + 7x + 10 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x+1)(x+6) < 0, \\ (x+2)(x+5) > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < -5; x > -2, \\ -6 < x < -1; \end{cases}$$

$(-6; -5) \cup (-2; -1)$. Ответ: $(-6; -5) \cup (-2; -1)$.

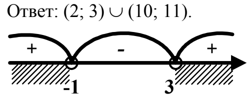
4.96. $\log_2(x^2 - 13x + 30) < 3$; $\log_2(x^2 - 13x + 30) < \log_2 8$;



$$\begin{cases} x^2 - 13x + 30 < 8, \\ x^2 - 13x + 30 > 0; \end{cases} \text{ т.к. } 2 > 1;$$

$$\begin{cases} x^2 - 13x + 22 < 0, \\ x^2 - 13x + 30 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x-2)(x-11) < 0, \\ (x-3)(x-10) > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2 < x < 11, \\ \left[\begin{array}{l} x < 3, \\ x > 10; \end{array}\right. \end{cases}$$

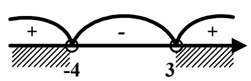
Ответ: $(2; 3) \cup (10; 11)$.



4.97. $\log_3(x^2 - 2x) > 1$;

$$\begin{cases} x^2 - 2x > 0, \\ x^2 - 2x > 3 \end{cases} \text{ (т.к. } a = 3 > 1\text{)};$$

$x^2 - 2x - 3 > 0$;cc$(x - 3)(x + 1) > 0$, Ответ: $(-\infty; -1) \cup (3; \infty)$.



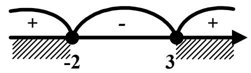
4.98. $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2 + x - 3\right) < -2$;

$$\begin{cases} x^2 + x - 3 > 0, \\ x^2 + x - 3 > 9\,; \end{cases} \quad x^2 + x - 12 > 0;$$

$(x+4)(x-3) > 0$; Ответ: $(-\infty; -4) \cup (3; \infty)$.

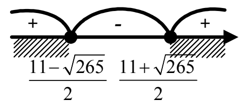
4.99. $\log_2(x^2 - x - 2) \ge 2$;

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 > 0, \\ x^2 - x - 2 \ge 4 \; (a = 2 > 1); \end{cases} \quad x^2 - x - 6 \ge 0;\ (x - 3)(x + 2) \ge 0;$$



Ответ: $(-\infty; 2] \cup [3; \infty)$.

4.100. $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - 11x - 4\right) \le -5$;



$\begin{cases} x^2 - 11x - 4 > 0, \\ x^2 - 11x - 4 \ge 32 \end{cases}$; $x^2 - 11x - 36 \ge 0$.

Корни уравнения $x^2 - 11x - 36 = 0$: $x_{1,2} = \dfrac{11 \pm \sqrt{265}}{2}$;

Ответ: $\left(-\infty; \dfrac{11-\sqrt{265}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{11+\sqrt{265}}{2}; \infty\right)$.

4.101. $3^{3x} + 3^{2x+1} = 3^x + 3$;
$3^{2x}(3^x + 3) - (3^x + 3) = 0$; $(3^{2x} - 1)(3^x + 3) = 0$;
$3^{2x} = 1$ или $3^x = -3$ – решений нет. $x = 0$. Ответ: 0.

4.102. $5^{4x-1} + 5^{3x+1} = 5^x + 25$;
$5^x(5^{3x-1} - 1) + 5^2(5^{3x-1} - 1) = 0$; $(5^{3x-1} - 1)(5^x + 5^2) = 0$;
$5^{3x-1} = 1$ или $5^x + 5^2 = 0$ –нет решений.

$3x - 1 = 0$; $x = \dfrac{1}{3}$. Ответ: $\dfrac{1}{3}$.

4.103. $6^x - 3^x = 2^x - 1$; $2^x \cdot 3^x - 3^x = 2^x - 1$; $3^x(2^x - 1) = 2^x - 1$;
$(2^x - 1)(3^x - 1) = 0$; $2^x - 1 = 0$ или $3^x - 1 = 0$.
1) $2^x - 1 = 0$; $2^x = 2^0$; $x = 0$; 2) $3^x - 1 = 0$; $3^x = 3^0$; $x = 0$. Ответ: 0.

4.104. $6^{x+1} - 18 \cdot 2^x = 3^{x+1} - 9$; $6^{x+1} - 3^{x+1} = 18 \cdot 2^x - 9$;
$3^{x+1}(2^{x+1} - 1) = 9(2^{x+1} - 1)$; $(2^{x+1} - 1)(3^{x+1} - 9) = 0$;
$2^{x+1} - 1 = 0$ или $3^{x+1} - 9 = 0$.
1) $2^{x+1} - 1 = 0$; $2^{x+1} = 2^0$; $x + 1 = 0$; $x = -1$; 2) $3^{x+1} = 3^2$; $x = 1$.
Ответ: -1; 1.

4.105. $2^{3x+1} - 2^{2x} = 2^{x+1} - 1$; $2^{2x}(2^{x+1} - 1) - (2^{x+1} - 1) = 0$;
$(2^{2x} - 1)(2^{x+1} - 1) = 0$;
$2^{x+1} = 1$или $2^{2x} = 1$;
$x = -1$ или $x = 0$. Ответ: -1.

4.106. $4^{5x} - 4^{2x-1} = 4^{3x+1} - 1$; $4^{3x+1}(4^{2x-1} - 1) - (4^{2x-1} - 1) = 0$;
$4^{3x+1} = 1$ или $4^{2x-1} = 1$;
$3x + 1 = 0$ или $2x - 1 = 0$;
$x = -\dfrac{1}{3}$ или $x = \dfrac{1}{2}$. Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

4.107. $\log_5\frac{1-2x}{x+3}=1$; $\log_5\frac{1-2x}{x+3}=\log_5 5$; $\frac{1-2x}{x+3}=5$;

$\begin{cases}x+3\neq 0,\\ 7x=-14;\end{cases}$ $\begin{cases}x\neq -3,\\ x=-2.\end{cases}$ Ответ: –2.

4.108. $\log_4\frac{4+2x}{x-5}=2;$ $\log_4\frac{4+2x}{x-5}=\log_4 16;$ $\frac{4+2x}{x-5}=16;$

$\begin{cases}x-5\neq 0,\\ 14x=84;\end{cases}$ $\begin{cases}x\neq 5,\\ x=6.\end{cases}$ Ответ: 6.

4.109. $\log_{\frac{1}{4}}\frac{3x+2}{2x-7}=-1$ $\log_{\frac{1}{4}}\frac{3x+2}{2x-7}=\log_{\frac{1}{4}}4;$ $\frac{3x+2}{2x-7}=4;$

$\begin{cases}2x-7\neq 0,\\ 5x=30;\end{cases}$ $\begin{cases}x\neq 3{,}5,\\ x=6.\end{cases}$ Ответ: 6.

4.110. $\log_{\frac{1}{6}}\frac{16-20x}{3x+4}=-2;$ $\log_{\frac{1}{6}}\frac{16-20x}{3x+4}=\log_{\frac{1}{6}}36;$

$\frac{16-20x}{3x+4}=36\,|:4;$ $\frac{4-5x}{3x+4}=9;$ $\begin{cases}3x+4\neq 0,\\ 32x=-32;\end{cases}$ $\begin{cases}x\neq -\frac{4}{3},\\ x=-1.\end{cases}$ Ответ: -1.

4.111. $\frac{6^{x^2}}{3^2}=\frac{2^2}{6^{8-5x}};$ $6^{x^2-5x+8}=6^2$; $x^2-5x+8=2$; $x^2-5x+6=0$;

$x=2$ или $x=3$. Ответ: 2; 3.

4.112. $\frac{14^{x^2+2}}{2^7}=\frac{7^7}{14^{4x}};$ $14^{x^2+4x+2}=14^7;$ $x^2+4x+2-7=0$;

$x^2+4x-5=0$; $x_1=-5$, $x_2=1$. Ответ: -5; 1.

4.113. $\frac{10^{x^2}}{2^4}=\frac{5^4}{10^{9-6x}};$ $10^{x^2-6x+9}=10^4;$ $x^2-6x+5=0;$ $\left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=5.\end{array}\right.$

Ответ: 1; 5.

4.114. $\frac{15^{x^2-16}}{3^2}=\frac{5^2}{15^{8-9x}};$ $15^{x^2-16+8-9x}=15^2;$ $x^2-9x-8=2;$

$x^2-9x-10=0;$ $x_1=-1$, $x_2=10$. Ответ: -1; 10.

4.115. $\frac{2^{x^2+2}}{6^2}=\frac{6^2}{3^{x^2+2}};$ $6^{x^2+2}=6^4;$ $x^2-2=0;$ $x=\pm\sqrt{2}.$

Ответ: $-\sqrt{2};$ $\sqrt{2}.$

4.116. $\frac{4^{x^2}}{14^x}=\frac{14^{2x}}{7^{2x^2}}$; $14^{2x^2}=14^{3x}$; $2x^2 = 3x$; $x_1 = 0$, $x_2 = 1{,}5$.

Ответ: 0; 1,5.

4.117. $\frac{2^{2x^2-6x}}{12^{3-x}}=\frac{12^{1-2x}}{3^{x^2-3x}}$; $12^{x^2-3x}=12^{4-3x}$; $x^2 = 4$; $x = -2$ или $x = 2$.

Ответ: -2; 2.

4.118. $\frac{3^{x^2+3x}}{21^{2x}}=\frac{21^{2x}}{7^{x^2+3x}}$; $21^{x^2+3x}=21^{4x}$; $x^2 - x = 0$; $x(x - 1) = 0$;

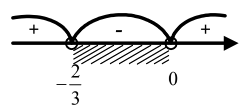
$x = 0$ или $x = 1$. Ответ: 0; 1.

4.119. $\frac{4^x-2}{1-3x}>0$. 1. $\begin{cases}4^x-2>0,\\1-3x>0.\end{cases}$ 2. $\begin{cases}4^x-2<0,\\1-3x>0.\end{cases}$

Решим их: 1. $\begin{cases}2^{2x}>2,\\-3x>-1;\end{cases}$ $\begin{cases}x>\frac{1}{2},\\x<\frac{1}{3};\end{cases}$ решений нет;

2. $\begin{cases}2^{2x}<2,\\-3x<-1;\end{cases}$ $\begin{cases}x<\frac{1}{2},\\x>\frac{1}{3};\end{cases}$ $\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$. Ответ: $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$.

4.120. $\frac{2^x-1}{3x+2}<0$; $\frac{2^x-1}{3\left(x+\frac{2}{3}\right)}<0$.



$2^x - 1 = 0$, $x = 0$. Ответ: $\left(-\frac{2}{3};0\right)$.

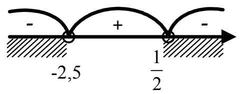
4.121. $\frac{27-9^x}{4x-1}>0$;

$\begin{cases}27-9^x>0,\\4x-1>0\end{cases}$ или $\begin{cases}27-9^x<0,\\4x-1<0;\end{cases}$

$\begin{cases}3^{2x}<3^3,\\x>\frac{1}{4}\end{cases}$ или $\begin{cases}x>1{,}5,\\x<\frac{1}{4}\end{cases}$ – решений нет;

$\frac{1}{4}<x<\frac{3}{2}$. Ответ: (0,25; 1,5).

4.122. $\dfrac{5-25^{x}}{2\left(x+2,5\right)}<0.$ $2x = 1$; $x=\dfrac{1}{2}$. $x + 2,5 = 0$; $x = -2,5$.



Имеем: $\dfrac{x-0,5}{2\left(x+2,5\right)}>0.$

Ответ: $(-\infty; -2,5) \cup (0,5; \infty)$.

4.123. $\dfrac{x+4}{\lg x}\geq 0;$

$$\begin{cases} x+4\geq 0, \\ \lg x>0, \\ x>0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x+4\leq 0, \\ \lg x<0, \\ x>0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq -4, \\ x>1, \\ x>0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x\leq -4, \\ x<1, \\ x>0 \end{cases} \text{– решений нет;} \quad x>1. \text{ Ответ: } (1; \infty).$$

4.124. $\dfrac{x+5}{\log_{\frac{1}{3}} x}>0.$

1) $\begin{cases} x+5>0, \\ \log_{\frac{1}{3}} x>0, \\ x>0; \end{cases} \begin{cases} x>-5, \\ x<1. \\ x>0; \end{cases}$ $0 < x < 1$.

2) $\begin{cases} x+5<0, \\ \log_{\frac{1}{3}} x<0, \\ x>0; \end{cases} \begin{cases} x<-5, \\ x>1, \\ x>0 \end{cases}$ – решений нет; Ответ: $(0; 1)$.

4.125. $\dfrac{x-3}{\log_5 x}\leq 0.$

1) $\begin{cases} x-3\geq 0, \\ \log_5 x<0, \\ x>0; \end{cases} \begin{cases} x\geq 3, \\ x<1, \\ x>0 \end{cases}$ – решений нет;

2) $\begin{cases} x-3\leq 0, \\ \log_5 x>0, \\ x>0; \end{cases} \begin{cases} x\leq 3, \\ x>1, \\ x>0; \end{cases}$ $1 < x \leq 3$. Ответ: $(1; 3]$.

4.126. $\dfrac{3x-1}{\log_{\frac{1}{4}} x}>0.$ 1) $\begin{cases}3x-1>0,\\ \log_{\frac{1}{4}} x>0,\\ x>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x>\dfrac{1}{3},\\ x<1,\\ x>0;\end{cases}$ $\dfrac{1}{3}<x<1;$

2) $\begin{cases}3x-1<0,\\ \log_{\frac{1}{4}} x<0,\\ x>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x<\dfrac{1}{3},\\ x>1,\\ x>0\end{cases}$ – решений нет. Ответ: $\left(\dfrac{1}{3};1\right)$.

4.127. $\dfrac{3x-4}{\log_{\frac{1}{2}} x}<0.$ 1) $\begin{cases}3x-4<0,\\ \log_{\frac{1}{2}} x>0,\\ x>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x<\dfrac{4}{3},\\ x<1,\\ x>0;\end{cases}$ $0<x<1;$

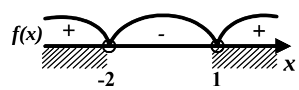
2) $\begin{cases}3x-4>0,\\ \log_{\frac{1}{2}} x<0,\\ x>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x>\dfrac{4}{3},\\ x>1,\\ x>0;\end{cases}$ $x>\dfrac{4}{3}.$ Ответ: $(0;1)\cup\left(1\dfrac{1}{3};\infty\right)$.

4.128. $\dfrac{2x-1}{\lg x}>0;$ 1) $\begin{cases}2x-1>0,\\ \lg x>0,\\ x>0\end{cases}$ $\begin{cases}x>\dfrac{1}{2},\\ x>1,\\ x>0\end{cases}$ $x>1;$

2) $\begin{cases}2x-1<0,\\ \lg x<0,\\ x>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x<\dfrac{1}{2},\\ x<1,\\ x>0;\end{cases}$ $0<x<\dfrac{1}{2}.$ Ответ: $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)\cup(1;\infty)$.

4.129. $\dfrac{(0,1)^x+1000}{2x-3}<0.$ $2x-3<0$; $x<1,5$. Ответ: $(-\infty;\ 1,5)$.

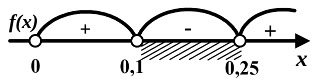
4.130. $\dfrac{4-(0,5)^x}{x-1}>0$.



Пусть $f(x)=\dfrac{4-(0,5)^x}{x-1}$;

$D(f)=(-\infty;\ 1)\cup(1;\ \infty)$. $4=(0,5)^x$; $2^2=2^{-x}$; $x=-2$; Ответ: $(-\infty;-2)\cup(1;\ \infty)$.

4.131. $\frac{\lg x+1}{4x-1}<0.$

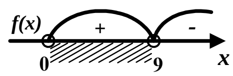


Пусть $f(x)=\frac{\lg x+1}{4x-1};$

$D(f)=\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{4};\infty\right).$

$\lg x = -1$; $x = 0{,}1$; $x \in (0{,}1;\ 0{,}25)$. Ответ: (0,1; 0,25).

4.132. $\frac{\log_{\frac{1}{3}} x+2}{2x+1}>0.$ Пусть $f(x)=\frac{\log_{\frac{1}{3}} x+2}{2x+1};$

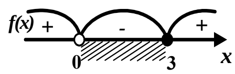


$D(f)=(0;\ \infty)$.

$\log_{\frac{1}{3}} x=-2;\ \ x=9;$

$x \in (0;\ 9)$. Ответ: (0; 9).

4.133. $\frac{x-3}{4^x-1}\le 0.$ Пусть $f(x)=\frac{x-3}{4^x-1};$

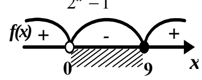


$D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ \infty)$.

$x \in (0;\ 3]$.

Ответ: (0; 3].

4.134. $\frac{x-9}{2^x-1}\ge 0.$ Пусть $f(x)=\frac{x-9}{2^x-1};$ $D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ \infty)$.



$x = 9$;

$x \in (-\infty;\ 0) \cup [9;\ \infty)$.

Ответ: $(-\infty;\ 0) \cup [9;\ \infty)$.

4.135. $\begin{cases}27^x=9^y,\\81^x=3^{y+1};\end{cases}$ $\begin{cases}3^{3x}=3^{2y},\\3^{4x}=3^{y+1};\end{cases}$ $\begin{cases}3x=2y,\\4x=y+1;\end{cases}$ $\begin{cases}3x=8x-2,\\y=4x-1;\end{cases}$ $\begin{cases}x=\frac{2}{5},\\y=\frac{3}{5}.\end{cases}$

Ответ: $(2/5;3/5)$.

4.136. $\begin{cases}16^x=64^y,\\27^{x+1}=81^{y-1};\end{cases}$ $\begin{cases}4^{2x}=4^{3y},\\3^{3x+3}=3^{4y-4};\end{cases}$ $\begin{cases}2x=3y,\\3x-4y=-7;\end{cases}$ $\begin{cases}x=\frac{3}{2}y,\\3\cdot\frac{3}{2}y-4y=-7;\end{cases}$

$\begin{cases}x=-21,\\y=-14.\end{cases}$ Ответ: (-21; -14).

4.137. $\begin{cases} x - y = 8, \\ 2^{x-3y} = 16; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 8 + y, \\ 2^{x-3y} = 2^4; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 8 + y, \\ x = 3y + 4; \end{cases}$

$8 + y = 3y + 4$; $y = 2$, $x = 10$. Ответ: (10; 2).

4.138. $\begin{cases} x + y = 3, \\ 5^{x+3y} = \dfrac{1}{5}; \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 3, \\ x + 3y = -1; \end{cases}$

$-2y = 4$; $y = -2$; $x = 5$. Ответ: (5; -2).

4.139. $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ \dfrac{4^{x-2,5}}{4^{3y}} = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ 2x - 5 = 6y + 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ x - 3y = 3; \end{cases}$ $\begin{cases} 5y = 0, \\ x = 3y + 3; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0, \\ x = 3. \end{cases}$

Ответ: (3; 0).

4.140.

$\begin{cases} 3x - 2y = -1, \\ \dfrac{3^{8x}}{3^{3y}} = 9; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x - 2y = -1, \\ 3^{8x} = 3^{3y+2}; \end{cases}$ $\begin{cases} -9x + 6y = 3, \\ 16x - 6y = 4; \end{cases}$ $\begin{cases} 7x = 7, \\ 3x - 2y = -1; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$

Ответ: (1; 2).

4.141. $\begin{cases} y - x = 7, \\ 3^x \cdot 3^{2(y-1)} = 27; \end{cases}$ $\begin{cases} y = x + 7, \\ 3^x \cdot 3^{2(x+6)} = 3^3; \end{cases}$ $\begin{cases} y = x + 7, \\ 3x = -9; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 4, \\ x = -3. \end{cases}$

Ответ: (-3; 4).

4.142. $\begin{cases} \dfrac{y}{3} - \dfrac{x}{2} = 1, \\ 2^{x-2} \cdot 2^y - 8; \end{cases}$

$\begin{cases} 2y - 3x = 6, \\ 2^{x-2+y} = 2^3; \end{cases}$ $\begin{cases} 2y - 3x = 6, \\ x + y = 5; \end{cases}$ $\begin{cases} 2y - 3x = 6, \\ -2y - 2x = -10; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0{,}8, \\ y = 5 - 0{,}8 = 4{,}2. \end{cases}$

Ответ: (0,8; 4,2).

4.143. $\begin{cases} 2x + 7y = 1, \\ 2^{x+y} = 4^{x-y+2}; \end{cases}$

$\begin{cases} 2x + 7y = 1, \\ 2^{x+y} = 2^{2(x-y+2))}; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x + 7y = 1, \\ x + y = 2x - 2y + 4; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x + 7y = 1, \\ -x + 3y = 4; \end{cases}$

$\begin{cases} 2(3y - 4) + 7y = 1, \\ x = 3y - 4; \end{cases}$ $\begin{cases} 13y = 9, \\ x = 3y - 4; \end{cases}$ $\begin{cases} y = \dfrac{9}{13}, \\ x = -1\dfrac{12}{13}. \end{cases}$ Ответ: $\left(-1\dfrac{12}{13}; \dfrac{9}{13}\right)$.

4.144. $\begin{cases}2y-x=6,\\9^{2x+y}=3^{2-3y};\end{cases}$ $\begin{cases}x=2y-6,\\3^{2(2x+y)}=3^{2-3y};\end{cases}$ $\begin{cases}x=2y-6,\\4x+5y=2;\end{cases}$

$\begin{cases}x=2y-6,\\13y=26;\end{cases}$ $\begin{cases}x=-2,\\y=2.\end{cases}$ Ответ: (-2; 2).

4.145. $\begin{cases}2x-y=1,\\\dfrac{3^y}{27}=\left(\dfrac{1}{9}\right)^{x-2};\end{cases}$ $\begin{cases}2x-y=1,\\3^{y-3}=3^{4-2x};\end{cases}$ $\begin{cases}2x-y=1,\\2x+y=7;\end{cases}$

$4x=8$; $x=2$, тогда $y=3$. Ответ: (2; 3).

4.146. $\begin{cases}x-y=7,\\\log_2(2x+y)=3;\end{cases}$ $\begin{cases}x-y=7,\\2x+y=8;\end{cases}$ $\begin{cases}3x=15,\\y=x-7;\end{cases}$ $\begin{cases}x=5,\\y=5-7=-2.\end{cases}$

Ответ: (5; -2).

4.147. $\begin{cases}3x+4y=8,\\8\cdot2^y=4^{2x+2,5};\end{cases}$ $\begin{cases}3x+4y=8,\\2^{3+y}=2^{4x+5};\end{cases}$ $\begin{cases}3x+4y=8,\\4x-y=-2;\end{cases}$ $\begin{cases}3x+4y=8,\\16x-4y=-8;\end{cases}$

$\begin{cases}19x=0,\\y=4x+2;\end{cases}$ $\begin{cases}x=0,\\y=2.\end{cases}$ Ответ: (0; 2).

4.148. $\begin{cases}4x+y=-10,\\\log_3(3y-x)=2;\end{cases}$ $\begin{cases}4x+y=-10,\\-x+3y=9;\end{cases}$ $\begin{cases}4x+y=-10,\\-4x+12y=36;\end{cases}$

$\begin{cases}4x+y=-10,\\13y=26;\end{cases}$ $\begin{cases}x=-3,\\y=2.\end{cases}$ Ответ: (-3; 2).

4.149. $\begin{cases}x-y-7=0,\\\log_3\dfrac{x+1}{y}=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x-y-7=0,\\x+1=9y;\end{cases}$ $\begin{cases}8y=8,\\x=7+y;\end{cases}$ $\begin{cases}y=1,\\x=8.\end{cases}$

Ответ: (8; 1).

4.150. $\begin{cases}x+y-10=0,\\\log_2\dfrac{y-1}{x}=3;\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=10,\\8x-y=-1;\end{cases}$ $\begin{cases}9x=9,\\y=8x+1;\end{cases}$ $\begin{cases}x=1,\\y=9.\end{cases}$

Ответ: (1; 9).

4.151. $\begin{cases}3x+y=3,\\\log_3(5x+4y)=\log_3(y+5);\end{cases}$

$\begin{cases}3x+y=3,\\5x+4y=y+5;\end{cases}$ $\begin{cases}3x+y=3,\\5x+3y=5;\end{cases}$ $\begin{cases}-4x=-4,\\y=3-3x;\end{cases}$ $\begin{cases}x=1,\\y=0.\end{cases}$

Ответ: (1; 0).

4.152. $\begin{cases} y-2x=2, \\ \log_5(y-x)=\log_5(x+2); \end{cases}$ $\begin{cases} y-2x=2, \\ y-x=x+2, \\ x+2>0; \end{cases}$ $\begin{cases} y-2x=2, \\ y-2x=2, \\ x>-2. \end{cases}$

Решение данной системы – любая пара (x; $2x+2$), где $x > -2$.
Ответ: (x; $2x+2$), $x > -2$.

4.153. $\begin{cases} 4x-y=2, \\ \log_{12} x+\log_{12} 3=\log_{12}(y+1); \end{cases}$

$\begin{cases} 4x-y=2, \\ 3x=y+1, \\ x>0; y>-1; \end{cases}$ $\begin{cases} 4x-y=2, \\ 3x-1=y, \\ x>0; y>-1; \end{cases}$ $\begin{cases} 4x-2=3x-1, \\ y=3x-1, \\ x>0; y>-1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=1, \\ y=2. \end{cases}$

Ответ: (1; 2).

4.154. $\begin{cases} x+4y=16, \\ \log_7 y-\log_7 4=\log_7(x+1); \end{cases}$

$\begin{cases} x+4y=16, \\ \dfrac{y}{4}=x+1, \\ x>-1; y>0; \end{cases}$ $\begin{cases} x=16-4y, \\ y=4(16-4y)+4, \\ x>-1; y>0; \end{cases}$ $\begin{cases} y=4, \\ x=0, \\ x>-1; y>0. \end{cases}$

Ответ: (0; 4).

4.155. $\begin{cases} 2x+y=15, \\ x-3y=\log_2 144-\log_2 9; \end{cases}$ $\begin{cases} y=15-2x, \\ x=3y+\log_2 \dfrac{144}{9}; \end{cases}$

$\begin{cases} y=15-2x, \\ x=3(15-2x)+\log_2 16; \end{cases}$ $\begin{cases} y=15-2x, \\ x=45-6x+4; \end{cases}$ $\begin{cases} y=15-2x, \\ x=7; \end{cases}$ $\begin{cases} y=1, \\ x=7. \end{cases}$

Ответ: (7; 1).

4.156. $\begin{cases} 2y-3x=6, \\ 2x+y=\log_3 135-\log_3 5; \end{cases}$

$\begin{cases} 2y-3x=6, \\ 2x+y=\log_3 \dfrac{135}{5}; \end{cases}$ $\begin{cases} 2y-3x=6, \\ y=3-2x; \end{cases}$ $\begin{cases} 2(3-2x)-3x=6, \\ y=3-2x; \end{cases}$

$\begin{cases} 6-4x-3x=6, \\ y=3-2x; \end{cases}$ $\begin{cases} -7x=0, \\ y=3-2x; \end{cases}$ $\begin{cases} x=0, \\ y=3. \end{cases}$

Ответ: (0; 3).

4.157. $y' = 4\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)$; $y\left(\frac{\pi}{12}\right) = 4\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = 4\cos\frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3}$.

Ответ: $2\sqrt{3}$.

4.158. $y = \ln(2 - x)$, $x_0 = -1$; $y' = -\frac{1}{2 - x}$; $y'(-1) = -\frac{1}{2+1} = -\frac{1}{3}$.

Ответ: $-\frac{1}{3}$.

4.159. $y' = 2e^{2x-1}$; $y'\left(\frac{1}{2}\right) = 2e^0 = 2$. Ответ: 2.

4.160. $y' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x+5}} = \frac{1}{\sqrt{2x+5}}$; $y'(2) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 2 + 5}} = \frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

4.161. $y' = e^x \sin x + e^x \cos x + 1$; $y'(0) = e^0 \sin 0 + e^0 \cos 0 + 1 = 2$.
Ответ: 2.

4.162. $y' = \frac{x + 1 - x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$; $y'(-2) = \frac{1}{(-2+1)^2} = 1$. Ответ: 1.

4.163. $y = x \ln x$, $x_0 = 1$; $y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$; $y'(1) = \ln 1 + 1 = 1$.

Ответ: 1.

4.164. $y = \frac{\ln x}{x}$, $x_0 = 1$; $y' = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$; $y'(1) = \frac{1 - \ln 1}{1} = 1$.

Ответ: 1.

4.165. $y = x - 3x^2$, $x_0 = 2$. $y' = 1 - 6x$, $y(2) = -10$, $y'(2) = -11$;
$y = -10 - 11(x - 2)$, $y = 12 - 11x$. Ответ: $y = -11x + 12$.

4.166. $y = 2 - \frac{x}{2} - x^2$, $x_0 = 0$; $y' = -\frac{1}{2} - 2x$, $y'(0) = -\frac{1}{2}$, $y(0) = 2$.

$y = 2 - \frac{1}{2}(x - 0)$, $y = 2 - 0{,}5x$. Ответ: $y = -0{,}5x + 2$.

4.167. $y = \sin x$, $x_0 = \pi$, $y' = \cos x$, $y'(\pi) = \cos \pi = -1$, $y(\pi) = \sin \pi = 0$;
$y = 0 - 1(x - \pi)$, $y = \pi - x$.
Ответ: $y = -x + \pi$.

4.168. $y=\sqrt{x}$, $y_0 = 2$. Тогда $x_0 = 4$;

$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $y'(4)=\dfrac{1}{4}$, $y(4) = 2$. $y=2+\dfrac{1}{4}(x-4)$, $y = 1 + 0{,}25x$.

Ответ: $y = 0{,}25x + 1$.

4.169. $y = 4x^3$, $y = 12x - 10$; $y' = 12x^2$. $y = 12x - 10$, то $k = 12$;
$12x^2 = 12$; $x = \pm 1$. $12 \cdot 1 - 10 \neq 4 \cdot 1^3$; $12 \cdot (-1) - 10 \neq 4 \cdot (-1)^3$, значит не является. Ответ: не является.

4.170. $y = x + 1$, $y = e^x$; $y = e^x$, $y' = e^x$.
Так как уравнение прямой $y = x + 1$, то $k = 1$, значит, $e^x = 1$, $x = 0$.
Уравнение касательной к функции $y = e^x$ в точке $x = 0$: $y = x + 1$
Ответ: является.

4.171. $y = \sin x$, $y = x$; $y = \sin x$, $y' = \cos x$.
Так как уравнение прямой $y = x$, то $k = 1$, значит, $\cos x = 1$,
$x = 0$ – абсцисса возможной точки касания.
$y = x$, $y(0) = 0$; $y = \sin x$, $y(0) = 0$.
Так как $0 = 0$, то точка $(0; 0)$ является точкой касания прямой $y = x$ и графика функции $y = \sin x$. Ответ: является.

4.172. $y=\sqrt{x}$, $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Так как уравнение прямой $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$, то $k=\dfrac{1}{2}$, значит, $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}$; $x = 1$. Составим уравнение касательной к графику функции $y=\sqrt{x}$ в точке с абсциссой 1:
$y=1+\dfrac{1}{2}(x-1)$, $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$. Ответ: является.

4.173. $y = x^3$; $x_0 = 1$. $y' = 3x^2$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 3$. $y = 1 + 3(x - 1)$,
$y = 3x - 2$, Тогда $3x^2 = 3$; $x^2 = 1$; $x_1 = 1$, $x_2 = -1$; $y_1 = 1$, $y_2 = -1$.
Ответ: $y = 3x - 2$; $(-1; -1)$.

4.174. $y=\dfrac{4}{x}$, $x_0 = 2$; $y'=-\dfrac{4}{x^2}$, $y'(2) = -1$, $y(2) = 2$.
Уравнение касательной: $y = 2 - 1(x - 2)$, $y = 4 - x$, значит, $k = -1$.
Тогда $-\dfrac{4}{x^2}=-1$; $x=\pm 2$, $y(-2)=-2$, $y(2) = 2$. Ответ: $y = 4 - x$, $(-2; -2)$.

4.175. $y = 1 + \cos x$, $x_0=\dfrac{\pi}{2}$; $y' = -\sin x$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$.

Уравнения касательной: $y=1-\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$, $y=1+\dfrac{\pi}{2}-x$; $k = -1$;

$\sin x_0 = -1$; $x_0 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$, $y_0\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1$.

Ответ: $y = 1 + \frac{\pi}{2} - x$; $x_0 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $y_0 = 1$, $n \in Z$.

4.176. $y = x + \sin x$; $x_0 = -\frac{\pi}{2}$; $y' = 1 + \cos x$;

$y'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} - 1$. $y = -\frac{\pi}{2} - 1 + 1\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$,

$y = x - 1$; $k = 1$; $1 + \cos x_0 = 1$; $\cos x_0 = 0$; $x_0 = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

$$\left[\begin{array}{l} y\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = \frac{\pi}{2} + \pi n + 1,\ n \in Z \ \text{ - четное,} \\ y\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = \frac{\pi}{2} + \pi n - 1,\ n \in Z \ \text{ - нечетное.} \end{array}\right.$$

Ответ: $y = x - 1$, $x_0 = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $y_0 = (-1)^n + \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

4.177. $y = x + e^{-2x}$; $y = -x$; $y' = 1 - 2e^{-2x}$.

Так как касательная параллельна прямой $y = -x$, то $k = -1$.

$1 - 2e^{-2x_0} = -1$; $e^{-2x_0} = 1$; $x_0 = 0$; $y'(0) = -1$, $y(0) = 1$.

$y = 1 - 1(x - 0)$, $y = 1 - x$. Ответ: $y = 1 - x$.

4.178. $y = x - \frac{1}{x^2}$, $y = 3x$; $y' = 1 + \frac{2}{x^3}$.; $y(x_0) = 3$;

$1 + \frac{2}{x_0^{\ 3}} = 3$, $\Rightarrow x_0 = 1$,; $y(1) = 0$, значит уравнение касательной:

$y = 0 + 3(x - 1)$. Ответ: $y = 3x - 3$.

4.179. $y = 2x - \ln x$, $y = x$; $y' = 2 - \frac{1}{x}$.

Так как касательная параллельна прямой $y = x$, то $k = 1$.

$2 - \frac{1}{x_0} = 1$; $x_0 = 1$; $y'(1) = 1$, $y(1) = 2$. $y = 2 + 1(x - 1)$, $y = x + 1$.

Ответ: $y = x + 1$.

4.180. $y = 2\sqrt{x} + x$; $y = 2x$; $y' = \frac{1}{\sqrt{x}} + 1$.

Так как касательная параллельна прямой $y = 2x$, то $k = 2$.

$\frac{1}{\sqrt{x_0}}+1=2$; $x_0 = 1$; $y'(1) = 2$, $y(1) = 3$.

$y = 3 + 2(x - 1)$, $y = 2x + 1$. Ответ: $y = 2x + 1$.

4.181. $y = x^2 - 5x$; $y = -x$; $y' = 2x - 5$. Так как $y = -x$, то $k = -1$;
$2x_0 - 5 = -1$; $x_0 = 2$; $y_0 = 2^2 - 5 \cdot 2 = -6$. Ответ: (2; -6).

4.182. $y=\sqrt{x}$, $y = x$; $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Так как $y = x$, то $k = 1$;

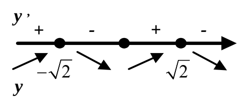
$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}=1$; $x_0 = 0{,}25$; $y_0=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$. Ответ: (0,25; 0,5).

4.183. $y = x^3 - 3x + 1$; $y' = 3x^2 - 3$. Так как $y = 0$, то $k = 0$.
$3x_0^2 - 3 = 0$; $x_0 = \pm1$, $y_{01} = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 1 = 3$, $y_{02} = -1$.
Ответ: (-1; 3); (1; -1).

4.184. $y=\frac{1}{x}$, $y'=-\frac{1}{x^2}$. $y = -x$, $k = -1$;

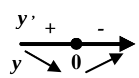
$-\frac{1}{x_0^2}=-1$; $x_0 = \pm1$, $y_{01} = -1$, $y_{02} = 1$. Ответ: (-1; -1); (1; 1).

4.185. $y = -x^4 + 4x^2 - 3$;
$y' = -4x^3 + 8x = 4x(2 - x^2)$.
$y' = 0$ при $x = 0$ или $x=\pm\sqrt{2}$. 0;
$\pm\sqrt{2}$ - критические точки.



Ответ: возрастает на $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right]$ и $\left[0;\sqrt{2}\right]$; убывает - $\left[-\sqrt{2};0\right]$
и $\left[\sqrt{2};\infty\right)$.

4.186. $y = e^x - x$; $y' = e^x - 1$; $y' = 0$ при $x = 0$.
Ответ: возрастает на $[0; \infty)$,
убывает на $(-\infty; 0]$.

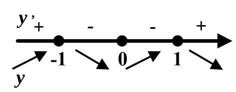


4.187. $y = \cos x + 2x$; $D(y) = R$.
$y' = -\sin x + 2 > 0$, т.е. возрастает. Ответ: возрастает на $(-\infty; \infty)$.

4.188. $y=x+\frac{1}{x}$;

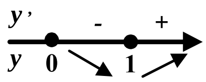
$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$;

$y'=1-\frac{1}{x^2}$.



$y'(x) = 0$ при $x = \pm1$.
Ответ: возрастает на $(-\infty; -1]$ и $[1; \infty)$; убывает на $[-1; 0)$ и $(0; 1]$.

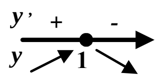
4.189. $y = \ln x + \frac{1}{x}$; D(y) = (0; ∞);



$y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$.

Ответ: возрастает на [1; ∞),
убывает на (0; 1].

4.190. $y = \frac{2x}{e^x}$;

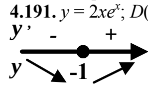


$D(y) = R$;

$y' = \frac{2e^x - e^x \cdot 2x}{e^{2x}} = \frac{2(1-x)}{e^x}$.

Ответ: возрастает на (-∞; 1]; убывает на [1; ∞).

4.191. $y = 2xe^x$; $D(y) = R$;



$y' = 2(e^x + xe^x) = 2e^x(1 + x)$; $y' = 0$.
Ответ: возрастает на [-1; ∞);
убывает на (-∞; -1].

4.192. $y = 0{,}5x + \sin x$; $y' = 0{,}5 + \cos x$; $y' = 0$; $\cos x = -0{,}5$.
Промежутки возрастания функции $y = 0{,}5x + \sin x$:

$\left[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$.

Промежутки убывания: $\left[\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \frac{4\pi}{3} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$.

Ответ: возрастает на $\left[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right]$,

убывает на $\left[\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \frac{4\pi}{3} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$.

4.193. $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$, [4; 5]; $y' = 6x^2 - 6x - 12$;
$y' = 0$: $x^2 - x - 2 = 0$; $x = -1$, $x = 2$. $y(4) = 33$; $y(5) = 116$.
Ответ: $\min\limits_{[4;5]} y = 33$, $\max\limits_{[4;5]} y = 116$.

4.194. $y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 3$, [2; 3]; $y' = 6x^2 - 30x + 24$;
$y' = 0$: $x^2 - 5x + 4 = 0$; $x = 1$, $x = 4$. $y(2) = 7$; $y(3) = -6$.
Ответ: $\min\limits_{[2;3]} y = -6$, $\max\limits_{[2;3]} y = 7$.

4.195. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 1$, [-1; 2]; $y' = 6x^2 + 6x - 12$;
$y' = 0$: $x^2 + x - 2 = 0$; $x = 1$, $x = -2$

$y(-1) = 12$; $y(1) = -8$; $y(2) = 3$.

Ответ: $\min\limits_{[-1;2]} y = -8$, $\max\limits_{[-1;2]} y = 12$.

4.196. $y = -x^3 - 3x^2 + 9x - 2$, $[-2; 2]$; $y' = -3x^2 - 6x + 9$;
$y' = 0$: $x^2 + 2x - 3 = 0$; $x = -3$; $x = 1$. $y(-2) = -24$; $y(1) = 3$; $y(2) = -4$.

Ответ: $\min\limits_{[-2;2]} y = -24$, $\max\limits_{[-2;2]} y = 3$.

4.197. $y = 2x^3 + 3x^2 + 2$, $[-2; 1]$; $y' = 6x^2 + 6x$;
$y' = 0$: $x^2 + x = 0$; $x = 0$, $x = -1$. $y(-2) = -2$; $y(-1) = 3$; $y(0)= 2$; $y(1) = 7$.

Ответ: $\min\limits_{[-2;1]} y = -2$, $\max\limits_{[-2;1]} y = 7$.

4.198. $y = -x^3 + 3x^2 + 4$, $[-3; 3]$; $y' = -3x^2 + 6x$;
$y' = 0$: $x^2 - 2x = 0$; $x = 0$, $x = 2$. $y(-3) = 58$; $y(0) = 4$; $y(2) = 8$; $y(3) = 4$.

Ответ: $\min\limits_{[-3;3]} y = 4$, $\max\limits_{[-3;3]} y = 58$.

4.199. $y = 2x^3 - 9x^2 - 3$, $[-1; 4]$; $y' = 6x^2 - 18x$; $y' = 0$: $x^2 - 3x = 0$;
$x = 0$, $x = 3$. $y(-1) = -14$; $y(0) = -3$; $y(3) = -30$; $y(4) = -19$.

Ответ: $\min\limits_{[-1;4]} y = -30$, $\max\limits_{[-1;4]} y = -3$.

4.200. $y=x^3-3x^2-9x-4$, $[-4; 4]$; $y'=3x^2 - 6x - 9$; $y' = 0$: $x^2 - 2x - 3 = 0$;
$x = 3$, $x = -1$; $y(-4) = -80$; $y(-1) = 1$; $y(3) = -31$; $y(4) = -24$.

Ответ: $\min\limits_{[-4;4]} y = -80$, $\max\limits_{[-4;4]} y = 1$.

Раздел 5. Задание 8 для экзамена «Алгебра и начала анализа»

Тригонометрия

5.1. $-\sin\frac{x}{2}=\cos x$, $\cos x+\sin\frac{x}{2}=0$; $2\sin^2\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}-1=0$.

Пусть $\sin\frac{x}{2}=t$. Имеем: $2t^2 - t - 1 = 0$. $D = 1 + 8 = 9$;

$t_{1,2}=\frac{1\pm 3}{4}$, $t_1 = 1$; $t_2=-\frac{1}{2}$.

1) $\sin\frac{x}{2}=1$, $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$; $x = \pi + 4\pi n$, $n \in Z$.

2) $\sin\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}$, $\frac{x}{2}=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$;

$x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$. Ответ: $\pi + 4\pi n$, $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$.

5.2. $\cos\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}-1=0$; $2\cos^2\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}-1=0$.

Пусть $\cos\frac{x}{2}=t$. Тогда: $2t^2 + t - 1 = 0$. $D = 1 + 8 = 9 > 0$.

$t_{1,2}=\frac{-1\pm 3}{4}$, $t_1 = -1$, $t_2=\frac{1}{2}$.

1) $\cos\frac{x}{2}=-1$, $\frac{x}{2}=\pi+2\pi n, n\in Z$; $x = 2\pi + 4\pi n$, $n \in Z$;

2) $\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$, $\frac{x}{2}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$; $x=\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi n, n\in Z$.

Ответ: $2\pi + 4\pi n$, $\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi n, n\in Z$.

5.3. $3\cos 2x = 4 - 11\cos x$; $3(2\cos^2 x - 1) - 4 + 11\cos x = 0$;
$6\cos^2 x - 3 - 4 + 11\cos x = 0$; $6\cos^2 x + 11\cos x - 7 = 0$.
Пусть $\cos x = t$. Тогда $6t^2 + 11t - 7 = 0$; $D = 121 + 168 = 289 > 0$,

$t_{1,2}=\frac{-11\pm 17}{12}$; $t_1=-\frac{7}{3}$; $t_2=\frac{1}{2}$.

1) $\cos x = -\frac{7}{3}$; решений нет, т.к. $|\cos x| \le 1$;

2) $\cos x = \frac{1}{2}$, $\quad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$. Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$.

5.4. $\cos^2 6x - \sin^2 3x - 1 = 0$. $(1 - 2\sin^2 3x)^2 - \sin^2 3x - 1 = 0$,
$1 - 4\sin^2 3x + 4\sin^4 3x - \sin^2 3x - 1 = 0$; $4\sin^4 3x - 5\sin^2 3x = 0$;
$\sin^2 3x(4\sin^2 3x - 5) = 0$; $4\sin^2 3x - 5 \ne 0$. Значит, $\sin^2 3x = 0$; $\sin 3x = 0$;

$3x = \pi n$, $n \in Z$; $x = \frac{\pi n}{3}, n \in Z$. Ответ: $\frac{\pi n}{3}, n \in Z$.

5.5. $\sin x = 1 + \frac{1}{x^2+1}$; $-1 \le \sin x \le 1$, а $1 + \frac{1}{x^2+1} > 1$ при всех значениях x. Ответ: решений нет.

5.6. $\cos x = x^2 + 1$; Т.к. $-1 \le \cos x \le 1$, а $x^2 + 1 \ge 1$ при всех значениях x, то $\cos x = x^2 + 1$ при одновременном выполнении двух условий: $\cos x = 1$ и $x^2 + 1 = 1$. $x^2 + 1 = 1$ при $x = 0$.
Если $x = 0$, то $\cos x = \cos 0 = 1$. Ответ: 0.

5.7. $\cos x = 1 + |x|$; Т.к. $-1 \le \cos x \le 1$, а $1 + |x| \ge 1$ при всех значениях x, то $\cos x = 1 + |x|$ при одновременно выполнении двух условий: $\cos x=1$ и $1+|x| = 1$. Второе условие выполняется при $x = 0$.
Если $x = 0$, то $\cos x = \cos 0 = 1$. Ответ: 0.

5.8. $\sin x = 1 + 2^x$; Т.к. $-1 \le \sin x \le 1$, а $1 + 2^x > 1$ при всех значениях x, т.к. $2^x > 0$. Одновременно эти условия не выполняются, т.е. уравнение решений не имеет. Ответ: решений нет.

5.9. $2\cos^2 4x - 6\cos^2 2x + 1 = 0$; $2(2\cos^2 2x - 1)^2 - 6\cos^2 2x + 1 = 0$;
$2(4\cos^4 2x - 4\cos^2 2x + 1) - 6\cos^2 2x + 1 = 0$;
$8\cos^4 2x - 8\cos^2 2x + 2 - 6\cos^2 2x + 1 = 0$; $8\cos^4 2x - 14\cos^2 2x + 3 = 0$.

Пусть $\cos^2 2x = t$. Тогда: $8t^2 - 14t + 3 = 0$. $\frac{D}{4} = 49 - 24 = 25 > 0$.

$t_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{8}$; $t_1 = \frac{3}{2}$; $t_2 = \frac{1}{4}$. $\cos^2 2x = \frac{1}{4}$; $\cos 2x = \pm\frac{1}{2}$;

$2x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$; $\quad x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$;

Ответ: $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $\quad \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$.

5.10. $-2\sin x + 5\sin 2x = 0$; $5 \cdot 2\sin x \cdot \cos x - 2\sin x = 0$;
$2\sin x(5\cos x - 1) = 0$;
$\sin x = 0$ или $5\cos x - 1 = 0$;

$x = \pi n,\ n \in Z$ или $\cos x = \frac{1}{5}$; $x = \pi n,\ n \in Z$ или

$x = \pm\arccos\frac{1}{5} + 2\pi n, n \in Z$. Ответ: πn, $\pm\arccos\frac{1}{5} + 2\pi n, n \in Z$.

5.11. $2\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0$; $2(2\cos^2 x - 1) - 3\cos x + 2 = 0$;
$4\cos^2 x - 2 - 3\cos x + 2 = 0$; $\cos^2 x - 3\cos x = 0$; $\cos x \cdot (4\cos x - 3) = 0$,

$\cos x = 0$ или $\cos x = \frac{3}{4}$;

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ или $x = \pm\arccos\frac{3}{4} + 2\pi n, n \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\pm\arccos\frac{3}{4} + 2\pi n, n \in Z$.

5.12. $2\sin x + 3\cos 2x - 3 = 0$; $2\sin x + 3(1 - 2\sin^2 x) - 3 = 0$;
$2\sin x + 3 - 6\sin^2 x - 3 = 0$; $3\sin^2 x - \sin x = 0$; $\sin x(3\sin x - 1) = 0$;

$\sin x = 0$ или $\sin x = \frac{1}{3}$; $x = \pi n,\ n \in Z$ или

$x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n, n \in Z$. Ответ: πn, $(-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n, n \in Z$.

5.13. $6\sin^2 x + \sin x\cos x - \cos^2 x = 0$; $\cos x \neq 0$. $6\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\, x - 1 = 0$.
Пусть $\mathrm{tg}\, x = t$. Тогда: $6t^2 + t - 1 = 0$; $D = 1 + 24 = 25$;

$t_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{12}$; $t_1 = \frac{1}{3}$; $t_2 = -\frac{1}{2}$.

1) $tgx = \frac{1}{3}$; $x = arctg\frac{1}{3} + \pi n, n \in Z$;

2) $tgx = -\frac{1}{2}$; $x = -arctg\frac{1}{2} + \pi n, n \in Z$.

Ответ: $-arctg\frac{1}{2} + \pi n$, $arctg\frac{1}{3} + \pi n, n \in Z$.

5.14. $\sin^2 x - 2\sin x\cos x = 3\cos^2 x$; $\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$;
$\cos x \neq 0$; $\mathrm{tg}^2 x - 2\mathrm{tg}\, x - 3 = 0$. Пусть $\mathrm{tg}\, x = t$.
Имеем: $t^2 - 2t - 3 = 0$; $t_1 = 3$, $t_2 = -1$.
1) $\mathrm{tg}\, x = 3$; $x = \mathrm{arctg} 3 + \pi n,\ n \in Z$;

2) $\mathrm{tg}\, x = -1$; $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$.

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\mathrm{arctg} 3 + \pi n,\ n \in Z$.

5.15. $\begin{cases} y+\sin x=5, \\ 4y+2\sin x=19. \end{cases}\Bigg|\cdot(-2);\qquad +\begin{cases} -2y-2\sin x=-10, \\ 4y+2\sin x=19. \end{cases}$

$2y = 9$, $y = 4,5$. Тогда: $4,5 + \sin x = 5$; $\sin x = 0,5$;

$x=(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z.$ Ответ: $\left((-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n;\ 4,5\right)$, $n \in Z$.

5.16. $\begin{cases} 3y+2tgx=4 \\ 2y+3tgx=1 \end{cases}\begin{vmatrix}\cdot 3, \\ \cdot(-2);\end{vmatrix}\quad \begin{cases} 9y+6tgx=12, \\ -4y-6tgx=-2. \end{cases}$

$5y = 10$; $y = 2$. Решим уравнение:

$3 \cdot 2 + 2\text{tg}\, x = 4$; $2\text{tg}\, x = -2$; $\text{tg}\, x = -1$; $x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z.$

Ответ: $\left(-\dfrac{\pi}{4}+\pi n;\ 2\right)$, $n \in Z$.

5.17. $\begin{cases} 4y+\sqrt{3}\cos x=-\dfrac{1}{2}, \\ 28y+4\sqrt{3}\cos x=1; \end{cases}\Bigg|\cdot(-4)\qquad +\begin{cases} -16y-4\sqrt{3}\cos x=2, \\ 28y+4\sqrt{3}\cos x=1; \end{cases}$

$12y = 3$; $\qquad y=\dfrac{1}{4}.$

$4\cdot\dfrac{1}{4}+\sqrt{3}\cos x=-\dfrac{1}{2};\ 1+\sqrt{3}\cos x=-\dfrac{1}{2};\ \sqrt{3}\cos x=-\dfrac{3}{2};$

$\cos x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2};\ x=\pm\left(\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)+2\pi n, n\in Z;\ x=\pm\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in Z.$

Ответ: $\left(\pm\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n;\ \dfrac{1}{4}\right)$, $n \in Z$.

5.18. $\begin{cases} 2\sqrt{3}\sin x-8y=-1, \\ \sqrt{3}\sin x-7y=\dfrac{1}{4}; \end{cases}\Bigg|\cdot(-2)\qquad +\begin{cases} 2\sqrt{3}\sin x-8y=-1, \\ -2\sqrt{3}\sin x+14y=-\dfrac{1}{2}; \end{cases}$

$6y=-\dfrac{3}{2};\ y=-\dfrac{1}{4}.$

$2\sqrt{3}\sin x-8\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)=-1;\ 2\sqrt{3}\sin x=-3;\ \sin x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2};$

$x=(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z.$ Ответ: $\left((-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{3}+\pi n;\ -\dfrac{1}{4}\right)$, $n \in Z$.

5.19. $\cos x < x^2 + 1$; $-1 \le \cos x \le 1$, $x^2+1 \ge 1$. Ответ: $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.
5.20. $-1 \le \cos x \le 1$, $1 + |x| \ge 1$ при всех значениях x. Ответ: $(-\infty; \infty)$.
5.21. $\cos x \le 1+3^x$; $-1 \le \cos x \le 1$, $1 + 3^x > 1$ при $x \in R$. Ответ: $(-\infty; \infty)$.
5.22. $\cos x \ge x^2 + 1$; $-1 \le \cos x \le 1$, $x^2 + 1 \ge 1$. Данное неравенство выполняется только при $x = 0$. Ответ: 0.
5.23. $\cos x \ge 1 + |x|$; $-1 \le \cos x \le 1$, $1 + |x| \ge 1$. Значит, данному неравенству удовлетворяет только $x = 0$. Ответ: 0.
5.24. $\cos x \ge 1 + 2^x$; $-1 \le \cos x \le 1$, $1 + 2^x > 1$. Значит, данное неравенство решений не имеет. Ответ: решений нет.

5.25. $\cos x < 1 + \dfrac{1}{2-\sin^2 x}$; $-1 \le \cos x \le 1$, $1 + \dfrac{1}{2-\sin^2 x} \ge 1\dfrac{1}{2}$ при всех значениях x. Ответ: $(-\infty; \infty)$.

5.26. $\cos x > 1 + \dfrac{1}{1+x^4}$; $-1 \le \cos x \le 1$, $1 + \dfrac{1}{1+x^4} > 1$ при всех значениях x. Ответ: нет решений.

Иррациональные уравнения

5.27. $\sqrt{2x^2-3x+1} - \sqrt{x^2-3x+2} = 0$; $\sqrt{2x^2-3x+1} = \sqrt{x^2-3x+2}$.

$\left(\sqrt{2x^2-3x+1}\right)^2 = \left(\sqrt{x^2-3x+2}\right)^2$; $2x^2 - 3x + 1 = x^2 - 3x + 2$;

$x^2 = 1$; $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. $x = -1$ $\sqrt{x^2-3x+2} = \sqrt{1+3+2} = \sqrt{6}$;

при $x = 1$ $x^2 - 3x + 2 = 1 - 3 + 2 = 0 \ge 0$. Ответ: -1; 1.

5.28. $\sqrt{3x^2-4x-2} = \sqrt{2x^2-2x+1}$; $3x^2 - 4x - 2 = 2x^2 - 2x + 1$;
$x^2 - 2x - 3 = 0$; $x_1 = 3$, $x_2 = -1$;
при $x = 3$ $2x^2 - 2x + 1 = 18 - 6 + 1 = 13 > 0$;
при $x = -1$ $2x^2 - 2x + 1 = 2 + 2 + 1 = 5 > 0$. Ответ: -1; 3.

5.29. $\sqrt{3x^2-2x-2} = \sqrt{4x^2-5x}$;
$3x^2 - 2x - 2 = 4x^2 - 5x$; $x^2 - 3x + 2 = 0$; $x_1 = 2$, $x_2 = 1$
при $x = 2$ $4x^2 - 5x = 16 - 10 = 6 > 0$;
при x = 1 $4x^2 - 5x = 4 - 5 = -1 < 0$; Ответ: 2.

5.30. $\sqrt{3x^2-2x+1} = \sqrt{2x^2-6x+13}$;
$3x^2 - 2x + 1 = 2x^2 - 6x + 13$; $x^2 + 4x - 12 = 0$; $x_1 = -6$; $x_2 = 2$
1) при $x = -6$; $2x^2 - 6x + 13 = 72 + 36 + 13 = 121 < 0$;

2) при $x = 2$; $2x^2 - 6x + 13 = 8 - 12 + 13 = 9 > 0$ $3 = 3$. Ответ: 2.

5.31. $\sqrt{2x^2 - 5x + 1} = \sqrt{x^2 - 2x - 1}$;

$2x^2 - 5x + 1 = x^2 - 2x - 1$; $x^2 - 3x + 2 = 0$; $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.
При $x = 2$ и при $x = 1$ получим отрицательные подкоренные выражения. Ответ: корней нет.

5.32. $\sqrt{3x^2 - 4x - 1} = \sqrt{2x^2 - 5x - 3}$; $3x^2 - 4x - 1 = 2x^2 - 5x - 3$;

$x^2 + x + 2 = 0$; $D = 1 - 8 < 0$ – решений нет. Ответ: решений нет.

5.33. $\sqrt{x^2 - x + 3} = \sqrt{3x^2 - 5x + 6}$; $x^2 - x + 3 = 3x^2 - 5x + 6$;

$2x^2 – 4x + 3 = 0$. $D = 16 - 24 < 0$ – решений нет. Ответ: решений нет.

5.34. $\sqrt{x^2 - 2x - 4} = \sqrt{2x^2 - 6x - 1}$; $x^2 - 2x - 4 = 2x^2 - 6x - 1$;

$x^2 - 4x + 3 = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. При $x = 1$ и $x = 3$ получим отрицательные значения подкоренных выражений. Ответ: решений нет.

5.35. $3x + 1 = \sqrt{1 - x}$; $\begin{cases}(3x+1)^2 = 1 - x,\\ 3x + 1 \ge 0;\end{cases}$ $\begin{cases}9x^2 + 6x + 1 - 1 + x = 0,\\ 3x \ge -1;\end{cases}$

$\begin{cases}9x^2 + 7x = 0,\\ x \ge -\dfrac{1}{3};\end{cases}$ $\begin{cases}x_1 = 0,\ x_2 = -\dfrac{7}{9},\\ x \ge -\dfrac{1}{3};\end{cases}$ $x = 0$. Ответ: 0.

5.36. $8 - 3x = \sqrt{x + 2}$;

$\begin{cases}(8-3x)^2 = x + 2,\\ 8 - 3x \ge 0;\end{cases}$ $\begin{cases}64 - 48x + 9x^2 = x + 2,\\ -3x \ge -8;\end{cases}$ $\begin{cases}9x^2 - 49x + 62 = 0,\\ x \le \dfrac{8}{3}.\end{cases}$

Решим уравнение: $9x^2 - 49x + 62 = 0$, $D = 2401 - 2232 = 169 > 0$,

$x_1 = 3\dfrac{4}{9}$, $x_2 = 2$. Условию $x \le \dfrac{8}{3}$ удовлетворяет $x = 2$. Ответ: 2.

5.37. $8 - 2x = \sqrt{x + 1}$;

$\begin{cases}(8-2x)^2 = x + 1,\\ 8 - 2x \ge 0;\end{cases}$ $\begin{cases}64 - 32x + 4x^2 = x + 1,\\ -2x \ge -8;\end{cases}$ $\begin{cases}4x^2 - 33x + 63 = 0,\\ x \le 4.\end{cases}$

$D = 1089 - 1008 = 81 > 0$; $x_1 = \dfrac{33 - 9}{8}$, $x_2 = \dfrac{33 + 9}{8}$;

$x_1 = 3$, $x_2 = 5\dfrac{1}{4}$. Условию $x \le 4$ удовлетворяет $x = 3$. Ответ: 3.

5.38. $x-2=\sqrt{2-x}$; $(x-2)^2=(\sqrt{2-x})^2$, $x^2-4x+4=2-x$;
$x^2-3x+2=0$; $x_1=1, x_2=2$;
при $x=1$ $1-2\neq\sqrt{2-1}$; при $x=2$ $2-2=\sqrt{2-2}$. Ответ: 2.

5.39. $\sqrt{4-6x-x^2}=x+4$; $4-6x-x^2=(x+4)^2$; $2x^2+14x+12=0$;
$x^2+7x+6=0$; $x_1=-1, x_2=-6$. 1) при $x=-1$ $x+4>0$;
2) при $x=-6$; $x+4<0$ т.е. решений нет. Ответ: -1.

5.40. $\sqrt{8-6x-x^2}-x=6$; $\sqrt{8-6x-x^2}=6+x$;

$\begin{cases}8-6x-x^2=36+12x+x^2,\\ 6+x\geq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}2x^2+18x+28=0,\\ x\geq -6;\end{cases}$

$\begin{cases}x^2+9x+14=0,\\ x\geq -6;\end{cases}$ $\begin{cases}x_1=-2,\ x_2=-7,\\ x\geq -6.\end{cases}$ Ответ: -2.

5.41. $\sqrt{6-4x-x^2}=x+4$; $6-4x-x^2=x^2+8x+16$;
$2x^2+12x+10=0$; $x^2+6x+5=0$; $x_1=-1$; $x_2=-5$
при $x=-1$; $x+4>0$; при $x=-5$; $x+4<0$, т.е. решений нет.
Ответ: -1.

5.42. $\sqrt{1+4x-x^2}=x-1$;

$\begin{cases}1+4x-x^2=x^2-2x+1,\\ x-1\geq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}2x^2-6x=0,\\ x\geq 1;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2-3x=0,\\ x\geq 1;\end{cases}$

$\begin{cases}x(x-3)=0,\\ x\geq 1;\end{cases}$ $\begin{cases}x=0,\ \ x-3=0,\\ x\geq 1;\end{cases}$ $x=3$. Ответ: 3.

5.43. $\sqrt{3x^2-4x+2}=2x-3$;

$\begin{cases}3x^2-4x+2=4x^2-12x+9,\\ 2x-3\geq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2-8x+7=0,\\ x\geq\dfrac{3}{2};\end{cases}$ $\begin{cases}x=1,\ \ x=7,\\ x\geq\dfrac{3}{2};\end{cases}$

$x=7$. Ответ: 7.

5.44. $\sqrt{4+2x-x^2}=x-2$;

$\begin{cases}4+2x-x^2=x^2-4x+4,\\ x-2\geq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}2x^2-6x=0,\\ x\geq 2;\end{cases}$

$\begin{cases}2x(x-3)=0,\\ x\geq 2;\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=3.\end{array}\right.\\ x\geq 2.\end{cases}$ Значит, $x=3$. Ответ: 3.

5.45. $2\sqrt{x+5}=x+2;$

$\begin{cases}\left(2\sqrt{x+5}\right)^2=\left(x+2\right)^2,\\ x+2\ge 0;\end{cases}$ $\begin{cases}4\left(x+5\right)=x^2+4x+4,\\ x\ge -2;\end{cases}$

$\begin{cases}4x+20=x^2+4x+4,\\ x\ge -2;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2=16,\\ x\ge -2;\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-4,\\ x=4,\end{array}\right.\\ x\ge -2.\end{cases}$ Ответ: 4.

5.46.

$2\sqrt{x^2+8}=2x+1;$ $\begin{cases}\left(2\sqrt{x^2+8}\right)^2=\left(2x+1\right)^2,\\ 2x+1\ge 0;\end{cases}$ $\begin{cases}4\left(x^2+8\right)=4x^2+4x+1,\\ 2x\ge -1;\end{cases}$

$\begin{cases}4x^2+32=4x^2+4x+1,\\ x\ge -\dfrac{1}{2};\end{cases}$ $\begin{cases}4x=31,\\ x\ge -\dfrac{1}{2};\end{cases}$ $\begin{cases}x=\dfrac{31}{4},\\ x\ge -\dfrac{1}{2}.\end{cases}$ Ответ: 7,75

5.47. $4\sqrt{x+6}=x+1;$ $\begin{cases}\left(4\sqrt{x+6}\right)^2=\left(x+1\right)^2,\\ x+1\ge 0;\end{cases}$

$\begin{cases}16x+96=x^2+2x+1,\\ x\ge -1;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2-14x-95=0,\\ x\ge -1;\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-5,\\ x=19,\end{array}\right.\\ x\ge -1.\end{cases}$ Ответ: 19.

5.48. $2\sqrt{5-x^2}=x-1;$ $\begin{cases}\left(2\sqrt{5-x^2}\right)^2=\left(x-1\right)^2,\\ x-1\ge 0;\end{cases}$

$\begin{cases}4\left(5-x^2\right)=x^2-2x+1,\\ x\ge 1;\end{cases}$ $\begin{cases}5x^2-2x-19=0,\\ x\ge 1.\end{cases}$

$\dfrac{D}{4}=1+95=96>0;$ $\sqrt{96}=4\sqrt{6}.$ $x_1=\dfrac{1-4\sqrt{6}}{5},$ $x_2=\dfrac{1+4\sqrt{6}}{5},$

$x_1<1,$ $x_2>1.$ Ответ: $\dfrac{1+4\sqrt{6}}{5}.$

5.49. $\begin{cases}\sqrt{x+3y+6}=2,\\ \sqrt{2x-y+2}=1.\end{cases}$ $\begin{cases}x+3y+6=4,\\ 2x-y+2=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x+3y=-2,\\ 2x-y=-1.\end{cases}$

$$+\begin{cases} x+3y=-2, \\ 6x-3y=-3; \end{cases}$$

$7x = -5;$

$y=2x+1=1-\frac{10}{7}=-\frac{3}{7}.$

Проверка: 1) $-\frac{5}{7}-\frac{9}{7}+6>0.$ 2) $2\cdot\left(-\frac{5}{7}\right)+\frac{9}{7}+2>0.$

Ответ: $\left(-\frac{5}{7};\ -\frac{3}{7}\right)$.

5.50. $\begin{cases} \sqrt{x+y-3}=1, \\ \sqrt{3x-2y+1}=2. \end{cases}$ $\begin{cases} x+y-3=1, \\ 3x-2y+1=4; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=4, \\ 3x-2y=3. \end{cases}$

$$+\begin{cases} 2x+2y=8, \\ 3x-2y=3; \end{cases}$$

$5x = 11;$ $\quad x=\frac{11}{5}.$

$y=4-x=\frac{9}{5}.$ $x=\frac{11}{5},\ y=\frac{9}{5}$: 1) $\sqrt{\frac{11}{5}+\frac{9}{5}-3}=\sqrt{4-3}=1,$

2) $\sqrt{3\cdot\frac{11}{5}-2\cdot\frac{9}{5}+1}=\sqrt{3+1}=2,$ Ответ: $\left(2\frac{1}{5};\ 1\frac{4}{5}\right)$.

5.51. $\begin{cases} \sqrt{2x-3y+2}=3, \\ \sqrt{3x+2y-5}=2. \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-3y+2=9, \\ 3x+2y-5=4; \end{cases}$

$\begin{cases} 2x-3y=7, \\ 3x+2y=9; \end{cases}\begin{vmatrix}\cdot 2 \\ \cdot 3\end{vmatrix}$ $+\begin{cases} 4x-6y=14, \\ 9x+6y=27; \end{cases}$ $13x=41;$ $\quad x=\frac{41}{13}.$ $\quad y=\frac{2x-7}{3}=\frac{\frac{82}{13}-7}{3}=-\frac{3}{13}.$

2) $\sqrt{\frac{123}{13}-\frac{6}{13}-5}=\sqrt{9-5}=2.$ Ответ: $\left(3\frac{2}{13};\ -\frac{3}{13}\right)$.

5.52. $\begin{cases} \sqrt{3y-2x-2}=1, \\ \sqrt{4x-2y+3}=2. \end{cases}$

$\begin{cases} 3y-2x-2=1, \\ 4x-2y+3=4; \end{cases}$ $\begin{cases} 3y-2x=3, \\ 4x-2y=1; \end{cases}$ $\begin{cases} -2x+3y=3, \\ 4x-2y=1; \end{cases}\begin{vmatrix}\cdot 2 \\ \ \end{vmatrix}$

$$+\begin{cases}-4x+6y=6,\\4x-2y=1;\end{cases}$$
$4y=7;\Rightarrow y=\frac{7}{4}$; $x=\frac{2y+1}{4}=\frac{9}{8}$; $x=\frac{9}{8}$;

при $x=\frac{9}{8}$; $y=\frac{7}{4}$ имеем:

1) $\sqrt{3\cdot\frac{7}{4}-2\cdot\frac{9}{8}-2}=\sqrt{\frac{21}{4}-\frac{9}{4}-2}=\sqrt{3-2}=1,$

2) $\sqrt{4\cdot\frac{9}{8}-2\cdot\frac{7}{4}+3}=\sqrt{\frac{9}{2}-\frac{7}{2}+3}=\sqrt{1+3}=2.$ Ответ: $\left(1\frac{1}{8};\ 1\frac{3}{4}\right)$.

5.53. $y=\frac{1}{2}x+5$ и $y=\sqrt{1-2x}$. $\sqrt{1-2x}=\frac{1}{2}x+5.$

$$\begin{cases}\left(\sqrt{1-2x}\right)^2=\left(\frac{1}{2}x+5\right)^2,\\\frac{1}{2}x+5\ge 0;\end{cases}\quad\begin{cases}1-2x=\frac{1}{4}x^2+5x+25,\\\frac{1}{2}x\ge -5;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{1}{4}x^2+7x+24=0,\\x\ge -10;\end{cases}\quad\begin{cases}x_1=-4,\ x_2=-24,\\x\ge -10;\end{cases}\quad y=\frac{1}{2}\cdot(-4)+5;$$

Ответ: $x = -4$, $y = 3$.

5.54. $y = 2x-7$ и $y=\sqrt{2x-1}$. $2x-7=\sqrt{2x-1}$;

$$\begin{cases}(2x-7)^2=\left(\sqrt{2x-1}\right)^2,\\2x-7\ge 0;\end{cases}\quad\begin{cases}4x^2-28x+49=2x-1,\\2x\ge 7;\end{cases}$$

$$\begin{cases}4x^2-30x+50=0,\\x\ge\frac{7}{2};\end{cases}\quad\begin{cases}2x^2-15x+25=0,\\x\ge 3{,}5;\end{cases}\quad\begin{cases}x_1=2{,}5;\ x_2=5,\\x\ge 3{,}5.\end{cases}$$

$x = 5$. Тогда $y = 2\cdot 5-7 = 3$.
Ответ: $x = 5$, $y = 3$.

5.55. $y = 1-4x$ и $y=\sqrt{2x+1}$. $1-4x=\sqrt{2x+1}$;

$$\begin{cases}(1-4x)^2=\left(\sqrt{2x+1}\right)^2,\\1-4x\ge 0;\end{cases}\quad\begin{cases}1-8x+16x^2=2x+1,\\-4x\ge -1;\end{cases}$$

$\begin{cases}16x^2-10x=0,\\ x\le\dfrac{1}{4};\end{cases}$ $\begin{cases}x_1=0,\ x_2=\dfrac{5}{8},\\ x\le\dfrac{1}{4}.\end{cases}$ Значит, $x = 0$. Тогда $y = 1$.

Ответ: (0; 1).

5.56. $y = -1 - 2x$ и $y=\sqrt{2x+3}$. $y=\sqrt{2x+3}=-1-2x$.

$\begin{cases}\left(\sqrt{2x+3}\right)^2=\left(-1-2x\right)^2,\\ -1-2x\ge 0;\end{cases}$ $\begin{cases}2x+3=1+4x+4x^2,\\ -2x\ge 1;\end{cases}$

$\begin{cases}4x^2+2x-2=0,\\ x\le-\dfrac{1}{2};\end{cases}$ $\begin{cases}2x^2+x-1=0,\\ x\le-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

$2x^2 + x - 1 = 0$; $D = 1 + 8 = 9 > 0$, $x_1=\dfrac{-1-3}{4}$, $x_1 = -1$;

$x_2=\dfrac{-1+3}{4}$, $x_2=\dfrac{1}{2}$. $y = -1 - 2 \cdot (-1) = -1 + 2 = 1$. Ответ: (-1; 1).

Степени и логарифмы

5.57. $3^x-8\cdot 3^{\frac{x}{2}}+15=0$. Пусть $3^{\frac{x}{2}}=y$, $y > 0$. Имеем: $y^2-8y+15 = 0$, $y_1 = 3$, $y_2 = 5$.

1) $3^{\frac{x}{2}}=3$, $\dfrac{x}{2}=1$, $x=2$; 2) $3^{\frac{x}{2}}=5$, $\dfrac{x}{2}=\log_3 5$, $x = 2\log_3 5$, $x = \log_3 25$.

Ответ: 2; $\log_3 25$.

5.58. $3\cdot 2^x-2^{\frac{x}{2}+1}=1$; $3\cdot 2^x-2\cdot 2^{\frac{x}{2}}=1$. Пусть $2^{\frac{x}{2}}=y$, $y>0$.

Тогда: $3y^2 - 2y - 1 = 0$; $\dfrac{D}{4}=1+3=4$; $y=\dfrac{1\pm 2}{3}$; $y_1=1$, $y_2=-\dfrac{1}{3}$;

$2^{\frac{x}{2}}=1$; $2^{\frac{x}{2}}=2^0$; $\dfrac{x}{2}=0$; $x=0$. Ответ: 0.

5.59. $3 \cdot 25^x - 8 \cdot 15^x + 5 \cdot 9^x = 0$; $3\cdot\left(\dfrac{25}{9}\right)^x-8\cdot\left(\dfrac{5}{3}\right)^x+5=0$;

$3\cdot\left(\dfrac{5}{3}\right)^{2x}-8\cdot\left(\dfrac{5}{3}\right)^x+5=0$. Пусть $\left(\dfrac{5}{3}\right)^x=y$, $y>0$. Тогда:

$3y^2 - 8y + 5 = 0$; $\frac{D}{4} = 16 - 15 = 1$; $y = \frac{4 \pm 1}{3}$; $y_1 = 1$, $y_2 = \frac{5}{3}$.

1) $\left(\frac{5}{3}\right)^x = 1$; $x = 0$; 2) $\left(\frac{5}{3}\right)^x = \frac{5}{3}$; $x = 1$. Ответ: 0; 1.

5.60. $9^x + 4^x = 2{,}5 \cdot 6^x$; $3^{2x} + 2^{2x} = \frac{5}{2} \cdot 3^x \cdot 2^x$. $1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$.

Пусть $\left(\frac{2}{3}\right)^x = y$, $y > 0$. Тогда: $y^2 - \frac{5}{2}y + 1 = 0$; $2y^2 - 5y + 2 = 0$;

$D=25 - 16 = 9$, $y = \frac{5 \pm 3}{4}$; $y_1 = 2$; $y_2 = \frac{1}{2}$. 1) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 2$, $x = \log_{\frac{2}{3}} 2$;

2) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{1}{2}$, $x = \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{2}$. Ответ: $\log_{\frac{2}{3}} 2$; $\log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{2}$.

5.61. $9^x + 4^{x+1,5} = 6^{x+1}$; $3^{2x} + 4^{1,5} \cdot 2^{2x} = 6 \cdot 2^x \cdot 3^x$.

$1 + 8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x = 0$. Пусть $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$, $t > 0$. Тогда:

$8t^2 - 6t + 1 = 0$; $\frac{D}{4} = 9 - 8 = 1$; $y = \frac{3 \pm 1}{8}$; $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = \frac{1}{4}$.

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{1}{2}$, $x = \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{2}$; 2) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{1}{4}$, $x = \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{4}$.

Ответ: $\log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{2}$; $\log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{4}$.

5.62. $4^{x+1} - 6^x - 2 \cdot 9^{x+1} = 0$; $4 \cdot 2^{2x} - 2^x \cdot 3^x - 2 \cdot 9 \cdot 3^{2x} = 0$.

$4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - \left(\frac{2}{3}\right)^x - 18 = 0$. Пусть $\left(\frac{2}{3}\right)^x = y$, $y > 0$.

Тогда: $4y^2 - y - 18 = 0$; $D = 1 + 288 = 289$.

$y = \frac{1 \pm 17}{8}$; $y_1 = \frac{9}{4}$, $y_2 =$ -2. $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{9}{4}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$; $x =$ -2

Ответ: -2.

5.63. $32^{3(x^2-8)} = 8^{19(2x-x^2)}$; $(2^5)^{3(x^2-8)} = (2^3)^{19(2x-x^2)}$; $2^{15(x^2-8)} = 2^{57(2x-x^2)}$;

$15(x^2 - 8) = 57(2x - x^2)$; $15x^2 - 120 - 114x + 57x^2 = 0$;

$72x^2 - 114x - 120 = 0 \mid : 6$; $12x^2 - 19x - 20 = 0$;

$D = 361 + 960 = 1321$; $x = \frac{19 \pm \sqrt{1321}}{24}$. Ответ: $\frac{19 \pm \sqrt{1321}}{24}$.

5.64. $8^{4(x^2+8)} = 16^{7(x^2+2x)}$; $(2^3)^{4(x^2+8)} = (2^4)^{7(x^2+2x)}$; $2^{12(x^2+8)} = 2^{28(x^2+2x)}$;
$12(x^2+8)=28(x^2+2x)$ |:4; $3(x^2+8) = 7(x^2+2x)$; $3x^2-7x^2-14x+24=0$;
$4x^2+14x-24=0$ |:2; $2x^2+7x-12=0$; $D = 49 + 96 = 145$;

$x = \frac{-7 \pm \sqrt{145}}{4}$. Ответ: $\frac{-7 \pm \sqrt{145}}{4}$.

5.65. $\log_2(x-1) + \log_2 x < 1$; $\log_2(x-1)x < \log_2 2$, т.к. $2 > 1$, то

$\begin{cases} x(x-1) < 2, \\ x-1 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - x - 2 < 0, \\ x > 1; \end{cases}$ $\begin{cases} (x+1)(x-2) < 0, \\ x > 1; \end{cases}$ $\begin{cases} -1 < x < 2, \\ x > 1; \end{cases}$

$1 < x < 2$. Ответ: $(1; 2)$.

5.66. $\log_3(x+2) + \log_3 x > 1$; $\log_3(x+2)x > \log_3 3$, т.к. $3 > 1$, то

$\begin{cases} x(x+2) > 3, \\ x > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + 2x - 3 > 0, \\ x > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} (x+3)(x-1) > 0, \\ x > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x < -3, \ x > 1, \\ x > 0; \end{cases}$

$x > 1$. Ответ: $(1; +\infty)$.

5.67. $\log_2(x+1) + \log_2 x < 1$; $\log_2 x(x+1) < \log_2 2$, т.к. $2 > 1$, то

$\begin{cases} x(x+1) < 2, \\ x > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + x - 2 < 0, \\ x > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} (x+2)(x-1) < 0, \\ x > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} -2 < x < 1, \\ x > 0; \end{cases}$

$0 < x < 1$. Ответ: $(0; 1)$.

5.68. $\lg x + \lg(x-3) > 1$; $\lg x(x-3) > \lg 10$, т.к. $10 > 1$, то

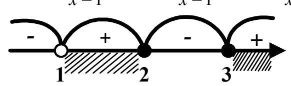
$\begin{cases} x(x-3) > 10, \\ x - 3 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 3x - 10 > 0, \\ x > 3; \end{cases}$ $\begin{cases} (x+2)(x-5) > 0, \\ x > 3; \end{cases}$ $x > 5$.

Ответ: $(5; +\infty)$.

5.69. $\log_{0,5}(4-x) \ge \log_{0,5}2 - \log_{0,5}(x-1)$; $\begin{cases} 4 - x > 0, \\ x - 1 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 4, \\ x > 1; \end{cases}$ $1<x<4$.

$\log_{0,5}(4-x) \ge \log_{0,5}\frac{2}{x-1}$, т.к. $0,5 < 1$, то

$4 - x \le \frac{2}{x-1}$; $4 - x - \frac{2}{x-1} \le 0$; $\frac{x^2-5x+6}{x-1} \ge 0$; $\frac{(x-2)(x-3)}{x-1} \ge 0$.



$x \in \{(1;2] \cup [3;+\infty)\} \cap (1;4)$.
Ответ: $x \in (1; 2] \cup [3; 4)$.

5.70. $\log_3(x^2 - 7x + 12) < \log_3 20$;

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 12 > 0, \\ x^2 - 7x + 12 < 20; \end{cases} \quad \begin{cases} (x-3)(x-4) > 0, \\ (x+1)(x-8) < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < 3, \\ x > 4, \end{array}\right. \\ -1 < x < 8; \end{cases}$$

$x \in (-1; 3) \cup (4; 8)$. Ответ: $(-1; 3) \cup (4; 8)$.

5.71. $\log_{0,3}(x^2 + x + 31) < \log_{0,3}(10x + 11)$, т.к. $0 < 0{,}3 < 1$, то

$$\begin{cases} x^2 + x + 31 > 10x + 11, \\ 10x + 11 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 9x + 20 > 0, \\ x > -\dfrac{11}{10}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 5, \\ x < 4, \end{array}\right. \\ x > -\dfrac{11}{10}; \end{cases} \quad x \in \left(-\frac{11}{10}; 4\right) \cup (5; +\infty). \text{ Ответ: } \left(-\frac{11}{10}; 4\right) \cup (5; +\infty).$$

5.72. $-\log_2(x^2 + 3x) \geq 0$;

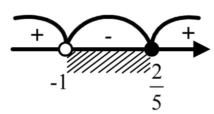
$\log_2(x^2 + 3x) \leq 0$; $\log_2(x^2 + 3x) \leq \log_2 1$, т.к. $2 > 1$, то

$$\begin{cases} x^2 + 3x - 1 \leq 0, \\ x^2 + 3x > 0; \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} x^2 + 3x - 1 = 0, \\ D = 9 + 4 = 13, \\ x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}. \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \dfrac{-3 - \sqrt{13}}{2} \leq x \leq \dfrac{-3 + \sqrt{13}}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x < -3, \\ x > 0; \end{array}\right. \end{cases} \quad x \in \left[\frac{-3 - \sqrt{13}}{2}; -3\right) \cup \left(0; \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}\right]$$

Ответ: $\left[\dfrac{-3 - \sqrt{13}}{2}; -3\right) \cup \left(0; \dfrac{-3 + \sqrt{13}}{2}\right]$.

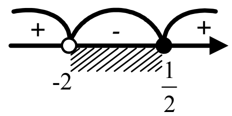
5.73. $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{6 - x}{x + 1} \leq -2$;



$\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{6 - x}{x + 1} \leq \log_{\frac{1}{2}} 4$, т.к. $0 < \dfrac{1}{2} < 1$,

то $\dfrac{6 - x}{x + 1} \geq 4$; $\dfrac{2 - 5x}{x + 1} \geq 0$; $\dfrac{x - \frac{2}{5}}{x + 1} \leq 0$. Ответ: $\left(-1; \dfrac{2}{5}\right]$.

5.74. $\log_3\frac{8-x}{x+2}\ge 1$; $\log_3\frac{8-x}{x+2}\ge\log_3 3$, т.к. $3>1$, то $\frac{8-x}{x+2}\ge 3$;



$\frac{2-4x}{x+2}\ge 0$; $\frac{4\left(\frac{1}{2}-x\right)}{x+2}\ge 0$; $\frac{x-\frac{1}{2}}{x+2}\le 0$.

Ответ: $\left(-2;\ \frac{1}{2}\right]$.

5.75. $\log_2\frac{6+x}{x-3}<2$; $\log_2\frac{6+x}{x-3}<\log_2 4$, т.к. $2>1$, то

$\begin{cases}\frac{6+x}{x-3}<4,\\ \frac{6+x}{x-3}>0;\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{18-3x}{x-3}<0,\\ \frac{6+x}{x-3}>0;\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{x-6}{x-3}>0,\\ \frac{6+x}{x-3}>0;\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<3,\\ x>6,\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x<-6,\\ x>3.\end{array}\right.\end{cases}$

Ответ: $(-\infty; -6)\cup(6; +\infty)$.

5.76. $\log_{\frac{1}{3}}\frac{3x+1}{x-2}>-1$; $\log_{\frac{1}{3}}\frac{3x+1}{x-2}>\log_{\frac{1}{3}}3$, т.к. $0<\frac{1}{3}<1$, то

$\begin{cases}\frac{3x+1}{x-2}<3,\\ \frac{3x+1}{x-2}>0;\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{7}{x-2}<0,\\ \frac{3\left(x+\frac{1}{3}\right)}{x-2}>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x<2,\\ \left[\begin{array}{l}x<-\frac{1}{3},\\ x>2;\end{array}\right.\end{cases}$ $x<-\frac{1}{3}$. Ответ: $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)$.

5.77. $\begin{cases}3^x\cdot 2^y=\frac{1}{9},\\ y-x=2;\end{cases}$ $\begin{cases}3^x\cdot 2^y=\frac{1}{9},\\ y=2+x;\end{cases}$ $\begin{cases}3^x\cdot 2^{x+2}=\frac{1}{9},\\ y=2+x;\end{cases}$ $\begin{cases}4\cdot 6^x=\frac{1}{9},\\ y=2+x;\end{cases}$

$\begin{cases}6^x=6^{-2},\\ y=2+x;\end{cases}$ $\begin{cases}x=-2,\\ y=0.\end{cases}$ Ответ: (-2; 0).

5.78. $\begin{cases}2^y=200\cdot 5^x,\\ x+y=1;\end{cases}$

$\begin{cases}x=1-y,\\ 2^y=200\cdot 5^{1-y};\end{cases}$ $\begin{cases}x=1-y,\\ 2^y=200\cdot 5\cdot\frac{1}{5^y},\end{cases}$ $5^y>0$ при всех значениях x;

$\begin{cases}x=1-y,\\ 10^y=10^3;\end{cases}$ $\begin{cases}x=-2,\\ y=3.\end{cases}$ Ответ: (-2; 3).

5.79. $\begin{cases} 7^{x+1}\cdot 2^{y}=4, \\ y-x=3; \end{cases}$ $\begin{cases} y=x+3, \\ 7^{x+1}\cdot 2^{x+3}=4; \end{cases}$ $\begin{cases} y=x+3, \\ 14^{x+1}\cdot 4=4; \end{cases}$ $\begin{cases} x+1=0, \\ y=x+3; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1, \\ y=2. \end{cases}$

Ответ: (-1; 2).

5.80. $\begin{cases} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x}\cdot 5^{y}=75, \\ x+y=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=1-y, \\ 3^{y-1}\cdot 5^{y}=75; \end{cases}$ $\begin{cases} x=1-y, \\ \dfrac{1}{3}\cdot 15^{y}=75; \end{cases}$ $\begin{cases} y=2, \\ x=-1. \end{cases}$

Ответ: (-1; 2).

5.81. $\begin{cases} 5^{x-1}\cdot 7^{y}=\dfrac{1}{7}, \\ y-x=-2; \end{cases}$ $\begin{cases} y=x-2, \\ 5^{x-1}\cdot 7^{x-2}=\dfrac{1}{7}; \end{cases}$ $\begin{cases} y=x-2, \\ 5^{x-1}\cdot 7^{x-1}\cdot\dfrac{1}{7}=\dfrac{1}{7}; \end{cases}$

$\begin{cases} y=x-2, \\ 35^{x-1}=35^{0}; \end{cases}$ $\begin{cases} x=1, \\ y=-1. \end{cases}$ Ответ: (1; -1).

5.82. $\begin{cases} \left(\dfrac{1}{7}\right)^{x}\cdot 3^{y}=63, \\ y+x=1; \end{cases}$ $x=1-y.$ $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{x}\cdot 3^{y}=63;$ $\dfrac{1}{7}\cdot 7^{y}\cdot 3^{y}=63;$

$21^{y}=21^{2}$; $y=2$, тогда: $x=-1$. Ответ: (-1; 2).

Производная и ее приложения

5.83. $y=\dfrac{x+1}{x-3}$, $k=-1$

$$y'(x)=\frac{(x+1)'(x-3)-(x+1)(x-3)'}{(x-3)^2}=\frac{x-3-x-1}{(x-3)^2}=-\frac{4}{(x-3)^2};$$

$$y'(x_0)=-\frac{4}{(x_0-3)^2};\quad -\frac{4}{(x_0-3)^2}=-1;\quad (x_0-3)^2=4,\ x_0\neq 3;$$

$x_0^2-6x_0+9-4=0$; $x_0^2-6x_0+5=0$; $x_{01}=1$, $x_{02}=5$.

а) $x_0=1$, $y(x_0)=-1$, $y'(x_0)=-1$; $y=-1-1(x-1)$; $y=-x$;

б) $x_0=5$, $y(x_0)=3$, $y'(x_0)=-1$; $y=3-1(x-5)$; $y=-x+8$.

а) $-x=0$; $x=0$; б) $-x+8=0$; $x=8$. Ответ: (0; 0), (8; 0).

5.84. $y=\dfrac{2x-3}{x+3}$, $k=9$; $y'(x)=\dfrac{(2x-3)'(x+3)-(2x-3)(x+3)'}{(x+3)^2}=$

$$=\frac{2(x+3)-(2x-3)\cdot 1}{(x+3)^2}=\frac{2x+6-2x+3}{(x+3)^2}=\frac{9}{(x+3)^2};$$

$$y'(x_0)=\frac{9}{(x_0+3)^2};\quad \frac{9}{(x_0+3)^2}=9;\quad (x_0+3)^2=1,\ x_0\neq -3;$$

$x_0^2 + 6x_0 + 8 = 0$; $x_{01} = -2$, $x_{02} = -4$.
2) а) $x_0 = -2$; $y(x_0) = -7$; $y'(x_0) = 9$; $y = -7 + 9(x + 2)$; $y = 9x + 11$;
б) $x_0 = -4$; $y(x_0) = 11$; $y'(x_0) = 9$; $y = 11 + 9(x + 4)$; $y = 9x + 47$.

3) $y = 0$; а) $9x + 11 = 0$; $x = -1\frac{2}{9}$; б) $9x + 47 = 0$; $x = -5\frac{2}{9}$;

4) $x = 0$; а) $y = 9 \cdot 0 + 11 = 11$; б) $y = 9 \cdot 0 + 47 = 47$;

Ответ: $\left(-1\frac{2}{9};\ 0\right)$, $\left(-5\frac{2}{9};\ 0\right)$; (0; 11), (0; 47).

5.85. $y = \frac{3x-1}{x+8}$, $k = 1$.

1) $y'(x) = \frac{(3x-1)'(x+8)-(3x-1)(x+8)'}{(x+8)^2} = \frac{3(x+8)-3x+1}{(x+8)^2} = \frac{25}{(x+8)^2}$;

$\frac{25}{(x_0+8)^2} = 1$; $(x_0 + 8)^2 = 25$, $x_0^2 + 16x_0 + 39 = 0$; $x_{01} = -3$, $x_{02} = -13$.

2) а) $x_0 = -3$; $y(x_0) = \frac{3\cdot(-3)-1}{-3+8} = -2$, $y'(x_0) = 1$;

$y = -2 + 1(x + 3)$; $y = x + 1$;

б) $x_0 = -13$; $y(x_0) = \frac{3\cdot(-13)-1}{-13+8} = 8$; $y = 8 + x + 13$; $y = x + 21$.

3) $x = 0$; а) $y = 1$; б) $y = 21$. Ответ: (0; 1), (0; 21).

5.86. $y = \frac{2x-2}{x+1}$, $k = 4$.

1) $y'(x) = \frac{(2x-2)'(x+1)-(2x-2)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{2(x+1)-2x+2}{(x+1)^2} =$

$= \frac{4}{(x+1)^2}$; $\frac{4}{(x_0+1)^2} = 4$; $(x_0 + 1)^2 = 1$; $x_0^2 + 2x_0 = 0$;

$x_{01} = 0$, $x_{02} = -2$.
2) а) $x_0 = 0$; $y(x_0) = -2$; $y'(x_0) = 4$; $y = -2 + 4x$;
б) $x_0 = -2$; $y(x_0) = 6$; $y'(x_0) = 4$; $y = 4x + 14$.

3) $y = 0$; а) $4x - 2 = 0$, $x = \frac{1}{2}$; б) $4x + 14 = 0$, $x = -3\frac{1}{2}$;

4) $x = 0$; а) $y = 4 \cdot 0 - 2 = -2$; б) $y = 4 \cdot 0 + 14 = 14$;

Ответ: $\left(\frac{1}{2};\ 0\right)$, $\left(-3\frac{1}{2};\ 0\right)$; (0; -2), (0; 14).

5.87. $y = \dfrac{x+4}{x-5}$, $k = -1$.

$$y'(x) = \frac{(x+4)'(x-5)-(x+4)(x-5)'}{(x-5)^2} = \frac{x-5-x-4}{(x-5)^2} = -\frac{9}{(x-5)^2};$$

$-\dfrac{9}{(x_0-5)^2} = -1$; $x_0^2 - 10x_0 + 16 = 0$, $x_0 \neq 5$; $x_{01} = 2$, $x_{02} = 8$.

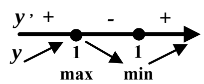
2) а) $x_0 = 2$; $y(2) = -2$; $y'(2) = -1$; $y = -2 - 1 \cdot (x-2)$; $y = -x$;
б) $x_0 = 8$; $y(8) = 4$; $y'(8) = -1$; $y = 4 - (x-8)$; $y = -x + 12$.
3) $x = 0$; а) $y = 0$; б) $y = 0 + 12 = 12$; Ответ: (0; 0), (0; 12).

5.88. $y = \dfrac{3x-5}{x-3}$, $k = 25$.

$$y'(x) = \frac{(3x-5)'(x-3)-(3x-5)(x-3)'}{(x-3)^2} = \frac{3x-9-3x+5}{(x-3)^2} = -\frac{4}{(x-3)^2};$$

$-\dfrac{4}{(x_0-3)^2} = 25$; решений нет. Ответ: искомых координат – нет.

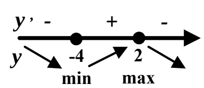
5.89. $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$, $\left(-\dfrac{6}{5};\ 2\right)$;



$y' = 3x^2 - 12x + 9$;
$x^2 - 4x + 3 = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

$1 \in \left(-\dfrac{6}{5};\ 2\right)$, $3 \notin \left(-\dfrac{6}{5};\ 2\right)$. Ответ: $x = 1$.

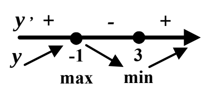
5.90. $y = -x^3 - 3x^2 + 24x - 4$, $\left(-5;\ \dfrac{1}{5}\right)$;



$y' = -3x^2 - 6x + 24$; $x^2 + 2x - 8 = 0$; $x_1 = -4$, $x_2 = 2$.

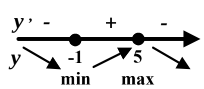
$-4 \in \left(-5;\ \dfrac{1}{5}\right)$, $2 \notin \left(-5;\ \dfrac{1}{5}\right)$. Ответ: $x = -4$.

5.91. $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 4$;



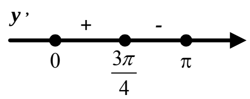
$y'(x) = 3x^2 - 6x - 9$. $D(y') = R$;
$x^2 - 2x - 3 = 0$; $x_1 = 3$, $x_2 = -1$.
$x_{max} = -1$, $y_{max} = y(-1) = 1$;
$x_{min} = 3$, $y_{min} = y(3) = -31$. Ответ: 1; -31.

5.92. $y = -x^3 + 6x^2 + 15x + 1$;



$y' = -3x^2 + 12x + 15$; $x^2 - 4x - 5 = 0$;
$x_1 = 5$, $x_2 = -1$. $x_{min} = -1$, $y(-1) = -7$;
$x_{max} = 5$, $y(5) = 101$. Ответ: -7; 101.

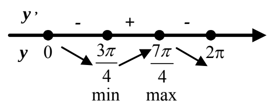
5.93. $y = \sin x - \cos x$, $[0;\ \pi]$;



$y' = \cos x + \sin x$;
$\cos x + \sin x = 0$.
$1+\text{tg}\, x=0$; $\text{tg}\, x = -1$; $x = -\text{arctg}1 + \pi n$,
$n \in Z$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$.

Отрезку $[0;\pi]$ принадлежат $x = \frac{3\pi}{4}$. (при $n = 1$), Ответ: $x_{\max} = \frac{3\pi}{4}$.

5.94. $y = \cos x - \sin x$, $[0;\ 2\pi]$; $y' = -\sin x - \cos x$;

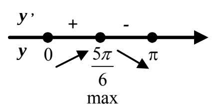


$-\text{tg}\, x - 1 = 0$; $\text{tg}\, x = -1$;
$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$.
При n=1, $x = \frac{3\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4} \in [0;\ 2\pi]$.

При $n = 2$, $x = \frac{7\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4} \in [0;\ 2\pi]$. $x_{\max} = \frac{7\pi}{4}$, $x_{\min} = \frac{3\pi}{4}$.

Ответ: $\frac{7\pi}{4}$ - точка максимума; $\frac{3\pi}{4}$ - точка минимума.

5.95. $y = \sin x - \sqrt{3}\cos x$, $[0;\ \pi]$; $y' = \cos x + \sqrt{3}\sin x$;

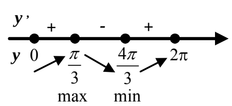


$1 + \sqrt{3}tgx = 0$; $tgx = -\frac{1}{\sqrt{3}}$,
$x = -\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$. $x = \frac{5\pi}{6}$ (при $n = 1$).

$$y_{\max} = y\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}\cos\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2} - \sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2.$$

Ответ: $y_{\max} = 2$.

5.96. $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x$, $[0;\ 2\pi]$; $y' = \sqrt{3}\cos x - \sin x$;



$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0$. $\cos x \neq 0$.
$\sqrt{3} - tgx = 0$; $tgx = \sqrt{3}$,
$x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$.

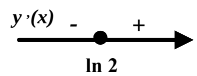
При $n = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3} \in [0;\ 2\pi]$. При $n = 1$, $x = \frac{4\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3} \in [0;\ 2\pi]$.

$x_{\max} = \frac{\pi}{3}$, $y_{\max} = y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = 2.$

$x_{\min} = \frac{4\pi}{3}$, $y_{\min} = y\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) = -2.$

Ответ: $y_{\max} = 2$; $y_{\min} = -2$.

5.97. $y = x + 2e^{-x}$; $D(y) = R$;



$y' = 1 - 2e^{-x}$; $D(y') = R$;

$y'(x) = 0$, если $1 - 2e^{-x} = 0$; $e^{-x} = \frac{1}{2}$;

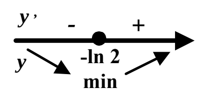
$-x = \ln\frac{1}{2}$; $x = -\ln\frac{1}{2}$; $\left(\ln\frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = 0 - \ln 2 = -\ln 2\right)$; $x = \ln 2$.

Значит, $x = \ln 2$ – точка минимума. Ответ: $x_{\min} = \ln 2$.

5.98. $y = 2x + 3e^{-x}$; $y' = 2 - 3e^{-x}$; $2 - 3e^{-x} = 0$; $e^{-x} = 2/3$; $-x = \ln 2/3$;

$x = \ln 3/2$. Ответ: $x = \ln 3/2$ – точка минимума.

5.99. $y = -x + 2e^{x}$; $y' = -1 + 2e^{x}$;



$-1 + 2e^{x} = 0$; $2e^{x} = 1$; $e^{x} = \frac{1}{2}$; $x = \ln\frac{1}{2}$;

$x = \ln 1 - \ln 2$; $x = -\ln 2$.

$x_{\min} = -\ln 2$.

$y_{\min} = y(-\ln 2) = -(-\ln 2) + 2 \cdot e^{-\ln 2} = \ln 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 + \ln 2.$

Ответ: $(-\ln 2;\ 1 + \ln 2)$ – минимум.

5.100. $y = -3x + 2e^{-x}$;

$y' = -3 - 2e^{-x} = 2e^{-x} - 3 = 0$; $e^{-x} = 3/2$; $-x = \ln 3/2$; $x = \ln 2/3$.

$y(\ln\frac{2}{3}) = -3\ln\frac{2}{3} - 2 \cdot e^{\ln\frac{3}{2}} = -3(1 + \ln\frac{2}{3})$. Ответ: $y_{\max} = -3(1 + \ln\frac{2}{3})$.

Раздел 6. Задания 9, 10 для экзамена «Алгебра и начала анализа»

Уравнения

6.1. $\log_{x+1}(x^2 + x - 6)^2 = 4$; $\log_{x+1}|x^2 + x - 6| = 2$; $\log_{x+1}|x^2 + x - 6| = 2$;

$$\begin{cases} x+1>0, \\ x+1\neq 1, \\ \left|x^2+x-6\right| = (x+1)^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x>-1, \\ x\neq 0, \\ \left|x^2+x-6\right| = x^2+2x+1. \end{cases}$$

$|x^2 + x - 6| = x^2 + 2x - 1$.

1) $x^2 + x - 6 \geq 0$; $x \in (-\infty; 3] \cup [2; \infty)$; $x^2 + x - 6 = x^2 + 2x + 1$; $x = -7$.

2) $x^2 + x - 6 < 0$; $x \in (-3; 2)$; $-x^2 - x + 6 = x^2 + 2x + 1$;

$2x^2 + 3x - 5 = 0$; $D = 49$; $x_1 = 1, x_2 = -2{,}5$. Ответ: 1.

6.2. $\log_5(x - 8)^2 = 2 + 2\log_5(x - 2)$; $\log_5(x-8)^2 = \log_5 25 + \log_5(x - 2)^2$;

$(x - 8)^2 = 25 \cdot (x - 2)^2$; $x^2 - 16x + 64 = 25x^2 - 100x + 100$;

$24x^2 - 84x + 36 = 0$; $2x^2 - 7x + 3 = 0$; $D = 25$; О.Д.З. $x \neq 8$; $x > 2$

$x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{2}$. – не подходит в О.Д.З. Ответ: 3.

6.3. $\log_{9x^2}\left(6+2x-x^2\right) = \frac{1}{2}$;

$$\begin{cases} 6+2x-x^2>0, \\ 9x^2\neq 1, \\ 6+2x-x^2 = \left(9x^2\right)^{\frac{1}{2}}; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-2x-6<0, \\ x\neq \pm\frac{1}{3}, \\ 6+2x-x^2 = 3|x|. \end{cases}$$

$6 + 2x - x^2 = 3|x|$.

1) $x \geq 0$; $6 + 2x - x^2 = 3x$; $x^2 + x - 6 = 0$; $x_1 = -3$, $x_2 = 2$. Значит, $x = 2$.

2) $x < 0$; $6 + 2x - x^2 = -3x$; $x^2 - 5x - 6 = 0$; $x_1 = 6$, $x_2 = -1$. Значит, $x = -1$.

Ответ: 2; -1.

6.4. $\log_{x-3}(x^2 - 4x)2 = 4$; $2\log_{x-3}|x^2 - 4x| = 4$; $\log_{x-3}|x^2 - 4x| = 2$;

$$\begin{cases} x-3>0, \\ x-3\neq 1, \\ \left|x^2-4x\right| = (x-3)^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x>3, \\ x\neq 4, \\ \left|x^2-4x\right| = (x-3)^2; \end{cases}$$

1) $x^3 - 4x > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;0) \cup (4;\infty)$. $x^2 - 4x = x^2 - 6x + 9$; $x = 4{,}5$;

2) $x^2 - 4x < 0 \Leftrightarrow x \in (0;4)$. $4x - x^2 = x^2 - 6x + 9$;

$2x^2 - 10x + 9 = 0$; $x = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}$; $\frac{5-\sqrt{7}}{2} < 3$. $x_1 = 4{,}5$; $x_2 = \frac{5+\sqrt{7}}{2}$.

Ответ: $x_1 = 4{,}5$; $x_2 = \frac{5+\sqrt{7}}{2}$.

6.5. $\log_3(3^x - 8) = 2 - x$;

$\begin{cases} 3^x - 8 > 0, \\ 3^x - 8 = 3^{2-x}; \end{cases}$ $3^x - 8 = 3^{2-x}$, $3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$;

сделаем замену $3^x = t$, $t > 0$: $t^2 - 8t - 9 = 0$; $t_1 = 9$, $t_2 = -1$.
$t > 0 \Rightarrow 3^x = 9$; $3^x = 3^2$; $x = 2$. Ответ: 2.
6.6. $\log_7(7^{-x} + 6) = 1 + x$; $7^{-x} + 6 = 7^{1+x}$; $1 + 6 \cdot 7^x - 7 \cdot 7^{2x} = 0$, замена

$7^x = t$, $t > 0$; $7t^2 - 6t - 1 = 0$; $t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{1}{7}$; $t = 1$;

$7^x = 1$; $7^x = 7^0$; $x = 0$. Ответ: 0.
6.7. $\log_2(2^x - 7) = 3 - x$; $2^x - 7 = 2^{3-x}$; $2^{2x} - 7 \cdot 2^x - 8 = 0$; сделаем замену $2^x = t$, $t > 0$; $t^2 - 7t - 8 = 0$; $t_1 = 8$, $t_2 = -1$; $2^x=8$; $2^x = 2^3$; $x = 3$.
Ответ: 3.
6.8. $\log_4(4^{-x} + 3) = x + 1$. $4^{-x} + 3 = 4^{x+1}$; $1 + 3 \cdot 4^x = 4 \cdot 4^{2x}$;
Пусть $t = 4^x$, $t > 0$; $4t^2 - 3t - 1 = 0$; $t_1 = -1/4 < 0$; $t_2 = 1$; $4^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$
Ответ: $x = 0$.
6.9. $\log_6(6^{-x} + 5) = 1 + x$; $6^{-x} + 5 = 6^{1+x}$; $6 \cdot 6^{2x} - 5 \cdot 6^x - 1 = 0$,

пусть $6^x = t$, $t > 0$; $6t^2 - 5t - 1 = 0$; $t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{1}{6}$; $6^x=1$; $6^x=6^0$; $x = 0$.

Ответ: 0.
6.10. $\log_5(5^x - 4) = 1 - x$; $5^x - 4 = 5^{1-x}$; $5^{2x} - 4 \cdot 5^x - 5 = 0$; $5^x = t$, $t > 0$;
$t^2 - 4t - 5 = 0$; $t_1 = 5$, $t_2 = -1$; $5^x = 5$; $x = 1$. Ответ: 1.
6.11. $2\log_7(x - 2) = -2 + \log_7(x - 10)^2$;

$\log_7(x-2)^2 = \log_7\left(\frac{1}{49}(x-10)^2\right)$, $x > 2$, $x \neq 10$;

$49(x - 2)^2 = (x - 10)^2$; $49x^2 - 196x + 196 = x^2 - 20x + 100$;

$48x^2 - 176x + 96 = 0$; $3x^2 - 11x + 6 = 0$; $D = 49$; $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = 3$.

Ответ: 3.

6.12. $\log_{(x-6)^2}\left(x^2 - 5x + 9\right) = \frac{1}{2}$; $x^2 - 5x + 9 = |x - 6|$, $(x - 6)^2 \neq 0$,

$(x - 6)^2 \neq 1$. Значит, $x \neq 6$, $x \neq 7$, $x \neq 5$.
1) $x > 6$; $x^2 - 5x + 9 = x - 6$; $x^2 - 6x + 15 = 0$;

$\frac{D}{4} = -6 < 0$, корней нет;

2) $x<6$; $x^2–5x + 9 = -x + 6$; $x^2 - 4x + 3 = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Ответ: 1; 3.

6.13. $(2x^2 - 5x + 2)(\log_{2x}18x + 1) = 0$; О.Д.З. $x > 0$; $x \neq 1/2$.

1) $2x^2 - 5x + 2 = 0$; $x_1 = ½$; $x_2 = 2$. Подставляя в О.Д.З имеем: $x = 2$.

2) $\log_{2x}18x + 1 = 0; 18x = \frac{1}{2x}; x^2 = \frac{1}{36}; x = \pm\frac{1}{6}$. Ответ: 2; $\frac{1}{6}$.

6.14. $\left(x^2 - 7x + 10\right)\left(\log_{\frac{x}{2}} 8x + 1\right) = 0$; $\left(x^2 - 7x + 10\right)\left(\log_{\frac{x}{2}} 16 + 2\right) = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 7x + 10 = 0, \\ x > 0, \\ x \neq 2, \end{cases} \\ \log_{\frac{x}{2}} 16 = -2; \end{array}\right. \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 5, \\ x = 2, \end{array}\right. \\ x > 0, \\ x \neq 2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 2, \\ \left(\frac{x}{2}\right)^{-2} = 16; \end{cases}$$

$x = 5$ или $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 2, \\ x^2 = \frac{1}{4}; \end{cases}$ $x = 5$ или $x = \frac{1}{2}$. Ответ: 5; $\frac{1}{2}$.

6.15. $(2x - 3)\sqrt{3x^2 - 5x - 2} = 0$,

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - 3 = 0, \\ 3x^2 - 5x - 2 \geq 0, \end{cases} \\ 3x^2 - 5x - 2 = 0; \end{array}\right. \quad \begin{cases} x = \frac{3}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x \geq 2, \\ x \leq -\frac{1}{3}, \end{array}\right. \end{cases} \quad \text{или } x = 2, \text{ или } x = -\frac{1}{3};$$

$x = 2$ или $x = -1/3$. Ответ: 2; $-1/3$.

6.16. $(2x^2 - 3x - 2)\sqrt{3x + 1} = 0$.

1) $\begin{cases} 2x^2 - 3x - 2 = 0, \\ 3x + 1 \geq 0 \end{cases}$ или 2) $3x + 1 = 0$.

1) $2x^2 - 3x - 2 = 0$; 2) $x = -\frac{1}{3}$.

$D = 25$; $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{1}{2} < -\frac{1}{3}$; Ответ: 2; $-\frac{1}{3}$.

6.17. $(6x-5)\sqrt{2x^2-5x+2}=0.$

1) $\begin{cases}6x-5=0,\\2x^2-5x+2\ge 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x=\dfrac{5}{6},\\2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(x-2)\ge 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x=\dfrac{5}{6},\\\left[\begin{array}{l}x\le\dfrac{1}{2},\\x\ge 2.\end{array}\right.\end{cases}$

Система решений не имеет.

2) $2x^2-5x+2=0$; $D=9$; $x_1=\dfrac{1}{2}$, $x_2=2$. Ответ: 2; $\dfrac{1}{2}$.

6.18. $(3x^2-x-2)\sqrt{2x-1}=0.$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x^2-x-2=0,\\2x-1\ge 0,\end{cases}\\2x-1=0;\end{array}\right.$ $3x^2-x-2=0$; $D=25$; $x_1=1$, $x_2=-\dfrac{2}{3}.$

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=1,\\x=-\dfrac{2}{3},\end{array}\right.\\x\ge\dfrac{1}{2}\end{cases}$ или $x=\dfrac{1}{2}$; $x=1$ или $x=\dfrac{1}{2}$; Ответ: 1; $\dfrac{1}{2}$.

6.19. $(7x+2)\sqrt{4x-3x^2-1}=0.$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}7x+2=0,\\4x-3x^2-1\ge 0,\end{cases}\\4x-3x^2-1=0;\end{array}\right.$ $4x-3x^2-1=0$; $3x^2-4x+1=0$; $x_1=1$, $x_2=\dfrac{1}{3}$;

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-\dfrac{2}{7},\\3(x-1)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)\le 0,\end{cases}\\x=1,\\x=\dfrac{1}{3};\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-\dfrac{2}{7},\\x\in\left[\dfrac{1}{3};1\right],\end{cases}\\x=1,\\x=\dfrac{1}{3};\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=1,\\x=\dfrac{1}{3}.\end{array}\right.$

Ответ: 1; $\dfrac{1}{3}$.

6.20. $(3x - x^2 - 2)\sqrt{7x+4} = 0;$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x - x^2 - 2 = 0, \\ 7x + 4 \ge 0, \end{cases} \\ 7x + 4 = 0; \end{array}\right.$ $3x - x^2 - 2 = 0$; $x^2 - 3x + 2 = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = 2$;

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 2, \end{array}\right. \\ x \ge -\dfrac{4}{7}, \end{cases} \\ x = -\dfrac{4}{7}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 2, \\ x = -\dfrac{4}{7}. \end{array}\right.$ Ответ: 1; 2; $-\dfrac{4}{7}$.

6.21. $(3x+4)\sqrt{-3x - 2x^2 - 1} = 0;$

$\begin{cases} 3x + 4 = 0, \\ -3x - 2x^2 - 1 \ge 0 \end{cases}$ или $-3x - 2x^2 - 1 = 0$; $-3x - 2x^2 - 1 = 0$;

$2x^2 + 3x + 1 = 0$; $D = 1$; $x_1 = -1$, $x_2 = -\dfrac{1}{2}$;

$\begin{cases} x = -\dfrac{4}{3}, \\ 2(x+1)\left(x + \dfrac{1}{2}\right) \le 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = -\dfrac{4}{3}, \\ x \in \left[-1; -\dfrac{1}{2}\right], \end{cases}$ Ответ: -1; $-\dfrac{1}{2}$.

6.22. $(4x - x^2 - 3)\sqrt{5x-8} = 0;$

$\begin{cases} 4x - x^2 - 3 = 0, \\ 5x - 8 \ge 0 \end{cases}$ или $5x - 8 = 0$; $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0, \\ x \ge \dfrac{8}{5} \end{cases}$ или $x = \dfrac{8}{5}$;

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = 1, \end{array}\right. \\ x \ge \dfrac{8}{5} \end{cases}$ или $x = \dfrac{8}{5}$; $x = 3$ или $x = \dfrac{8}{5}$. Ответ: 3; 1,6.

6.23. $1 + \sin 3x = \left(\cos\dfrac{x}{2} - \sin\dfrac{x}{2}\right)^2;$

$1 + \sin 3x = \cos^2\dfrac{x}{2} - 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} + \sin^2\dfrac{x}{2};$

$\sin 3x + \sin x = 0$; $2\cos x \cdot \sin 2x = 0$; $\cos x = 0$ или $\sin 2x = 0$;

$x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z;$ $\qquad 2x = \pi k;$ $x=\frac{\pi}{2}k, k\in Z.$

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}m, m\in Z.$

6.24. $2\sin^2 2x = (\cos x + \sin x)^2;$ $2\sin^2 2x - \sin 2x - 1 = 0;$

$\sin 2x = 1$ или $\sin 2x = -\frac{1}{2};$ $\quad 2x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z;$

$2x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z;$ $x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z;$ $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k, k\in Z.$

Ответ: $\frac{\pi}{4}(1+4n);$ $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k,$ $n, k \in Z.$

6.25. $\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0;$

$(\cos 9x - \cos x)-(\cos 7x - \cos 3x) = 0;$ $-2\sin 5x \cdot \sin 4x + 2\sin 5x \cdot \sin 2x = 0;$

$\sin 5x(\sin 4x - \sin 2x) = 0;$

$\sin 5x = 0$ или $\sin 4x - \sin 2x = 0;$

$5x = \pi m, m \in Z;$ $\qquad 2\cos 3x \sin x = 0;$

$x=\frac{\pi}{5}m, m\in Z;$ $\qquad \cos 3x = 0,$ $x=\frac{\pi}{6}(1+2n), n\in Z;$

или $\sin x = 0,$ $x = \pi k, k \in Z.$

Ответ: $\frac{\pi}{5}m;$ $\frac{\pi}{6}(1+2n),$ $n, m \in Z.$

6.26. $\cos 7x+\sin 8x=\cos 3x-\sin 2x;$ $(\cos 7x - \cos 3x) + (\sin 8x + \sin 2x) = 0;$

$-2\sin 5x \sin 2x + 2\sin 5x \cos 3x = 0;$ $\sin 5x(\sin 2x - \cos 3x) = 0;$

$\sin 5x = 0$ или $\sin 2x - \cos 3x = 0;$

$5x = \pi m, m \in Z;$ $\qquad \sin 2x - \sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=0;$

$x=\frac{\pi}{5}m, m\in Z;$ $\qquad 2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{5x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0;$

1) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=0;$ $x=\frac{3}{2}\pi+2\pi k, k\in Z;$

2) $\sin\left(\frac{5x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0;$ $x=\frac{\pi}{10}+\frac{2}{5}\pi n, n\in Z.$

Ответ: $\frac{\pi}{5}m;$ $\frac{\pi}{10}+\frac{2}{5}\pi n;$ $\frac{3\pi}{2}+2\pi k$, $m, n, k \in Z.$

6.27. $\sin x - \sin 2x + \sin 5x + \sin 8x = 0$; $(\sin x + \sin 5x) + (\sin 8x - \sin 2x) = 0$;
$2\sin 3x \cos 2x + 2\sin 3x \cos 5x = 0$; $\sin 3x(\cos 2x + \cos 5x) = 0$;
$\sin 3x = 0$ или $\cos 2x + \cos 5x = 0$;

$3x = \pi m,\ m \in Z$; $2\cos\frac{7}{2}x\cos\frac{3}{2}x = 0$; $x = \frac{\pi}{3}m, m \in Z$;

1) $\cos\frac{7}{2}x = 0$; $\frac{7}{2}x = \frac{\pi}{2} + \pi k$; $x = \frac{\pi}{7} + \frac{2}{7}\pi k, k \in Z$;

2) $\cos\frac{3}{2}x = 0$; $\frac{3}{2}x = \frac{\pi}{2} + \pi n$; $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi n, n \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{3}m$; $\frac{\pi}{7}(1+2k)$, $m, k \in Z$.

6.28. $\sin x + \sin 3x - \sin 5x - \sin 7x = 0$; $\sin x + \sin 3x - (\sin 5x + \sin 7x) = 0$;
$\cos x(\sin 2x - \sin 6x) = 0$;
$\cos x = 0$ или $\sin 2x - \sin 6x = 0$;

$x = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in Z$; $-2\cos 4x \sin 2x = 0$;

$\cos 4x = 0$; $x = \frac{\pi}{8}(1+2n), n \in Z$;

или $\sin 2x = 0$; $x = \frac{\pi}{2}k, k \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{8}(1+2n)$; $\frac{\pi}{2}k$, где $k, n \in Z$.

6.29. $\cos 2x + \cos 6x + 2\sin^2 x = 1$; $\cos 2x + \cos 6x = 1 - 2\sin^2 x$;

$\cos 2x + \cos 6x = \cos 2x$; $\cos 6x = 0$; $6x = \frac{\pi}{2} + \pi m$; $x = \frac{\pi}{12}(1+2m)$, $m \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{12}(1+2m)$, $m \in Z$.

6.30. $4\cos x \cdot \sin x + (\text{tg}\, x + \text{ctg}\, x) = 0$; $2\sin 2x + \frac{1}{\sin x \cos x} = 0$;

$2\sin^2 2x + 2 = 0$; $1 - \cos 4x = -2$; $\cos 4x = 3$ – нет решений,
т.к. $|\cos\alpha| \le 1$. Ответ: нет решений.

6.31. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$; $(\cos x + \cos 3x) + \cos 2x = 0$;
$2\cos 2x \cos x + \cos 2x = 0$; $\cos 2x(2\cos x + 1) = 0$;
$\cos 2x = 0$ или $2\cos x + 1 = 0$;

$2x = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in Z$; $\cos x = -\frac{1}{2}$;

$x=\frac{\pi}{4}(1+2m)$, $m \in Z$; $x=\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi n, n\in Z.$

Ответ: $\frac{\pi}{4}(1+2m)$; $\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi n$, $m, n \in Z$.

6.32. $\sin x + \sin 3x = 4\cos^2 x$;
$2\sin 2x \cos x - 4\cos^2 x = 0$; $4\cos^2 x(\sin x - 1) = 0$;

$\cos x = 0$; $x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$;

или $\sin x = 1$; $x=\frac{\pi}{2}+2\pi m, m\in Z$. Ответ: $\frac{\pi}{2}(1+2k)$, $k \in Z$.

6.33. $\cos x = \cos 3x + 2\sin 2x$; $\cos 3x - \cos x + 2\sin 2x = 0$;
$-2\sin 2x \sin x + 2\sin 2x = 0$; $2\sin 2x(\sin x - 1) = 0$;

$\sin 2x = 0$; $2x = \pi m$, $m \in Z$; $x=\frac{\pi}{2}m, m\in Z.$

или $\sin x = 1$; $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$; Ответ: $\frac{\pi}{2}l$, $l \in Z$.

6.34. $8\sin^2 2x + 4\sin^2 4x = 5$; $4(1 - \cos 4x) + 4\sin^2 4x = 5$;
$4\cos^2 4x + 4\cos 4x - 3 = 0$. Пусть $\cos 4x = y$, тогда

$4y^2+4y-3=0$; $\frac{D}{4}=4+12=4^2$; $y_1=\frac{-2-4}{4}=-1{,}5$, $y_2=\frac{-2+4}{4}=\frac{1}{2}$;

1) $\cos 4x = -1{,}5$ – решений нет, т.к. $|\cos x| \le 1$;

2) $\cos 4x=\frac{1}{2}$; $4x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$; $x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}m$, где $m \in Z$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}m, m\in Z.$

6.35. $\sin^2 3x + \sin^2 4x = \sin^2 5x + \sin^2 6x$; $1 - \cos 6x + 1 - \cos 8x =$
$= 1 - \cos 10x + 1 - \cos 12x$; $\cos 12x - \cos 6x = \cos 8x - \cos 10x$;
$-2\sin 9x \sin 3x = 2\sin 9x \sin x$; $\sin 9x(\sin 3x + \sin x) = 0$;

$\sin 9x = 0$; $9x = \pi m$, $m \in Z$; $x=\frac{\pi}{9}m, m\in Z$;

или $\sin 3x+\sin x=0$; $2\sin 2x \cos x=0$; $\sin 2x=0$; $2x = \pi k$; $x=\frac{\pi}{2}k, k\in Z$;

$\cos x = 0$; $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$; $x=\frac{\pi}{2}(1+2n)$, $n \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{9}m$; $\frac{\pi}{2}l$, $m, l \in Z$.

6.36. $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x = 2$; $1 - \cos 2x + 1 - \cos 4x + 1 - \cos 6x + 1 - \cos 8x = 4$; $(\cos 2x + \cos 8x) + (\cos 4x + \cos 6x) = 0$; $2\cos 5x \cos 3x + 2\cos 5x \cos x = 0$; $\cos 5x(\cos 3x + \cos x) = 0$;

$\cos 5x = 0$ или $\cos 3x + \cos x = 0$;

$5x = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in Z$; $2\cos 2x \cos x = 0$;

$x = \frac{\pi}{10}(1 + 2m), m \in Z$; 1) $\cos 2x = 0$; $2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$;

$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in Z$;

2) $\cos x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{10}(1 + 2m)$; $\frac{\pi}{4}(1 + 2k)$; $\frac{\pi}{2}(1 + 2n)$, $k, m, n \in Z$.

6.37. $\cos^2 3x + \cos^2 4x + \cos^2 5x = 1{,}5$; $1 + \cos 6x + 1 + \cos 8x + 1 + \cos 10x = 3$; $(\cos 6x + \cos 10x) + \cos 8x = 0$; $2\cos 8x \cos 2x + \cos 8x = 0$; $\cos 8x(2\cos 2x + 1) = 0$;

$\cos 8x = 0$; или $2\cos 2x = -1$;

$8x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$; $\cos 2x = -\frac{1}{2}$;

$x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{8}n, n \in Z$; $2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{8}n$; $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $n, k \in Z$.

6.38. $\cos^2 x + \cos^2 2x = \cos^2 3x + \cos^2 4x$; $1 + \cos 2x + 1 + \cos 4x = 1 + \cos 6x + 1 + \cos 8x$; $\cos 2x + \cos 4x = \cos 6x + \cos 8x$;

$2\cos 3x \cos x = 2\cos 7x \cos x$; $\cos x(\cos 3x - \cos 7x) = 0$;

$\cos x = 0$ или $\cos 3x - \cos 7x = 0$;

$x = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in Z$; $2\sin 5x \sin 2x = 0$;

1) $\sin 5x = 0$; $5x = \pi k$; $x = \frac{\pi}{5}k, k \in Z$;

2) $\sin 2x = 0$; $2x = \pi n$; $x = \frac{\pi}{2}n, n \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}l$; $\frac{\pi}{5}m$, где $l, m \in Z$.

6.39. $2\cos^2 4x - 6\cos^2 2x + 1 = 0$;
$2\cos^2 4x - 3(1 + \cos 4x) + 1 = 0$; $2\cos^2 4x - 3\cos 4x - 2 = 0$;

$\cos 4x = \frac{3-5}{2\cdot 2} = -\frac{1}{2}$ или $\cos 4x = \frac{3+5}{2\cdot 2} = 2$ -

$4x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2\pi n, n \in Z$; решений нет, т.к. $|\cos\alpha| \le 1$;

$x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}n, n \in Z$. Ответ: $\pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}n, n \in Z$.

6.40. $\sin 2x + \sin 6x = 3\cos 2x$;
$2\sin 4x \cos 2x - 3\cos 2x = 0$; $\cos 2x(2\sin 4x - 3) = 0$;
$\cos 2x = 0$ или $2\sin 4x - 3 = 0$;

$2x = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in Z$; $\sin 4x = \frac{3}{2}$ - решений нет

$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}m, m \in Z$. т.к. $|\sin\alpha| \le 1$;

Ответ: $\frac{\pi}{4}(1 + 2m)$, где $m \in Z$.

6.41. $144\cos^4 x - 4\sin^4 x = 9\sin^2 2x$;
$4\sin^4 x + 36\sin^2 x \cdot \cos^2 x + 81\cos^4 x - 225\cos^4 x = 0$;
$(2\sin^2 x + 9\cos^2 x - 15\cos^2 x)(2\sin^2 x + 9\cos^2 x + 15\cos^2 x) = 0$;
$\sin^2 x - 3\cos^2 x = 0 \mid :\cos^2 x$ или $11\cos^2 x + 1 = 0$

$\mathrm{tg} x = 0 \pm\sqrt{3}$ или решений нет;

$x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$; Ответ: $\pm\frac{\pi}{3}\pi n, n \in Z$.

6.42. $2(\cos 4x - \sin x \cdot \cos 3x) = \sin 4x + \sin 2x$;
$2(\cos 4x - \sin x \cdot \cos 3x) = 2\sin 3x \cos x$;
$\cos 4x = \sin 3x \cos x + \sin x \cos 3x$; $\cos 4x = \sin 4x \mid : \cos 4x \ne 0$;

$\mathrm{tg} 4x = 1$, $4x = \frac{\pi}{4} + \pi n$; $x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4}n, n \in Z$. Ответ: $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4}n, n \in Z$.

6.43. $\cos 7x + \cos x = 2\cos 3x(\sin 2x - 1)$;
$2\cos 4x \cos 3x - 2\cos 3x(\sin 2x - 1) = 0$; $\cos 3x(\cos 4x + 1 - \sin 2x) = 0$;
$\cos 3x = 0$ или $2\cos^2 2x - \sin 2x = 0$;

$3x = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in Z$; $2\sin^2 2x + \sin 2x - 2 = 0$;

$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\pi m, m \in Z$;

$$\left[\begin{array}{l}\sin 2x = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{4} < -1 \text{ – решений нет, т.к. } |\sin\alpha| \le 1,\\ \sin 2x = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{4};\;\; x = \dfrac{1}{2}(-1)^k \arcsin\dfrac{\sqrt{17}-1}{4} + \dfrac{\pi}{2}k, k \in Z.\end{array}\right.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{6}(1+2m)$; $\dfrac{1}{2}(-1)^k \arcsin\dfrac{\sqrt{17}-1}{4} + \dfrac{\pi}{2}k$, $m, k \in Z$.

6.44. $\cos 5x - \cos x = \sin 3x(2\cos 4x + 1)$;

$$\sin 3x \sin 2x + \sin 3x\left(\cos 4x + \frac{1}{2}\right) = 0;$$

$$\sin 3x\left(\sin 2x + 1 - 2\sin^2 2x + \frac{1}{2}\right) = 0;$$

$\sin 3x = 0$; $3x = \pi m$, $m \in Z$; $x = \dfrac{\pi}{3}m, m \in Z$;

или $2\sin^2 2x - \sin 2x - 1{,}5 = 0$;

$$\left[\begin{array}{l}\sin 2x = \dfrac{1-\sqrt{13}}{4} < 1;\;\; x = \dfrac{1}{2}(-1)^k \arcsin\dfrac{1-\sqrt{13}}{4} + \dfrac{\pi}{2}k, k \in Z,\\ \sin 2x = \dfrac{1+\sqrt{13}}{4} > 1 \text{ – решений нет.}\end{array}\right.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{3}m$; $\dfrac{1}{2}(-1)^{k+1} \arcsin\dfrac{\sqrt{13}-1}{4} + \dfrac{\pi}{2}k$, $m, k \in Z$.

6.45. $\cos 3x - \sin x = \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x)$;

$$\cos 3x + \sqrt{3}\sin 3x = \sin x + \sqrt{3}\cos x;$$

$$\sqrt{3+1}\left(\frac{1}{2}\cos 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x\right) = \sqrt{3+1}\left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right);$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + 3x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right);$$

$$2\sin\frac{\frac{\pi}{6} + 3x - \frac{\pi}{3} - x}{2} \cdot \cos\frac{\frac{\pi}{6} + 3x + \frac{\pi}{3} + x}{2} = 0 \;\; | : 2;$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = 0\;;$$

$\cos\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)=0$ или $\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=0;$

$\frac{\pi}{4}+2x=\frac{\pi}{2}+\pi m, m\in Z;$ $x-\frac{\pi}{12}=\pi k, k\in Z;$

$2x=\frac{\pi}{4}+\pi m, m\in Z;$ $x=\frac{\pi}{12}+\pi k, k\in Z.$

$x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}m, m\in Z;$ Ответ: $\frac{\pi}{8}(1+4m)$; $\frac{\pi}{12}(1+12k)$, $k, m \in Z$.

6.46. $\cos 2x=\sqrt{2}(\cos x-\sin x);$

$(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x-\sqrt{2})=0;$

$\cos x - \sin x = 0$ или $\cos x+\sin x-\sqrt{2}=0;$

$\operatorname{tg} x = 1;$ $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x=1;$

$x=\frac{\pi}{4}+\pi m, m\in Z;$ $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=1;$ $\frac{\pi}{4}+x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z;$

$x=\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in Z.$

Ответ: $\frac{\pi}{4}(1+4m)$, $m \in Z$.

6.47. $\sin x \cdot \cos 3x = \sin 2x;$
$\sin x \cos 3x = 2\sin x \cos x;$ $\sin x(\cos 3x - 2\cos x) = 0;$
$\sin x = 0$ или $\cos 3x - 2\cos x = 0;$
$x = \pi m$, $m \in Z;$ $\cos x(4\cos^2 x - 5) = 0;$
$\cos x = 0$ или $4\cos^2 x = 5;$
$x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z;$ $\cos^2 x=\frac{5}{4}>1;$
решений нет.

Ответ: πm; $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $m, k \in Z$.

6.48. $5\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 2x;$

$$5\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2-\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=\sin^2 2x;$$

$5 - 10\cos 2x + 5\cos^2 2x - 1 - 2\cos 2x - \cos^2 2x = 4\sin^2 2x;$

$4\cos^2 2x - 12\cos 2x + 4 = 4 - 4\cos^2 2x \mid : 4;$
$2\cos^2 2x - 3\cos 2x = 0;$ $\cos 2x(2\cos 2x - 3) = 0;$

$\cos 2x = 0;$ $2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z;$ $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in Z;$

или $2\cos 2x - 3 = 0;$ $\cos 2x = \frac{3}{2} > 1$ - решений нет, т.к. $|\cos\alpha| \le 1$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}(1+2k), k \in Z$.

6.49. $\sin^2 6x + \sin^2 4x = 1;$ $1 - \cos 12x + 1 - \cos 8x = 2;$ $\cos 12x + \cos 8x = 0;$
$2\cos 10x \cos 2x = 0;$

$$\left[\begin{array}{l}\cos 10x = 0,\\ \cos 2x = 0;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}10x = \frac{\pi}{2} + \pi m,\\ 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{20}(1+2m), m \in Z,\\ x = \frac{\pi}{4}(1+2k), k \in Z.\end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi}{20}(1+2l), l \in Z.$

6.50. $2\sin 2x = \mathrm{tg}\, x + \mathrm{ctg}\, x;$ $2\sin 2x = \frac{1}{\sin x \cos x};$ $\sin^2 2x = 1;$

$2\sin^2 2x = 2;$ $1 - \cos 4x = 2;$ $\cos 4x = -1;$ $4x = \pi + 2\pi n;$

$x = \frac{\pi}{4}(1+2n), n \in Z.$ Ответ: $\frac{\pi}{4}(1+2n), n \in Z.$

6.51. $\sin 5x = \sin x + \sin 2x;$
$2\cos 3x \sin 2x - \sin 2x = 0;$ $\sin 2x(2\cos 3x - 1) = 0;$

$\sin 2x = 0;$ $2x = \pi m,$ $m \in Z;$ $x = \frac{\pi}{2}m, m \in Z;$

или $2\cos 3x - 1 = 0;$ $\cos 3x = \frac{1}{2};$ $x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi n, n \in Z.$

Ответ: $\frac{\pi}{2}m;$ $\pm\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi n,$ $m, n \in Z.$

6.52. $6\sin^2 x + 2\sin^2 2x = 5;$ $3(1 - \cos 2x) + 2(1 - \cos^2 2x) = 5;$
$3 - 3\cos 2x + 2 - 2\cos^2 2x = 5;$ $2\cos^2 2x + 3\cos 2x = 0;$
$\cos 2x = 0$ или $2\cos 2x = -3;$

$2x = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in Z;$ $\cos 2x = -\frac{3}{2} < -1$ – решений нет;

$x = \frac{\pi}{4}(1+2m), m \in Z.$ Ответ: $\frac{\pi}{4}(1+2m), m \in Z.$

6.53. $\cos^2 6x - \sin^2 3x - 1 = 0$;

$\cos^2 6x - \frac{1-\cos 6x}{2} - 1 = 0$; $2\cos^2 6x + \cos 6x - 3 = 0$.

Пусть $\cos 6x = y$, тогда $2y^2 + y - 3 = 0$; $y_1 = 1$, $y_2 = -\frac{3}{2}$;

$\cos 6x = 1$; $6x = 2\pi n$, $n \in Z$; $x = \frac{\pi}{3}n, n \in Z$;

или $\cos 6x = -\frac{3}{2} < -1$ - решений нет, т.к. $|\cos\alpha| \le 1$.

Ответ: $\frac{\pi}{3}n, n \in Z$.

6.54. $\cos x - \cos 3x = 3\sin^2 x$;

$2\sin 2x \sin x = 3\sin^2 x$; $4\sin^2 x \cos x - 3\sin^2 x = 0$; $\sin^2 x(4\cos x - 3) = 0$;

$\sin^2 x = 0$ или $4\cos x - 3 = 0$;

$x = \pi m$, $m \in Z$; $\cos x = \frac{3}{4}$; $x = \pm\arccos\frac{3}{4} + 2\pi k, k \in Z$.

Ответ: πm, $\pm\arccos\frac{3}{4} + 2\pi k$, $m, k \in Z$.

6.55. $\cos^4 2x + 6\cos^2 2x = \frac{25}{16}$;

$16\cos^4 2x + 96\cos^2 2x - 25 = 0$. Пусть $\cos^2 2x = y$, тогда

$16y^2 + 96y - 25 = 0$; $\frac{1}{4}D = 48^2 + 25 \cdot 16 = 2304 + 400 = 2704$;

$y_1 = \frac{-48-52}{16} = -\frac{25}{4}$, $y_2 = \frac{-48+52}{16} = \frac{1}{4}$;

$\cos^2 2x = -\frac{25}{4}$ или $\cos^2 2x = \frac{1}{4}$; $2\cos^2 2x = \frac{1}{2}$;

решений нет; $1 + \cos 4x = \frac{1}{2}$; $\cos 4x = -\frac{1}{2}$;

$4x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2\pi k$; $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}k, k \in Z$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}k, k \in Z$.

6.56. $3\operatorname{tg}^2 x - 8\cos^2 x + 1 = 0$; $3\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} - 8\frac{1+\cos 2x}{2} + 1 = 0$;

$\cos 2x \neq -1$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$;

$3 - 3\cos 2x - 4 - 8\cos 2x - 4\cos^2 2x + 1 + \cos 2x = 0$;
$4\cos^2 2x + 10\cos 2x = 0 \mid : 4$; $\cos 2x(\cos 2x + 2{,}5) = 0$;
$\cos 2x = 0$ или $\cos 2x + 2{,}5 = 0$;

$2x = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in Z$; $\cos 2x = -2{,}5$ – нет решений,

$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} m, m \in Z$; $|\cos \alpha| \leq 1$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}(1 + 2m), m \in Z$.

6.57. $2\mathrm{tg}^2 x + 4\cos^2 x = 7$; $2\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 4\cos^2 x = 7$; $\cos^2 x \neq 0$;

$2\sin^2 x + 4\cos^4 x - 7\cos^2 x = 0$; $4\cos^4 x - 7\cos^2 x - 2\cos^2 x + 2 = 0$;
$4\cos^4 x - 9\cos^2 x + 2 = 0$; $\cos^2 x = t$; $4t^2 - 9t + 2 = 0$;

$D = 81 - 32 = 49$; $t_1 = \frac{9-7}{8} = \frac{1}{4}$, $t_2 = \frac{9+7}{8} = 2$;

$\cos^2 x = \frac{1}{4}$ или $\cos 2x = 2$ – решений нет,

$2\cos^2 x = \frac{1}{2}$; $1 + \cos 2x = \frac{1}{2}$; т.к. $|\cos \alpha| \leq 1$;

$\cos 2x = -\frac{1}{2}$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$. Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$.

6.58. $\mathrm{ctg}^2 x - 8\sin^2 x = 1$; $\sin x \neq 0$; $x \neq \pi n$, $n \in Z$;

$\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - 8\sin^2 x = 1$; $\cos^2 x - 8\sin^4 x - \sin^2 x = 0$;

$8\sin^4 x + \sin^2 x - 1 + \sin^2 x = 0$; $8\sin^4 x + 2\sin^2 x - 1 = 0$;

$\sin^2 x = \frac{1}{4}$ или $\sin^2 x = -\frac{1}{2}$ - решений нет;

$1 - \cos 2x = \frac{1}{2}$; $\cos 2x = \frac{1}{2}$; $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.

6.59. $9\mathrm{ctg}^2 x + 4\sin^2 x = 6$; $9\cos^2 x + 4\sin^4 x - 6\sin^2 x = 0$;
$4\sin^4 x + 9 - 9\sin^2 x - 6\sin^2 x = 0$; $4\sin^4 x - 15\sin^2 x + 9 = 0$;

Пусть $\sin^2 x = y$, тогда $4y^2 - 15y + 9 = 0$; $D = 225 - 144 = 81$;

$y_1 = \frac{15-9}{8} = \frac{3}{4}$, $y_2 = \frac{15+9}{8} = 3$;

$\sin^2 x = \frac{3}{4}$ или $\sin^2 x = 3$ – решений нет, т.к. $|\sin \alpha| \le 1$;

$\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$. Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$.

6.60. $1 - \cos 6x = \mathrm{tg}\, 3x$; $2\sin^2 3x = \mathrm{tg}\, 3x$; $\sin 3x(2\sin 3x \cos 3x - 1) = 0$;
$\sin 3x(\sin 6x - 1) = 0$;

$\sin 3x = 0$; $3x = \pi m$, $m \in Z$; $x = \frac{\pi}{3}m, m \in Z$;

или $\sin 6x - 1 = 0$; $\sin 6x = 1$; $6x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$; $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}n, n \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{3}m$, $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}n$, $m, n \in Z$.

6.61. $\cos x - \cos 3x = \sin 2x$;
$2\sin 2x \cdot \sin x - \sin 2x = 0$; $\sin 2x(2\sin x - 1) = 0$;

$\sin 2x = 0$; $2x = \pi m$, $m \in Z$; $x = \frac{\pi}{2}m, m \in Z$;

или $2\sin x - 1 = 0$; $\sin x = \frac{1}{2}$; $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}m$; $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $m, k \in Z$.

6.62. $\cos 2x - \cos 4x = \sin 6x$;
$2\sin 3x \sin x - 2\sin 3x \cos 3x = 0$; $\sin 3x(\sin x - \cos 3x) = 0$;

$\sin 3x = 0$; $3x = \pi m$, $m \in Z$; $x = \frac{\pi}{3}m, m \in Z$;

или $\sin x - \cos 3x = 0$; $\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = 0$; $2\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0, \\ \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{4} - x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ 2x - \frac{\pi}{4} = \pi n; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z, \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n, n \in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3}m$; $\pi k - \frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{8}(1 + 4n)$, $m, k, n \in Z$.

6.63. $\sin 2x = \cos^4\frac{x}{2} - \sin^4\frac{x}{2}$;

$\sin 2x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$; $\sin 2x = \cos x$; $\cos x(2\sin x - 1) = 0$;

$\left[\begin{array}{l}\cos x = 0,\\ 2\sin x = 1;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in Z,\\ x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.\end{array}\right.$

Ответ: $\frac{\pi}{2}(1+2m)$; $(-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k$, $m, k \in Z.$

6.64. $\sin^2 x = \cos^4\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$; $\sin^2 x = \cos x$; $1 - \cos^2 x = \cos x$;
$\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$;

$\cos x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ или $\cos x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < -1$;

$x = \pm\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi k, k \in Z$; нет решений, т.к. $|\cos\alpha| \le 1$.

Ответ: $\pm\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi k, k \in Z$;

6.65. $\cos 2x = 2(\cos x - \sin x)$; $\cos^2 x - \sin^2 x = 2(\cos x - \sin x)$;
$(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x - 2) = 0$;
$\cos x - \sin x = 0$ или $\cos x + \sin x = 2$;

$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$; $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 2$;

$\frac{\pi}{4} - x = \pi k$; $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \sqrt{2}$ - решений нет,

$x = \frac{\pi}{4} - \pi k, k \in Z$; т.к. $|\cos\alpha| \le 1$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} - \pi k, k \in Z$;

6.66. $(\cos 6x - 1)\mathrm{ctg}\,3x = \sin 3x$; $\sin 3x \ne 0$, $x \ne \frac{\pi}{3}k, k \in Z$;

$-2\sin^2 3x\frac{\cos 3x}{\sin 3x} - \sin 3x = 0$; $|\,\sin 3x$

$2\cos 3x=-1; 3x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$

$x=\pm\frac{2}{9}\pi+\frac{2}{3}\pi n, n\in Z$

Ответ: $\pm\frac{2}{9}\pi+\frac{2}{3}\pi n, n\in Z.$

6.67. $\sin x\sin 5x=\cos 4x$; $\cos 4x-\cos 6x=2\cos 4x$;
$\cos 4x+\cos 6x=0$; $2\cos 5x\cos x=0$;

$$\left[\begin{array}{l}\cos 5x=0,\\ \cos x=0;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}5x=\frac{\pi}{2}+\pi m,\\ x=\frac{\pi}{2}+\pi k;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{5}m, m\in Z,\\ x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z.\end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{5}m;\ \frac{\pi}{2}+\pi k,\ m, k\in Z.$

6.68. $\cos x\cos 3x=\cos 2x$; $\cos 4x+\cos 2x-2\cos 2x=0$;
$\cos 4x-\cos 2x=0$; $-2\sin 3x\sin x=0$;
$\sin 3x=0$ или $\sin x=0$;
$3x=\pi m, m\in Z$; $x=\pi n, n\in Z.$

$x=\frac{\pi}{3}m, m\in Z$; Ответ: $\frac{\pi}{3}k, k\in Z.$

6.69. $3\cos x+2\operatorname{tg} x=0$; $\cos x\neq 0$; $3\cos^2 x+2\sin x=0$;
$3-3\sin^2 x+2\sin x=0$; $3\sin^2 x-2\sin x-3=0.$

Пусть $\sin x=y$, тогда имеем: $3y^2-2y-3=0$; $\frac{D}{4}=1+9=10$;

$y_1=\frac{1-\sqrt{10}}{3}$; $y_2=\frac{1+\sqrt{10}}{3}$;

$\sin x=\frac{1-\sqrt{10}}{3}$ или $\sin x=\frac{1+\sqrt{10}}{3}$, решений нет,

$x=(-1)^{k+1}\arcsin\frac{\sqrt{10}-1}{3}+\pi k, k\in Z$; т.к. $|\sin\alpha|\le 1.$

Ответ: $(-1)^{k+1}\arcsin\frac{\sqrt{10}-1}{3}+\pi k, k\in Z$;

6.70. $5\sin x-4\operatorname{ctg} x=0$, $\sin x\neq 0$;
$5-5\cos^2 x-4\cos x=0$; $5\cos^2 x+4\cos x-5=0$;
$\cos x=y$;

$5y^2 + 4y - 5 = 0$; $\frac{D}{4} = 4 + 25 = 29$;

$y_1 = \frac{-2-\sqrt{29}}{5}$; $\quad y_2 = \frac{-2+\sqrt{29}}{5}$;

$\cos x = \frac{\sqrt{29}-2}{5}$ или $\cos x = \frac{-2-\sqrt{29}}{5} < -1$, решений нет,

$x = \pm\arccos\frac{\sqrt{29}-2}{5} + 2\pi k, k \in Z$; т.к. $|\sin \alpha| \le 1$.

Ответ: $\pm\arccos\frac{\sqrt{29}-2}{5} + 2\pi k, k \in Z$.

6.71. $8\sin^2 x + 4\sin^2 2x = 5 - 8\cos 2x$; $4(1 - \cos 2x) + 4(1 - \cos^2 2x) + 8\cos 2x - 5 = 0$; $4\cos^2 2x - 4\cos 2x - 3 = 0$;

$\cos 2x = -\frac{1}{2}$ или $\cos 2x = \frac{3}{2} > 1$ - нет решений,

$x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi m, m \in Z$; т.к. $|\cos \alpha| \le 1$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + \pi m, m \in Z$.

6.72. $2\sin^2 x = 4\sin^2 2x + 7\cos 2x - 6$;
$1 - \cos 2x - 4 + 4\cos^2 2x - 7\cos 2x + 6 = 0$;
$4\cos^2 2x - 8\cos 2x + 3 = 0$, пусть $\cos 2x = y$, тогда

$4y^2 - 8y + 3 = 0$; $\frac{D}{4} = 16 - 12 = 4$; $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = \frac{3}{2}$;

$\cos 2x = \frac{1}{2}$ или $\cos 2x = 1\frac{1}{2}$ - решений нет,

$2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi m, m \in Z$; т.к. $|\cos \alpha| \le 1$;

$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi m, m \in Z$. Ответ: $\pm\frac{\pi}{6} + \pi m, m \in Z$.

6.73. $tgx(1 - 2\sin x) - 2\cos x = \sqrt{3}$; $\cos x \ne 0$;

$\sin x - 2\sin^2 x - 2\cos^2 x - \sqrt{3}\cos x = 0$;

$\sin x - \sqrt{3}\cos x - 2 = 0$; $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2$;

$\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=1;\ \ \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1;\ \ x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2\pi k,k\in Z;$

$x=\frac{5}{6}\pi+2\pi k,k\in Z.$ Ответ: $\frac{5}{6}\pi+2\pi k,k\in Z.$

6.74. $\sqrt{3}\sin 2x+2\sin^2 x-1=2\cos x;$

$-\cos\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)-\cos x=0;\ \ \cos\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)+\cos x=0;$

$2\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{3}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{2}\right)=0;$

$\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{3}{2}x\right)=0$ или $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{2}\right)=0;$

$\frac{\pi}{6}+\frac{3}{2}x=\frac{\pi}{2}+\pi k,k\in Z;$ $\frac{\pi}{6}+\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi m,m\in Z;$

$x=\frac{2}{9}\pi-\frac{2}{3}\pi k,k\in Z;$ $x=\frac{2}{3}\pi+2\pi m,m\in Z$.

Ответ: $\frac{2}{9}\pi(1+3k);\ \ \frac{2}{3}\pi(1+3m)$, $k,\ m\in Z.$

6.75. $\sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2 x-1=2\sin x;$

$\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\sin x;\ \ \sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin x;$

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-\sin x=0;\ \ 2\sin\frac{2x+\frac{\pi}{6}-x}{2}\cos\frac{2x+\frac{\pi}{6}+x}{2}=0;$

$\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)=0$ или $\cos\left(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{12}\right)=0;$

$\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{12}+\pi n,n\in Z;$ $\frac{3}{2}x=-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}+\pi m,m\in Z;$

Ответ: $-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \ \frac{5}{18}\pi+\frac{2}{3}\pi m,m\in Z.$

6.76. $-ctgx\left(2\cos x+\sqrt{3}\right)=2\sin x;\ \ \sin x\neq 0;$

$-2\cos^2 x-\sqrt{3}\cos x-2\sin^2 x=0;$

$\sqrt{3}\cos x = -2;\quad \cos x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ - решений нет, т.к. $\frac{2\sqrt{3}}{3} > 1$.

Ответ: решений нет.

6.77. $\sqrt{10}\cos x - \sqrt{4\cos x - \cos 2x} = 0;$

$\sqrt{10}\cos x = \sqrt{4\cos x - \cos 2x};\quad \begin{cases} 10\cos^2 x = 4\cos x - \cos 2x, \\ 0 \le \cos x \le 1; \end{cases}$

$10\cos^2 x - 4\cos x + \cos 2x = 0,\ \ 12\cos^2 x - 4\cos x - 1 = 0,$

$\cos x = t;\ 12t^2 - 4t - 1 = 0;\ \ \frac{D}{4} = 4 + 12 = 16;\ \ t_1 = \frac{1}{2};\ \ t_2 = -\frac{1}{6};$

$\cos x = \frac{1}{2}$ или $\cos x = -\frac{1}{6};\quad \cos x = \frac{1}{2}\ ;\ \ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$

6.78. $\sqrt{5}\sin 2x - \sqrt{1 + 8\sin x\cos x} = 0;$

$\sqrt{5}\sin 2x = \sqrt{1 + 8\sin x\cos x};\ \ \sqrt{5}\sin 2x = \sqrt{1 + 4\sin 2x};$

$\begin{cases} 5\sin^2 2x - 4\sin 2x - 1 = 0, \\ 0 \le \sin 2x \le 1; \end{cases}\qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 1, \\ \sin 2x = -\frac{1}{5}, \end{array}\right. \\ 0 \le \sin 2x \le 1, \end{cases}$ значит, $\sin 2x = 1;$

$2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \ x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$ Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$

6.79. $4\sin 3x\sin x + 2\cos 2x + 1 = 0;\ \ 2\cos 2x - 2\cos 4x + 2\cos 2x + 1 = 0;$
$4\cos 2x - 2(2\cos^2 2x - 1) + 1 = 0;\ \ 4\cos^2 2x - 4\cos 2x - 3 = 0;\ \cos 2x = y;$

$4y^2 - 4y - 3 = 0;\ \ \frac{D}{4} = 4 + 12 = 16;\ \ y_1 = -\frac{1}{2},\ \ y_2 = 1{,}5;$

1) $\cos 2x = 1{,}5$ – корней нет, т.к. $|\cos y| \le 1;$

2) $\cos 2x = -\frac{1}{2};\ \ 2x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2\pi n, n \in Z.$ Ответ: $\frac{\pi}{3}.$

6.80. $8\cos 6x\cos 2x + 2\sin^2 4x - 3 = 0;$

$8\cdot\frac{1}{2}\left(\cos 4x + \cos 8x\right) + 2\sin^2 4x - 3 = 0;\ \ 3\cos 8x + 4\cos 4x - 2 = 0;$

$3(2\cos^2 4x - 1) + 4\cos 4x - 2 = 0;\ \ 6\cos^2 4x + 4\cos 4x - 5 = 0;\ \cos 4x = y;$

$6y^2 + 4y - 5 = 0;\ \ \frac{D}{4} = 4 + 30 = 34;\quad y_1 = \frac{-2 - \sqrt{34}}{6};\ \ y_2 = \frac{-2 + \sqrt{34}}{6};$

1) $\cos 4x = \frac{-2-\sqrt{34}}{6}$ - нет корней, т.к. $\left|\frac{-2-\sqrt{34}}{6}\right| > 1$;

2) $\cos 4x = \frac{-2+\sqrt{34}}{6}$; $x = \pm\frac{1}{4}\arccos\frac{\sqrt{34}-2}{6} + \frac{\pi}{2}n, n \in Z.$

При $n = 0$; $x = \frac{1}{4}\arccos\frac{\sqrt{34}-2}{6}$ - наименьший положительный корень.

Т.к. $0 < \frac{1}{4}\arccos\frac{\sqrt{34}-2}{6} < \frac{\pi}{4}$, а если $n = 1$ и $x = -\frac{1}{4}\arccos\frac{\sqrt{34}-2}{6} + \frac{\pi}{2}$, то $\frac{\pi}{4} < -\frac{1}{4}\arccos\frac{\sqrt{34}-2}{6} + \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$, т.е. $x = -\frac{1}{4}\arccos\frac{\sqrt{34}-2}{6} + \frac{\pi}{2}$ не является наименьшим положительным корнем. Ответ: $\frac{1}{4}\arccos\frac{\sqrt{34}-2}{6}$.

6.81. $\sin 4x + 2\cos^2 x = 1$, $|x| < 1$; $\sin 4x + 2\cos^2 x - 1 = 0$;
$\sin 4x + \cos 2x = 0$; $\cos 2x(2\sin 2x + 1) = 0$;
$\cos 2x = 0$ или $2\sin 2x = -1$;

$2x = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in Z;$ $2x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z;$

$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}m, m \in Z;$ $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k, k \in Z.$

$x = \frac{\pi}{4}$ при $m = 0$; $x = -\frac{\pi}{4}$ при $m = -1$; $x = -\frac{\pi}{12}$ при $k = 0$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{12}$.

6.82. $2\sin^2 x + \cos 4x = 1$, $|x| < 1$; $\cos 4x = 1 - 2\sin^2 x$; $\cos 4x = \cos 2x$;
$2\cos^2 2x - 1 = \cos 2x$; $2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0$;

$\left[\begin{array}{l}\cos 2x = 1,\\ \cos 2x = -\frac{1}{2};\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}2x = 2\pi n,\\ 2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x = \pi n, n \in Z,\\ x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z.\end{array}\right.$

Условию $|x| < 1$ удовлетворяет только число $x = 0$ при $n = 0$.
Ответ: 0.

6.83. $\sin x = x^2 + 2x + 2$. Т.к. $|\sin x| \le 1$, то $|x^2 + 2x + 2| \le 1$;

$\begin{cases} x^2 + 2x + 2 \le 1, \\ x^2 + 2x + 2 \ge -1; \end{cases}$ $\begin{cases} (x+1)^2 \le 0, \\ (x+1)^2 + 2 \ge 0; \end{cases}$ $x = -1$. Проверкой убеждаемся, что число -1 не является корнем уравнения.

Ответ: корней нет.

6.84. $\cos x = x^2 - 2x + 2$;

$\begin{cases} x^2 - 2x + 2 \ge -1, \\ z^2 - 2x + 2 \le 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 2x + 3 \ge 0, \\ x^2 - 2x + 1 \le 0; \end{cases}$ $\begin{cases} (x-1)^2 + 2 \ge 0, \\ (x-1)^2 \le 0; \end{cases}$ $x = 1$.

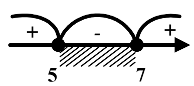
Проверкой убеждаемся, что 1 не является корнем данного уравнения. Ответ: корней нет.

6.85. $8\sin x = x^2 - 10x + 33$; $|8\sin x| \le 8$, значит, $-8 \le x^2 - 10x + 33 \le 8$;

$-8 \le (x-5)^2 + 8 \le 8$; $\begin{cases} (x-5)^2 + 8 \ge -8, \\ (x-5)^2 + 8 \le 8; \end{cases}$ $\begin{cases} (x-5)^2 + 16 \ge 0, \\ (x-5)^2 \le 0; \end{cases}$ $x = 5$.

При $x = 5$ имеем $8\sin x < 0$, а $x^2 - 10x + 33 > 0$. Ответ: нет корней.

6.86. $2\cos x = -x^2 + 12x - 37$.



Так как $|\cos x| \le 1$, то $|2\cos x| \le 2$;
$-2 \le -x^2 + 12x - 37 \le 2$; $-2 \le -(x-6)^2 - 1 \le 2$;
$-1 \le -(x-6)^2 \le 3$; $-3 \le (x-6)^2 \le 1$;

$\begin{cases} (x-6)^2 \ge -3, \\ (x-6)^2 \le 1; \end{cases}$ $\begin{cases} (x-6)^2 + 3 \ge 0, \\ x^2 - 12x + 35 \le 0; \end{cases}$ $\begin{cases} (x-6)^2 \ge -3, \\ (x-5)(x-7) \le 0; \end{cases}$

$5 \le x \le 7$. Если $x \in [5; 7]$, $\cos x > 0$, а значит, и $2\cos x > 0$;
$-x^2 + 12x - 37 < 0$, так как $-x^2 + 12x - 37 = -(x-6)^2 - 1$.
Это означает, что данное уравнение не имеет корней.
Ответ: нет корней.

6.87. $\sin\frac{\pi}{2}x = x^2 - 2x + 2$; 1. $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$;

Видно что равенство (1) может иметь место только при $x = 1$.

$\sin\frac{\pi}{2} = 1$; – верно. Ответ: 1.

6.88. $\sin\frac{\pi}{2}x = 12x - 37 - x^2$.

$12x - 37 - x^2 = -1 - (x^2 - 12x + 36 = -1 - (x-6)^2$.

Значит, $12x - 37 - x^2 \le -1$. Так как $\left|\sin\frac{\pi}{2}\right| \le 1$, то единственным корнем уравнения может быть $x = 6$. Проверкой убеждаемся, что $x = 6$ не является корнем уравнения. Ответ: нет корней.

6.89. $4^{-x+\frac{1}{2}} - 7\cdot 2^{-x} = 4$; $2 \cdot 4^{-x} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 = 0$. Замена $t = 2^{-x}$, $t > 0$;

$2t^2 - 7t - 4 = 0$; D = 81; $t_1 = 4$; $t_2 = -\frac{1}{2}$; $2^{-x} = 4$; $x = -2$. Ответ: -2.

6.90. $3^{6x-3} = 2\cdot 27^{x-\frac{2}{3}} + 1$; $27^{2x-1} = 2\cdot 27^{x-\frac{2}{3}} + 1$;

$\frac{1}{27}\cdot 27^{2x} = 2\cdot\frac{1}{9}\cdot 27^{x} + 1$; замена $t = 27^x$, $t > 0$; $\frac{t^2}{27} - \frac{2}{9}\cdot t - 1 = 0$;

$t^2 - 6t - 27 = 0$; $t_1 = 9$, $t_2 = -3$; $27^x = 9$; $3^{3x} = 3^2$; $x = \frac{2}{3}$. Ответ: $\frac{2}{3}$.

6.91. $4^{3x^2+x} - 8 = 2\cdot 8^{x^2+\frac{x}{3}}$; $64^{x^2+\frac{x}{3}} - 8 - 2\cdot 8^{x^2+\frac{x}{3}} = 0$; $8^{x^2+\frac{x}{3}} = t$; $t > 0$;

$t^2 - 2t - 8 = 0$; $t_1 = 4$, $t_2 = -2$; $8^{x^2+\frac{x}{3}} = 4$; $2^{3x^2+x} = 2^2$;

$3x^2 + x = 2$; $3x^2 + x - 2 = 0$; $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{2}{3}$. Ответ: -1; $\frac{2}{3}$.

6.92. $2^{6x} + 8^{x+\frac{2}{3}} = 5$; $2^{6x} + 4 \cdot 2^{3x} - 5 = 0$; $2^{3x} = t$, $t > 0$;
$t^2 + 4t - 5 = 0$; $t_1 = -5$, $t_2 = 1$; $2^{3x} = 1$; $x = 0$. Ответ: 0.

6.93. $64^x + 2^{2+3x} - 12 = 0$; $8^{2x} + 2^2 \cdot (2^3)^x - 12 = 0$; $8^x = t$, $t > 0$;
$t^2 + 4t - 12 = 0$; $t_1 = -6$, $t_2 = 2$; $8^x = 2$; $2^{3x} = 2$; $x = \frac{1}{3}$. Ответ: $\frac{1}{3}$.

6.94. $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10\cdot 2^{\sqrt{x-2}}$; замена $t = 2^{\sqrt{x-2}}$, $t > 0$;
$t^2 - 10t + 16 = 0$; $t_1 = 2$, $t_2 = 8$;
1) $2^{\sqrt{x-2}} = 2$; $\sqrt{x-2} = 1$; $x - 2 = 1$; $x_1 = 3$;
2) $2^{\sqrt{x-2}} = 8$; $\sqrt{x-2} = 3$; $x - 2 = 9$; $x_2 = 11$. Ответ: 3; 11.

6.95. $4^{2|x|-3} - 3 \cdot 4^{|x|-2} - 1 = 0$, замена $t = 4^{|x|}$, $t > 0$;
$\frac{1}{64}\cdot t^2 - \frac{3}{16}t - 1 = 0$; $t^2 - 12t - 64 = 0$; $t_1 = -4$, $t_2 = 16$;
$4^{|x|} = 16$; $|x| = 2$; $x = \pm 2$. Ответ: ± 2.

6.96. $8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x$ $(18^x \neq 0)$;

$\frac{2^{3x}}{2^x \cdot 3^{2x}} + 1 = 2 \cdot \frac{3^{3x}}{2^x \cdot 3^{2x}}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + 1 = 2\left(\frac{3}{2}\right)^x$; замена $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x$,

$t > 0$; $t^2 + 1 = \frac{2}{t}$; $t^3 + 1 - 2 = 0$, $t = 1$ – корень уравнения.

$t^3 - t - 2 = (t - 1)(t^2 + t + 2)$; $t^2 + t + 2 = 0$; $D = -7 < 0$ – решений нет;

$t = 1$; $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$; $x = 0$. Ответ: 0.

6.97. $2x^3 = -18 - x$; $2x^3 + 18 + x = 0$; $x = -2$;
$2x^3 + 18 + x = (x + 2)(2x^2 - 4x + 9)$.

Решим $2x^2 - 4x + 9 = 0$; $\frac{D}{4} = 4 - 18 < 0$ - решений нет.

Ответ: -2.
6.98. $x^3 + 33 = -2x$; $x^3 + 2x + 33 = 0$; $x = -3$ – корень уравнения.
$x^3 + 2x + 33 = (x + 3)(x^2 - 3x + 11)$;
$x^2 - 3x + 11 = 0$; $D = 9 - 44 = -35 < 0$. Значит, корней нет.
Ответ: -3.
6.99. $x^5 + 2x^3 = 48$; $x^5 + 2x^3 - 48 = 0$, $x = 2$ – корень уравнения.
$x^5 + 2x^3 - 48 = (x - 2)(x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 12x + 24)$;
$x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 12x + 24 = x^2(x^2 + 2x + 1) + (4x^2 + 12x + 9) +$
$+ 15 + x^2 = x^2 + x^2(x + 1)^2 + (2x + 3)^2 + 15 > 0$. Следовательно, уравнение $x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 12x + 24 = 0$ корней не имеет.
Ответ: 2.
6.100. $x^5 + 4x = -40$; $x^5 + 4x + 40 = 0$, $x = -2$ – корень уравнения.
$x^5 + 4x + 40 = (x + 2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 20)$;
$x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 20 = (x^4 - 2x^3 + x^2) + 2x^2 + x^2 - 8x + 16 + 4 =$
$= x^2(x - 1)^2 + 2x^2 + (x - 4)^2 + 4 > 0$. Следовательно, уравнение
$x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 20 = 0$ корней не имеет. Ответ: –2.
6.101. $2^x + x = 3$; $y_1 = 2^x$; $y_2 = 3 - x$. Ответ: 1.
6.102. $2^x = 6 - x$. Ответ: 2.

6.103. $2^{x+1} + x = -\frac{3}{2}$; $2^{x+1} = -x - \frac{3}{2}$. Ответ: –2.

6.104. $2^x = -\frac{1}{2} - x$ Ответ: –1.

6.105. $\left(15^{x^2+x-2}\right)^{\sqrt{x-4}} = 1$;

$15^{\left(x^2+x-2\right)\sqrt{x-4}} = 1$, откуда $\left(x^2 + x - 2\right)\sqrt{x - 4} = 0$;

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+x-2=0,\\ x-4\ge 0,\end{cases}\\ x=4;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-2,\\ x=1,\end{array}\right.\\ x-4\ge 0,\end{cases}\\ x=4;\end{array}\right. \quad x=4.$$

Ответ: 4.

6.106. $(0,7^{x-4})^{\sqrt{x^2-2x-15}}=1.$ $(x-4)\sqrt{x^2-2x-15}=0;$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=4,\\ x^2-2x-15\ge 0,\end{cases}\\ x^2-2x-15=0;\end{array}\right. \quad x^2-2x-15=0;\ x_1=-3,\ x^2=5.$$

Ответ: -3; 5.

6.107. $(17^{\sqrt{x^2+2x-8}})^{x+3}=0.$ При данном условии решений нет. Возможно, условие должно быть таким: $(17^{\sqrt{x^2+2x-8}})^{x+3}=1.$

$\sqrt{x^2+2x-8}\left(x+3\right)=0;$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-3,\\ x^2+2x-8\ge 0,\end{cases}\\ x^2+2x-8=0;\end{array}\right. \quad x^2+2x-8=0;\ x_1=-4,\ x_2=2.$$

Ответ: -4; 2.

6.108. $\begin{cases}\dfrac{1}{2x-3y}+\dfrac{2}{3x-2y}=\dfrac{3}{4},\\ \dfrac{3}{2x-3y}+\dfrac{4}{3x-2y}=1.\end{cases}$. Заменим $u=\dfrac{1}{2x-3y}$; $v=\dfrac{1}{3x-2y}$;

$$\begin{cases}u+2v=\dfrac{3}{4},\\ 3u+4v=1;\end{cases} \quad \begin{cases}u=\dfrac{3}{4}-2v,\\ \dfrac{9}{4}-2v=1;\end{cases} \quad \begin{cases}u=-\dfrac{1}{2},\\ v=\dfrac{5}{8};\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x-3y=-2,\\ 3x-2y=\dfrac{8}{5};\end{cases} \quad \begin{cases}x=\dfrac{3y-2}{2},\\ \dfrac{3}{2}\left(3y-2\right)-2y=\dfrac{8}{5};\end{cases} \quad \begin{cases}x=\dfrac{3y-2}{2},\\ \dfrac{5}{2}y=\dfrac{23}{5};\end{cases} \quad \begin{cases}x=\dfrac{44}{25},\\ y=\dfrac{46}{25}.\end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{44}{25};\ \dfrac{46}{25}\right)$.

6.109. $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} - \dfrac{10}{x-y} = 1, \\ \dfrac{1}{x+y} + \dfrac{2}{x-y} = -\dfrac{3}{5}. \end{cases}$ Заменим $u = \dfrac{1}{x+y}$; $v = \dfrac{1}{x-y}$;

$\begin{cases} u - 10v = 1, \\ u + 2v = -\dfrac{3}{5}; \end{cases}$ $\begin{cases} u = 1 + 10v, \\ 12v = -\dfrac{8}{5}; \end{cases}$ $\begin{cases} u = -\dfrac{1}{3}, \\ v = -\dfrac{2}{15}; \end{cases}$

$\begin{cases} x + y = -3, \\ x - y = -\dfrac{15}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} y = -3 - x, \\ 2x = -\dfrac{21}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} y = \dfrac{9}{4}, \\ x = -\dfrac{21}{4}. \end{cases}$ Ответ: $\left(-\dfrac{21}{4};\ \dfrac{9}{4}\right)$.

6.110.
$\begin{cases} 2x - 2y = 3xy, \\ 4x^2 + 4y^2 = 5x^2y^2. \end{cases}$ $\begin{cases} 4x^2 - 8xy + 4y^2 = 9x^2y^2, \\ 4x^2 + 4y^2 = 5x^2y^2; \end{cases}$ $\begin{cases} -8xy = 4x^2y^2, \\ 4x^2 + 4y^2 = 5x^2y^2. \end{cases}$

$xy = 0$ или $xy = -2$. Если $xy = 0$, то $x = 0$ и $y = 0$;

$xy = -2$, т.к. $y \neq 0$, то $x = -\dfrac{2}{y}$; $\dfrac{16}{y^2} + 4y^2 = 20$; $y^4 - 5y^2 + 4 = 0$;

$y^2 = 4$ или $y^2 = 1$; $y_{1,2} = \pm 2$, $y_{3,4} = \pm 1$, тогда

$\begin{cases} y = 2, \\ x = -1; \end{cases}$ $\begin{cases} y = -2, \\ x = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 1, \\ x = -2; \end{cases}$ $\begin{cases} y = -1, \\ x = 2. \end{cases}$

Проверкой убеждаемся, что решениями являются (-1; 2) и (-2; 1).
Ответ: (0; 0); (-1; 2); (-2; 1).

6.111. $\begin{cases} 2 + xy = 3x, \\ 4x^2y^2 + 4 = 5x^2; \end{cases}$ $\begin{cases} xy = 3x - 2, \\ 4(3x-2)^2 + 4 = 5x^2; \end{cases}$

$\begin{cases} xy = 3x - 2, \\ 36x^2 - 48x + 16 + 4 = 5x^2; \end{cases}$ $\begin{cases} xy = 3x - 2, \\ 31x^2 - 48x + 20 = 0; \end{cases}$

$\dfrac{D}{4} = 576 - 620 = -54 < 0$ - решений нет. Ответ: решений нет.

6.112. $\begin{cases} 2xy + 1 = 3y, \\ 12x^2y^2 + 8 = 11y^2. \end{cases}$ $xy = \dfrac{3y-1}{2}$; $(xy)^2 = \left(\dfrac{3y-1}{2}\right)^2$.

Тогда: $12\left(\dfrac{3y-1}{2}\right)^2 + 8 = 11y^2$; $27y^2 - 18y - 11y^2 + 11 = 0$;

$16y^2 - 18y + 11 = 0;\ \frac{D}{4} = 81 - 11\cdot 16 < 0$ - решений нет.

Ответ: решений нет.

6.113. $\begin{cases} 2xy + 2 + x = 0, \\ 4x^2y^2 + 4 = 5x^2. \end{cases}$ $2xy = -x - 2;\ 4x^2y^2 = (x + 2)^2$.

Тогда: $(x + 2)^2 + 4 = 5x^2;\ 4x^2 - 4x - 8 = 0;\ x^2 - x - 2 = 0;$

$D = 1 + 8 = 9;\ x_1 = -1,\ x_2 = 2$. Тогда $y_1 = \frac{1}{2};\ y_2 = -1$.

Ответ: $\left(-1;\ \frac{1}{2}\right)$; (2; -1).

6.114. $\begin{cases} xy + x + y = 15, \\ x^2y + xy^2 = 54; \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 15 - xy, \\ xy(x + y) = 54, \end{cases}$ тогда: $xy(15 - xy) = 54;$

замена $xy = t;\ t(15 - t) = 54;\ t^2 - 15t + 54 = 0;\ t_1 = 6,\ t_2 = 9;$

1) $xy = 6,\ x = \frac{6}{y}(y \neq 0);\ \frac{6}{y} + y + 6 = 15;\ y^2 - 9y + 6 = 0;\ D = 57;$

$y_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{57}}{2};\ x_{1,2} = \frac{12}{9 \pm \sqrt{57}} = -\frac{9 \pm \sqrt{57}}{2};$

2) $xy=9,\ x = \frac{9}{y}(y \neq 0);\ \frac{9}{y} + y + 9 = 15;\ y^2 – 6y + 9 = 0;\ y_{3,4} = 3;\ x_{3,4} = 3.$

Ответ: (3; 3); $\left(\frac{9 + \sqrt{57}}{2};\ \frac{9 - \sqrt{57}}{2}\right);\ \left(\frac{9 - \sqrt{57}}{2};\ \frac{9 + \sqrt{57}}{2}\right)$.

6.115. $\begin{cases} xy + x - y = 7, \\ x^2y - y^2x = 12; \end{cases}$ $\begin{cases} x - y = 7 - xy, \\ xy(x - y) = 12; \end{cases}$

$xy(7 - xy) = 12$, замена: $xy = t;\ t^2 - 7t + 12 = 0;\ t_1 = 3,\ t_2 = 4;$

1) $xy = 3;\ x = \frac{3}{y};\ \frac{3}{y} - y + 3 = 7;\ y^2 + 4y - 3 = 0;\ \frac{D}{4} = 4 + 3 = 7;$

$y_{1,2} = -2 \pm \sqrt{7}$, следовательно, $x_{1,2} = \frac{3}{-2 \pm \sqrt{7}} = 2 \pm \sqrt{7};$

2) $xy = 4;\ x = \frac{4}{y};\ \frac{4}{y} - y = 3;$ $y_2 + 3y - 4 = 0;\ y_3 = -4,\ y_4 = 1;$

$x_3 = -1,\ x_4 = 4.$

Ответ: (-1; -4); (4; 1); $(2 + \sqrt{7};\ -2 + \sqrt{7});\ (2 - \sqrt{7};\ -2 - \sqrt{7})$. .

6.117. $\begin{cases} xy^2 + x - y^2 = 21, \\ x^2y^2 - y^4x = 20; \end{cases}$ $\begin{cases} xy^2 + x - y^2 = 21, \\ xy^2\left(x - y^2\right) = 20; \end{cases}$ $\begin{cases} x - y^2 = 21 - xy^2, \\ xy^2\left(21 - xy^2\right) = 20; \end{cases}$

$xy^2(21 - xy^2) = 20$; замена $xy^2 = t$; $t^2 - 21t + 20 = 0$; $t_1 = 20$, $t_2 = 1$;

1) $xy^2 = 20$; $y^2 = \frac{20}{x}$; $x - \frac{20}{x} = 1$; $x^2 - x - 20 = 0$; $x_1 = -4$, $y_1^2 = -5$ – решений нет; $x_2 = 5$, $y_2^2 = 4$, $y = \pm 2$. Решения: (5; 2), (5; -2).

2) $xy^2 = 1$ $y^2 = \frac{1}{x}$; $x - \frac{1}{x} = 20$; $x^2 - 20x - 1 = 0$; $\frac{D}{4} = 101$;

$x_{3,4} = 10 \pm \sqrt{101}$;

при $x = 10 - \sqrt{101}$ y не существует (т.к. $10 - \sqrt{101} < 0$);

при $x = 10 + \sqrt{101}$ $y = \pm\frac{1}{\sqrt{10 + \sqrt{101}}}$.

Ответ: (5; 2); (5; -2); $\left(10 + \sqrt{101}; \frac{1}{\sqrt{10 + \sqrt{101}}}\right)$;

$\left(10 + \sqrt{101}; \frac{-1}{\sqrt{10 + \sqrt{101}}}\right)$.

6.118. $\begin{cases} x^2y + y = 9, \\ y + x^2 = 9. \end{cases}$ Значит, $x^2(y - 1) = 0$; $x = 0 \Rightarrow y = 9$;

y = 1 $\Rightarrow x \pm\sqrt{8}$; Ответ: $(0;9),(\sqrt{8};1),(-\sqrt{8},1)$;

6.119. $\begin{cases} x^2 - xy = 3, \\ xy - y^2 = 2. \end{cases}$ $x^2 - 2xy + y^2 = 1$; $(x - y)^2 = 1$, откуда $x - y = \pm 1$;

1) $\begin{cases} x - y = 1, \\ xy - y^2 = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 + y, \\ y = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3, \\ y = 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - y = -1, \\ xy - y^2 = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x = y - 1, \\ y\left(x - y\right) = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x = -3, \\ y = -2. \end{cases}$ Ответ: (3; 2); (-3; -2).

6.120. $\begin{cases} x + y + xy = 7, \\ x^2 + y^2 + xy = 13; \end{cases}$

$\begin{cases} x + y + xy = 7, \\ \left(x + y\right)^2 - xy = 13. \end{cases}$ Замена $x + y = u$, $xy = v$, получим:

$\begin{cases} u+v=7, \\ u^2-v=13; \end{cases}$ $u^2+u-20=0$; $u_1=-5$, $u_2=4$; $v_1=12$, $v_2=3$.

1) $\begin{cases} x+y=-5, \\ xy=12; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-y-5, \\ -y^2-5y=12; \end{cases}$

$y^2+5y+12=0$; D = 25 – 48 < 0 – решений нет;

2) $\begin{cases} x+y=4, \\ xy=3; \end{cases}$ $\begin{cases} x=4-y, \\ -y^2+4y-3=0; \end{cases}$

$y^2-4y+3=0$; $y_1=3$, $y_2=1$; $x_1=1$, $x_2=3$. Ответ: (1; 3); (3; 1).

6.121. $\begin{cases} x^3+y^3=35, \\ x^2y+y^2x=30; \end{cases}$

$\begin{cases} (x+y)(x^2-xy+y^2)=35, \\ xy(x+y)=30; \end{cases}$ $\begin{cases} (x+y)((x+y)^2-3xy)=35, \\ xy(x+y)=30. \end{cases}$

Замена: $xy=u$, $x+y=v$, тогда:

$\begin{cases} v\left(v^2-3u\right)=35, \\ uv=30; \end{cases}$ $\begin{cases} v^3-90=35, \\ uv=30; \end{cases}$ $\begin{cases} v^3=125, \\ uv=30; \end{cases}$ $\begin{cases} v=5, \\ u=6. \end{cases}$

Значит: $\begin{cases} xy=6, \\ x+y=5; \end{cases}$ $\begin{cases} x=3, \\ y=2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=2, \\ y=3. \end{cases}$ Ответ: (2; 3); (3; 2).

6.122. $\begin{cases} x^2-xy=20y,(1) \\ 5xy-5y^2=4x;(2) \end{cases}$

1) $x=0$, $y=0$ – решение

2) $x\neq y$; $x=0$; $y\neq 0$, Разделим (1) на (2) получим:

$\dfrac{x}{5y}=\dfrac{5y}{x}\Rightarrow x=\pm 5y$; Ответ: (0; 0); (5; 1); $\left(-\dfrac{10}{3};\ \dfrac{2}{3}\right)$.

6.123. $\begin{cases} 4x^2+xy=20y, \\ 4xy+y^2=5x; \end{cases}$ $\begin{cases} x\left(4x+y\right)=20y, \\ y\left(4x+y\right)=5x; \end{cases}$ $\dfrac{20y}{x}=\dfrac{5x}{y}\left(x\neq 0,\ y\neq 0\right)$.

$x=0$, $y=0$; $x^2=4y^2$; $x=\pm 2y$.

1) x=2y; 16y^2+2y^2=20y; 9y^2 = 10y; $y_1=0$, $y_2=\dfrac{10}{9}$; $x_1=0$, $x_2=\dfrac{20}{9}$;

2) $x=-2y$; $16y^2-2y^2=20y$; $7y^2=10y$; $y_3=\dfrac{10}{7}$; $x_3=-\dfrac{20}{7}$.

Ответ: (0; 0); $\left(-\dfrac{20}{7};\ \dfrac{10}{7}\right)$; $\left(\dfrac{20}{9};\ \dfrac{10}{9}\right)$.

6.124. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + y = \dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{1}{x^2} + y^2 = \dfrac{5}{4}. \end{cases}$ Замена $t = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$;

$\begin{cases} t + y = \dfrac{3}{2}, \\ t^2 + y^2 = \dfrac{5}{4}; \end{cases}$ $\begin{cases} t = \dfrac{3}{2} - y, \\ \dfrac{9}{4} - 3y + y^2 + y^2 = \dfrac{5}{4}; \end{cases}$ $\begin{cases} t = \dfrac{3}{2} - y, \\ 2y^2 - 3y + 1 = 0; \end{cases}$

$y_1 = 1$, $t_1 = \dfrac{1}{2}$; $y_2 = \dfrac{1}{2}$, $t_2 = 1$. Т.к. $t = \dfrac{1}{x}$, то $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.

Ответ: $\left(1;\ \dfrac{1}{2}\right)$; (2; 1).

6.125. $\begin{cases} x + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{2}, \\ x^2 + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{5}{4}; \end{cases}$ $\begin{cases} x + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{2}, \\ 2\dfrac{x}{y} = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{2}, \\ y = 2x; \end{cases}$ $\begin{cases} x + \dfrac{1}{2x} = \dfrac{3}{2}, \\ y = 2x; \end{cases}$

$2x^2 - 3x + 1 = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{1}{2}$; $y_1 = 2$, $y_2 = 1$.

Ответ: (1; 2); $\left(\dfrac{1}{2};\ 1\right)$.

6.126. $\begin{cases} 2x + \dfrac{1}{y} = 2, \\ 3x^2 + \dfrac{2}{y^2} = 3. \end{cases}$ Замена $\dfrac{1}{y} = u$, $y \neq 0$

$\begin{cases} 2x + u = 2, \\ 3x^2 + 2u^2 = 3; \end{cases}$ $\begin{cases} u = 2 - 2x, \\ 3x^2 + 2(2 - 2x)^2 = 3; \end{cases}$ $\begin{cases} u = 2 - 2x, \\ 11x^2 - 16x + 5 = 0; \end{cases}$

$11x^2 - 16x + 5 = 0$; $\dfrac{D}{4} = 9$; $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{5}{11}$; $u_1 = 0$, $u_2 = \dfrac{12}{11}$.

Найдем y: $\dfrac{1}{y} = 0$ — решений нет.

$\dfrac{1}{y} = \dfrac{12}{11}$; $y = \dfrac{11}{12}$. Ответ: $\left(\dfrac{5}{11};\ \dfrac{11}{12}\right)$.

6.127. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + y = -\dfrac{1}{2}, \\ y^2 - \dfrac{3}{x^2} = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$ Замена $\dfrac{1}{x} = u$, $x \neq 0$;

$\begin{cases} u + y = -\dfrac{1}{2}, \\ y^2 - 3u^2 = \dfrac{1}{4}; \end{cases}$ $\begin{cases} y = -\dfrac{1}{2} - u, \\ \dfrac{1}{4} + u^2 + u - 3u^2 = \dfrac{1}{4}; \end{cases}$ $\begin{cases} y = -\dfrac{1}{2} - u, \\ -2u^2 + u = 0; \end{cases}$

$u_1 = 0$, но в силу замены $u \neq 0$; $u_2 = \dfrac{1}{2}$; $y = -1$, $x = 2$. Ответ: (2; -1).

6.128. $\begin{cases} x + y = 8, \\ \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{50}{7}. \end{cases}$ $\dfrac{x}{y} = t$; $t + \dfrac{1}{t} = \dfrac{50}{7}$; $7t^2 - 50t + 7 = 0$; $\dfrac{D}{4} = 576$;

$t_{1,2} = \dfrac{25 \pm 24}{7}$; $t_1 = 7$; $t_2 = \dfrac{1}{7}$. Итак,

1) $\begin{cases} x + y = 8, \\ \dfrac{x}{y} = 7; \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 8, \\ x = 7y; \end{cases}$ $y = 1$, $x = 7$;

2) $\begin{cases} x + y = 8, \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{7}; \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 8, \\ y = 7x; \end{cases}$ $y = 7$, $x = 1$. Ответ: (1; 7); (7; 1).

6.129. $\begin{cases} xy = 5, \\ \dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{13}{6}, \end{cases}$ $x \neq \pm y$.

$\dfrac{x+y}{x-y} = t$; $t + \dfrac{1}{t} = \dfrac{13}{6}$; $6t^2 - 13t + 6 = 0$; $D = 25$; $t_1 = \dfrac{2}{3}$, $t_2 = \dfrac{3}{2}$;

1) $\begin{cases} xy = 5, \\ \dfrac{x+y}{x-y} = \dfrac{2}{3}; \end{cases}$ $\begin{cases} xy = 5, \\ 3x + 3y = 2x - 2y; \end{cases}$ $\begin{cases} x = -5y, \\ -5y^2 = 5; \end{cases}$ $\begin{cases} x = -5y, \\ y^2 = -1 \end{cases}$ — решений нет;

2) $\begin{cases} xy = 5, \\ \dfrac{x+y}{x-y} = \dfrac{3}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} xy = 5, \\ 2x + 2y = 3x - 3y; \end{cases}$ $\begin{cases} 5y^2 = 5, \\ x = 5y; \end{cases}$ $y = \pm 1$, $x = \pm 5$

Ответ: (5; 1); (-5; -1).

6.130. $\begin{cases} x-y=\log_2 \dfrac{y}{x}, \\ x^2+y=12; \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+y=12, \\ x-y=\log_2 y-\log_2 x, \\ x>0,\ y>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x^2+y=12, \\ x-y=\log_2(-y)-\log_2(-x), \\ x<0,\ y<0; \end{cases}$

1) $\begin{cases} x^2+y=12, \\ x+\log_2 x=y+\log_2 y, \\ x>0,\ y>0. \end{cases}$ Рассмотрим $f(t)=t+\log_2 t$; $D(f)=(0;+\infty)$.

$f'(t)=1+\dfrac{1}{t\ln 2}$; $f'(t)>0$, $f(x)=f(y)$; $x=y$; $x^2+x-12=0$;

$x_1=3$, $x_2=-4$. Условию $x>0$ удовлетворяет $x=3$, $y=3$.

2) $\begin{cases} x^2+y=12, \\ x-y=\log_2(-y)-\log_2(-x), \\ x<0,\ y<0. \end{cases}$ Рассмотрим $f(t)=t+\log_2(-t)$;

$D(f)=(-\infty;0)$. $f'(t)=1+\dfrac{1}{t\ln 2}$. При $t<-\dfrac{1}{\ln 2}$ $f'(t)<0$; $f(x)=f(y)$;

$x=y$; $x^2+x-12=0$; $x_1=3$, $x_2=-4$. Условию $x<-\dfrac{1}{\ln 2}$ удовлетворяет $x=-4$, $y=-4$. Ответ: $(3; 3)$; $(-4; -4)$.

6.131. $\begin{cases} y-x=\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{x}{y}, \\ x=y^2-6; \end{cases}$

$\begin{cases} x=y^2-6, \\ x+\log_{\frac{1}{2}} x=y+\log_{\frac{1}{2}} y, \\ x>0,\ y>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=y^2-6, \\ x+\log_{\frac{1}{2}}(-x)=y+\log_{\frac{1}{2}}(-y), \\ x<0,\ y<0; \end{cases}$

1) $\begin{cases} x=y^2-6, \\ x+\log_{\frac{1}{2}} x=y+\log_{\frac{1}{2}} y, \\ x>0,\ y>0. \end{cases}$ Рассмотрим $f(t)=t+\log_{\frac{1}{2}} t$; $D(f)=(0;+\infty)$.

$f'(t)=1-\dfrac{1}{t\ln 2}$. При $t>\dfrac{1}{\ln 2}$ $f'(t)<0$; $f(x)=f(y)$, $x=y$;

$x = x^2 - 6$; $x^2 - x - 6 = 0$; $x_1 = -2$, $x_2 = 3$. Условию $x > \frac{1}{\ln 2}$ удовлетворяет $x = 3$, $y = 3$.

2) $\begin{cases} x = y^2 - 6, \\ x + \log_{\frac{1}{2}}(-x) = y + \log_{\frac{1}{2}}(-y), \\ x < 0,\ y < 0 \end{cases}$

Рассмотрим $f(t) = t + \log_{\frac{1}{2}}(-t)$; $D(f) = (-\infty; 0)$. $f'(t) = 1 - \frac{1}{t\ln 2}$;

$f'(t) > 0$; $f(x) = f(y)$, $x = y$; $x^2 + x - 6 = 0$;
$x_1 = 2$, $x_2 = -3$; $x < 0$; $x = -3$, $y = -3$. Ответ: (-3; -3); (2; 2).

6.132. $\begin{cases} 2^x 3^y = 24, \\ 2^y 3^x = 54; \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{2^{x-y}}{3^{x-y}} = \frac{4}{9}, \\ 2^x 3^y = 24; \end{cases}$ $\begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} = \left(\frac{2}{3}\right)^2, \\ 2^x 3^y = 24; \end{cases}$ $\begin{cases} y = x - 2, \\ 2^x 3^x = 24 \cdot 9; \end{cases}$ $\begin{cases} 6^x = 6^3, \\ y = x - 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3, \\ y = 1. \end{cases}$

Ответ: (3; 1).

6.133. $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{3}{2}, \\ xy + x + y = 9, \end{cases}$ $x, y \neq 0$; $\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{3}{2}$, замена: $\sqrt{\frac{x}{y}} = t$, $t > 0$;

$t - \frac{1}{t} = \frac{3}{2}$; $2t^2 - 3t - 2 = 0$; $t_1 = 2$, $t_2 = -\frac{1}{2}$. Т.к. $t > 0$, то

$t = 2$; $\sqrt{\frac{x}{y}} = 2$; $x = 4y$; $4y^2 + 5y - 9 = 0$; $D = 169$;

$y = \frac{-5 \pm 13}{8}$; $y_1 = 1$, $y_2 = -\frac{9}{4}$; $x_1 = 4$; $x_2 = -9$. Ответ: (4; 1); $\left(-9;\ -\frac{9}{4}\right)$.

6.134. $\begin{cases} xy = 16, \\ x^{\log_2 y} = 8; \end{cases}$ $x = \frac{16}{y}$, $\left(\frac{16}{y}\right)^{\log_2 y} = 8$; $\frac{16}{y} = 2^{\log_2 \frac{16}{y}}$;

$2^{\log_2 \frac{16}{y} \cdot \log_2 y} = 2^3$; $\log_2 y(4 - \log_2 y) = 3$, замена $\log_2 y = t$;
$t^2 - 4t + 3 = 0$; $t_1 = 1$; $t_2 = 3$, тогда $y_1 = 2$, $y_2 = 8$; $x_1 = 8$, $x_2 = 2$.
Ответ: (2; 8); (8; 2).

6.135. $\begin{cases}\log_y x=2,\\ x^{\lg y}=100,\end{cases}$ $x>0, y>0, y\neq 1;$ $\begin{cases}x=y^2,\\ y^{2\lg y}=100;\end{cases}$

$y^{2\lg y}=100$, $y=10^{\lg y}$, $y>0$; $(10^{\lg y})^{2\lg y}=10^2$; $2(\lg y)^2=2$; $\lg^2 y=1$;

$y_1=10;$ $y_2=\frac{1}{10};$ $x_1=100,$ $x_2=\frac{1}{100}.$ Ответ: (100; 10); (0,01; 0,1).

6.136. $\begin{cases}\log_2\frac{x^2\sqrt{y+1}}{2}=2,\\ \log_2 x\cdot\log_2(1+y)^2=4,\end{cases}$ $y+1>0, x>0.$

$\begin{cases}2\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2(y+1)=3,\\ \log_2 x\cdot\log_2(1+y)=2;\end{cases}$ Замена $\log_2 x=u$, $\log_2(1+y)=v$;

$\begin{cases}2u+\frac{v}{2}=3,\\ uv=2;\end{cases}$ $\begin{cases}v=6-4u,\\ 6u-4u^2=2;\end{cases}$ $\begin{cases}v=6-4u,\\ 2u^2-3u+1=0;\end{cases}$

$2u^2-3u+1=0$; $u_1=1,$ $u_2=\frac{1}{2},$ тогда $v_1=2$, $v_2=4$;

1) $\begin{cases}\log_2 x=1,\\ \log_2(1+y)=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x=2,\\ y=3;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\log_2 x=\frac{1}{2},\\ \log_2(1+y)=4;\end{cases}$ $\begin{cases}x=\sqrt{2},\\ y=15.\end{cases}$

Ответ: (2; 3); $(\sqrt{2};\ 15)$.

6.137. $\begin{cases}x^{-\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}}=6,\\ \log_4 x+\log_4 y=-3,\end{cases}$ $x>0, y>0;$

$\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}=6,\\ \log_4 xy=-3;\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}-6\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}}=0,\\ xy=\frac{1}{64};\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{64y}}+\sqrt{y}-\frac{3}{4}=0,\\ x=\frac{1}{64y};\end{cases}$

$\frac{1}{8\sqrt{y}}+\sqrt{y}-\frac{3}{4}=0,$ $\sqrt{y}=t,$ $t>0;$ $t^2-\frac{3}{4}t+\frac{1}{8}=0;$ $8t^2-6t+1=0;$

$\frac{D}{4}=1;$ $t_1=\frac{1}{2},$ $t_2=\frac{1}{4}$. Тогда $y_1=\frac{1}{4},$ $y_2=\frac{1}{16},$ $x_1=\frac{1}{16},$ $x_2=\frac{1}{4}.$

Ответ: $\left(\frac{1}{4};\ \frac{1}{16}\right)$; $\left(\frac{1}{16};\ \frac{1}{4}\right)$.

6.138. $\begin{cases}(x+y)3^{y-x}=\dfrac{5}{27},\\ 3\log_5(x+y)=x-y,\end{cases}$ $x+y>0;$

$$\begin{cases}(x+y)=\dfrac{5}{27}\cdot 3^{x-y},\\ 3\log_5\left(\dfrac{5}{27}\cdot 3^{x-y}\right)=x-y;\end{cases}\quad \begin{cases}(x+y)=\dfrac{5}{27}\cdot 3^{x-y},\\ 3-3\log_5 27+(x-y)\cdot 3\log_5 3=x-y.\end{cases}$$

$3(1-\log_5 27)=(x-y)(1-\log_5 27)$; $x-y=3$, тогда $\begin{cases}x+y=5,\\ x-y=3,\end{cases}$

$x=4$, $y=1$. Ответ: (4; 1).

6.139. $\begin{cases}2x-\sin x=2y-\sin y,\\ x+2y=9.\end{cases}$

Пусть $f(t)=2t-\sin t$, $D(f)=R$, $f'(t)=2-\cos t$, $f'(t)>0$.
Равенство $f(x)=f(y)$ возможно лишь при $x=y$. $3y=9$; $y=3$, $x=3$.
Ответ: (3; 3).

6.140. $\begin{cases}3x+\cos x=3y+\cos y,\\ 3x-y=6.\end{cases}$

Пусть $f(t)=3t+\cos t$, $D(f)=R$, $f'(t)=3-\sin t$, $f'(t)>0$.
Равенство $f(x)=f(y)$ возможно лишь при $x=y$.
$3x-x=6$; $x=3$, $y=3$. Ответ: (3; 3).

6.141. $\begin{cases}\sqrt{x+y-1}=1,\\ \sqrt{x-y+2}=2y-2;\end{cases}$

$$\begin{cases}x+y-1=1,\\ x-y+2=4y^2-8y+4,\\ 2y-2\geq 0;\end{cases}\quad \begin{cases}x+y=2,\\ x=4y^2-7y+2,\\ y\geq 1;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=2-y,\\ 4y^2-6y=0,\\ y\geq 1;\end{cases}\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=0,\\ x=2;\end{cases}\\ \begin{cases}y=\dfrac{3}{2},\\ x=\dfrac{1}{2},\end{cases}\end{array}\right.\\ y\geq 1;\end{cases}\quad x=\frac{1}{2},\ y=\frac{3}{2}.$$

Ответ: $\left(\dfrac{1}{2};\ \dfrac{3}{2}\right)$.

6.142. $\begin{cases}\sqrt{x-y+5}=3,\\ \sqrt{x+y-5}=-2x+11;\end{cases}$

$\begin{cases}x-y+5=9,\\ x+y-5=4x^2-44x+121,\\ 11-2x\ge 0;\end{cases}$ $\begin{cases}y=x-4,\\ 4x^2-46x+130=0,\\ x\le \dfrac{11}{2};\end{cases}$

$2x^2-23x+65=0$; $D=9$; $x_1=5$, $x_2=\dfrac{13}{2}$, но $\dfrac{13}{2}>\dfrac{11}{2}$; $x=5$, $y=1$.

Ответ: (5; 1).

6.143. $\begin{cases}\sqrt{x+3y+1}=2,\\ \sqrt{2x-y+2}=7y-6;\end{cases}$ $\begin{cases}x+3y+1=4,\\ 2x-y+2=49y^2-84y+36,\\ 7y-6\ge 0;\end{cases}$

$\begin{cases}x=3-3y,\\ 6-6y-y+2=49y^2-84y+36,\\ y\ge \dfrac{6}{7};\end{cases}$ $\begin{cases}x=3-3y,\\ 49y^2-77y+28=0,\\ y\ge \dfrac{6}{7};\end{cases}$

$49y^2-77y+28=0$; $7y^2-11y+4=0$; $D=9$; $y_{1,2}=\dfrac{11\pm 3}{14}$;

$y_1=1$; $y_2=\dfrac{4}{7}$ - неравенству $y\ge\dfrac{6}{7}$ не удовлетворяет; $y=1$, $x=0$.

Ответ: (0; 1).

6.144. $\begin{cases}\sqrt{y-x-1}=1,\\ \sqrt{x-2y+3}=3y-2x-1.\end{cases}$

Замена: $3y-2x=u$, $y-x=v$, тогда $x-2y=v-u$.

$\begin{cases}\sqrt{v-1}=1,\\ \sqrt{v-u+3}=u-1;\end{cases}$ $\begin{cases}v=2,\\ v-u+3=u^2-2u+1,\\ u-1\ge 0;\end{cases}$

$\begin{cases}v=2,\\ u^2-u-4=0,\\ u\ge 1;\end{cases}$ $u^2-u-4=0$; $D=17$; $u_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{2}$.

Т.к. $u\ge 1$, то $u=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$, тогда

$$\begin{cases} y-x=2, \\ 3y-2x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} y=x+2, \\ x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}-6; \end{cases} \quad \begin{cases} y=\dfrac{-7+\sqrt{17}}{2}, \\ x=\dfrac{-11+\sqrt{17}}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{-11+\sqrt{17}}{2}; \dfrac{-7+\sqrt{17}}{2}\right)$.

Модули

6.145. $|2x-3| = 3-2x$; $2x-3 \le 0$; $x \le 1,5$. Ответ: $(-\infty; 1,5]$.

6.146. $|4-5x| = 5x-4$; $5x-4 \ge 0$; $x \ge 0,8$. Ответ: $[0,8; \infty)$.

6.147. $|3x-5| = 5-3x$; $5-3x \ge 0$, $x \ge 1\frac{2}{3}$. Ответ: $\left(-\infty; 1\frac{2}{3}\right]$.

6.148. $|7-4x| = 7-4x$; $7-4x \ge 0$, $x \ge \frac{7}{4}$. Ответ: $\left(-\infty; \frac{7}{4}\right]$.

6.149. $|5x-13| - |6-5x| = 7$;

1) $5x < 6$: $-5x + 13 - 6 + 5x = 7$; $7 = 7$; $x < 1,2$;

2) $6 \le 5x \le 13$: $-5x + 13 + 6 - 5x = 7$; $5x = 6$; $x = 1,2$;

3) $5x > 13$: $5x - 13 + 6 - 5x = 7$; $-7 = 7$ – неверно, решений нет.

Ответ: $(-\infty; 1,2]$.

6.150. $|3x-8| - |3x-2| = 6$;

1) $\begin{cases} 3x-2<0, \\ -3x+8+3x-2=6; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x<2, \\ 6=6; \end{cases}$ $x<\frac{2}{3}$;

2) $\begin{cases} 3x-8\le 0, \\ 3x-2\ge 0, \\ -3x+8-3x+2=6; \end{cases}$ $\begin{cases} 2\le 3x\le 8, \\ 3x=2; \end{cases}$ $x=\frac{2}{3}$;

3) $\begin{cases} 3x-2>0, \\ 3x-8-3x+2=6; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x>2, \\ -6=6 \end{cases}$ - неверно, решений нет.

Ответ: $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$.

6.151. $|16-9x| - |9x-5| = 11$;

1) $\begin{cases} 9x-5<0, \\ 16-9x+9x-5=11, \end{cases}$ $\begin{cases} 9x-5<0, \\ 11=11; \end{cases}$ $x<\frac{5}{9}$;

2) $\begin{cases} 5 \le 9x \le 16, \\ 16 - 9x - 9x + 5 = 11; \end{cases}$ $\begin{cases} 5 \le 9x \le 16, \\ 9x = 5; \end{cases}$ $x = \dfrac{5}{9}$;

3) $\begin{cases} 9x > 16, \\ -16 + 9x - 9x + 5 = 11; \end{cases}$ $\begin{cases} x > \dfrac{16}{9}, \\ -11 = 11 \end{cases}$ - неверно, решений нет.

Ответ: $\left(-\infty;\ \dfrac{5}{9}\right]$.

6.152. $|7x - 12| - |7x - 1| = 1$;

1) $\begin{cases} 7x < 1, \\ -7x + 12 + 7x - 1 = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} 7x < 1, \\ 11 = 1 \end{cases}$ - неверно, решений нет;

2) $\begin{cases} 1 \le 7x \le 12, \\ -7x + 12 - 7x + 1 = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} 1 \le 7x \le 12, \\ 7x = 6; \end{cases}$ $x = \dfrac{6}{7}$;

3) $\begin{cases} 7x > 12, \\ 7x - 12 - 7x + 1 = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x > \dfrac{12}{7}, \\ -11 = 1 \end{cases}$ - неверно, решений нет.

Ответ: $\dfrac{6}{7}$.

6.153. $x^2 - 6|x| - 2 = 0$; Пусть $t = |x|; t^2 - 6t - 2 = 0$

$t_1 = \sqrt{11} + 3; t_2 = 3 - \sqrt{11} < 0; |x| = \sqrt{11} + 3$ Ответ: $\sqrt{11} + 3; -\sqrt{11} - 3$.

6.154. $x^2 - 4|x| - 1 = 0$; $t = |x|; t^2 - 4t - 1 = 0; t = 2 \pm \sqrt{5}$
$|x| = 2 + \sqrt{5}$

Ответ: $2 + \sqrt{5};\ -2 - \sqrt{5}$.

6.155. $\dfrac{x}{|x|} + x = x^2 + 1$; 1) $\begin{cases} x > 0, \\ x^2 - x = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 1; \end{array}\right. \end{cases}$ $x = 1$;

2) $\begin{cases} x < 0, \\ -1 + x = x^2 + 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0, \\ x^2 - x + 2 = 0; \end{cases}$ $D < 0$ – решений нет.

Ответ: 1.

6.156. $-2\dfrac{x}{|x|} - 2x = x^2 + 2$;

1) $\begin{cases} x > 0, \\ -2 - 2x = x^2 + 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0, \\ x^2 + 2x + 4 = 0, D < 0, \end{cases}$ — нет решений;

2) $\begin{cases} x < 0, \\ 2 - 2x = x^2 + 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0, \\ x^2 + 2x = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -2; \end{array} \right. \end{cases}$ $x = -2$. Ответ: -2.

6.157. $5^{|4x-6|} = 25^{3x-4}$; $5^{|4x-6|} = 56^{6x-8}$; $|4x - 6| = 6x - 8$;

1) $\begin{cases} 4x - 6 \geq 0, \\ 4x - 6 = 6x - 8; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 1\frac{1}{2}, \\ x = 1; \end{cases}$ - решений нет;

2) $\begin{cases} 4x - 6 < 0, \\ -4x + 6 = 6x - 8; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 1\frac{1}{2}, \\ x = 1,4; \end{cases}$ $x = 1,4$. Ответ: 1,4.

6.158. $3^{|3x-4|} = 9^{2x-2}$; $3^{|3x-4|} = 3^{4x-4}$; $|3x - 4| = 4x - 4$;

1) $\begin{cases} 3x - 4 \geq 0, \\ 3x - 4 = 4x - 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 1\frac{1}{3}, \\ x = 0 \end{cases}$ - нет решений;

2) $\begin{cases} 3x - 4 < 0, \\ -3x + 4 = 4x - 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 1\frac{1}{3}, \\ x = 1\frac{1}{7}; \end{cases}$ $x = 1\frac{1}{7}$. Ответ: $1\frac{1}{7}$.

6.159. $9^{|3x-1|} = 3^{8x-2}$; $3^{2|3x-1|} = 3^{8x-2}$; $2|3x - 1| = 8x - 2$;

1) $\begin{cases} 3x - 1 \geq 0, \\ 2(3x - 1) = 8x - 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq \frac{1}{3}, \\ x = 0 \end{cases}$ - решений нет;

2) $\begin{cases} 3x - 1 < 0, \\ -6x + 2 = 8x - 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x < \frac{1}{3}, \\ x = \frac{2}{7}; \end{cases}$ $x = \frac{2}{7}$. Ответ: $\frac{2}{7}$.

6.160. $25^{|1-2x|} = 5^{4-6x}$; $5^{2|1-2x|} = 5^{4-6x}$; $2|1 - 2x| = 4 - 6x$;

1) $\begin{cases} 1 - 2x \geq 0, \\ 2 - 4x = 4 - 6x; \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq \frac{1}{2}, \\ x = 1 \end{cases}$ - решений нет;

2) $\begin{cases} 1 - 2x < 0, \\ 4x - 2 = 4 - 6x; \end{cases}$ $\begin{cases} x > \frac{1}{2}, \\ x = 0,6; \end{cases}$ $x = \frac{3}{5}$. Ответ: 0,6.

6.161. $|\sin x| = \sin x + 2\cos x;$

1) $\begin{cases} 0 \le \sin x \le 1, \\ \sin x = \sin x + 2\cos x; \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \le \sin x \le 1, \\ \cos x = 0; \end{cases}$ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z;$

2) $\begin{cases} -1 \le \sin x < 0, \\ -\sin x = \sin x + 2\cos x; \end{cases}$ $\begin{cases} -1 \le \sin x < 0, \\ -\sin x = \cos x; \end{cases}$ $\begin{cases} -1 \le \sin x < 0, \\ tgx = -1; \end{cases}$

$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z.$ Ответ: $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z.$

6.162. $|tgx| = tgx - \frac{1}{\cos x};$

1) $\begin{cases} tgx \ge 0, \\ tgx = tgx - \frac{1}{\cos x}; \end{cases}$ $\begin{cases} tgx \ge 0, \\ \frac{1}{\cos x} = 0 \end{cases}$ - решений нет.

2) $\begin{cases} tgx < 0, \\ -tgx = tgx - \frac{1}{\cos x}; \end{cases}$ $\begin{cases} tgx < 0, \\ 2\sin x - 1 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} tgx < 0, \\ \sin x = \frac{1}{2}; \end{cases}$

$x = \frac{5}{6}\pi + 2\pi k, k \in Z.$ Ответ: $\frac{5}{6}\pi + 2\pi k, k \in Z.$

6.163. $|\cos x| = \cos x - 2\sin x;$

1) $\begin{cases} 0 \le \cos x \le 1, \\ \cos x = \cos x - 2\sin x; \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \le \cos x \le 1, \\ \sin x = 0; \end{cases}$ $x = 2\pi n,\ n \in Z;$

2) $\begin{cases} -1 \le \cos x < 0, \\ -\cos x = \cos x - 2\sin x; \end{cases}$ $\begin{cases} -1 \le \cos x < 0, \\ \cos x = \sin x; \end{cases}$

$x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z.$ Ответ: $2\pi n,\ -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ n, k \in Z.$

6.164. $|ctgx| = ctgx + \frac{1}{\sin x};$

1) $\begin{cases} ctgx \ge 0, \\ ctgx = ctgx + \frac{1}{\sin x}; \end{cases}$ $\begin{cases} ctgx \ge 0, \\ \frac{1}{\sin x} = 0 \end{cases}$ - нет решений;

2) $\begin{cases} ctgx < 0, \\ -ctgx = ctgx + \frac{1}{\sin x}; \end{cases}$ $\begin{cases} ctgx < 0, \\ 2\cos x + 1 = 0; \end{cases}$

$x = \frac{2}{3}\pi + 2\pi n, n \in Z.$ Ответ: $\frac{2}{3}\pi + 2\pi n, n \in Z.$

6.165. $\cos x = |\cos x|(x + 1{,}5)^2$; $\cos x \geq 0$;

1) $\cos x = \cos x(x + 1{,}5)^2$; $\begin{cases} \cos x \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ (x+1{,}5)^2 = 1; \end{array}\right. \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \\ x = -0{,}5. \end{array}\right.$

2. $\cos x < 0$; $\cos x = -\cos x\,(x + 1{,}5)^2$; $\begin{cases} \cos x < 0 \\ (x+1{,}5)^2 \end{cases}$ – решений нет.

Ответ: -0,5; $\dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$

6.166. $|\cos x| = \cos x(x - 2)^2$; $\cos x \geq 0$; $\cos x = \cos x(x - 2)^2$;

$\begin{cases} \cos x \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ (x-2)^2 = 1; \end{array}\right. \end{cases}$ $\begin{cases} \cos x \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ x - 2 = 1, \\ x - 2 = -1; \end{array}\right. \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \\ x = 1. \end{array}\right.$

$\cos x < 0$; $-\cos x = \cos x\,(x - 1)^2$; $(x - 1) = -1$ — решений нет.

Ответ: 1; $\dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

6.167. $\cos x = |\sin x|$; 1) $\begin{cases} 0 \leq \sin x \leq 1, \\ \cos x = \sin x; \end{cases}$ $x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z;$

2) $\begin{cases} -1 \leq \sin x < 0, \\ \cos x = -\sin x; \end{cases}$ $x = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z.$ Ответ: $\pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z.$

6.168. $\sqrt{3}\sin x = |\cos x|;$

1) $\begin{cases} 0 \leq \cos x \leq 1, \\ \sqrt{3}\sin x = \cos x; \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \leq \cos x \leq 1, \\ \sqrt{3}tgx = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \leq \cos x \leq 1, \\ x = \dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z; \end{cases}$

$\cos x \neq 0$; $x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z;$

2) $\begin{cases} -1 \leq \cos x < 0, \\ \sqrt{3}\sin x = -\cos x; \end{cases}$ $\begin{cases} -1 \leq \cos x < 0, \\ \sqrt{3}tgx = -1; \end{cases}$ $\begin{cases} -1 \leq \cos x < 0, \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + \pi k; \end{cases}$

$x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z.$ Ответ: $\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$; $\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $n, k \in Z$.

6.169. $2\sin^2 x = |\sin x|$;

1) $\begin{cases} 0 \leq \sin x \leq 1, \\ 2\sin^2 x - \sin x = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \leq \sin x \leq 1, \\ \sin x(2\sin x - 1) = 0; \end{cases}$

sinx = 0 или sinx = ½ ; $x = \pi n$; $x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$

2) $\begin{cases} -1 \le \sin x < 0, \\ 2\sin^2 x + \sin x = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} -1 \le \sin x < 0, \\ \sin x(2\sin x + 1) = 0; \end{cases}$

$\sin x = -\frac{1}{2}$; $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$; Ответ: $\pi k; \pm\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$

6.170. $2\cos^2 x = |\sin x|$;

1) $\begin{cases} 0 \le \sin x \le 1, \\ 2(1 - \sin^2 x) = \sin x; \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \le \sin x \le 1, \\ 2\sin^2 x + \sin x - 2 = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} 0 \le \sin x \le 1, \\ \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}, \\ \sin x = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}; \end{array}\right. \end{cases}$ $x = (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{17}-1}{4} + \pi n$;

2) $\begin{cases} -1 \le \sin x < 0, \\ 2(1 - \sin^2 x) = -\sin x; \end{cases}$ $\begin{cases} -1 \le \sin x < 0, \\ 2\sin^2 x - \sin x - 2 = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} -1 \le \sin x < 0, \\ \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1-\sqrt{17}}{4}, \\ \sin x = \frac{1+\sqrt{17}}{4}; \end{array}\right. \end{cases}$ $x = (-1)^k \arcsin\frac{1-\sqrt{17}}{4} + \pi k$;

Ответ: $\pm\arcsin\left(\frac{\sqrt{17}-1}{4}\right) + \pi n$; n $\in Z$.

6.171. $2\cos^2 x = |\cos x|$;

1) $\begin{cases} 0 \le \cos x \le 1, \\ 2\cos^2 x = \cos x; \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \le \cos x \le 1, \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \cos x = \frac{1}{2}; \end{array}\right. \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z, \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z; \end{array}\right.$

2) $\begin{cases} -1 \le \cos x < 0, \\ 2\cos^2 x + \cos x = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} -1 \le \cos x < 0, \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \cos x = -\frac{1}{2}; \end{array}\right. \end{cases}$ $x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2\pi l$;

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$; $n, k \in Z$.

6.172. $3tgx=\sqrt{3}\left|\sin x\right|;$

1) $\begin{cases}0\le\sin x\le 1,\\ 3tgx=\sqrt{3}\sin x;\end{cases}$ $\begin{cases}0\le\sin x\le 1,\\ \sqrt{3}\sin x\left(\sqrt{3}-\cos x\right)=0;\end{cases}$ $\begin{cases}0\le\sin x\le 1,\\ \left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \cos x=\sqrt{3};\end{array}\right.\end{cases}$ $x=\pi k;$

2) $\begin{cases}-1\le\sin x<0,\\ 3tgx=-\sqrt{3}\sin x;\end{cases}$ $\begin{cases}-1\le\sin x<0,\\ \sqrt{3}\sin x\left(\sqrt{3}+\cos x\right)=0;\end{cases}$ $\begin{cases}-1\le\sin x<0,\\ \begin{cases}\sin x=0,\\ \cos x=-\sqrt{3}\end{cases}\end{cases}$ -

нет решений. Ответ: $\pi k,\ k\in Z.$

6.173. $\sqrt{3}ctgx=3\left|\cos x\right|;$

1) $\begin{cases}0\le\cos x\le 1,\\ \sqrt{3}ctgx=3\cos x;\end{cases}$ $\begin{cases}0\le\cos x\le 1,\\ \sqrt{3}\cos x\left(1-\sqrt{3}\sin x\right)=0;\end{cases}$

$\begin{cases}0\le\cos x\le 1,\\ \left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{3};\end{array}\right.\end{cases}$ $\begin{cases}0\le\cos x\le 1,\\ \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,n\in Z,\\ x=(-1)^k\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\pi k,k\in Z;\end{array}\right.\end{cases}$

$\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,n\in Z,\\ x=\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{3}+2\pi k,k\in Z;\end{array}\right.$

2) $\begin{cases}-1\le\cos x<0,\\ \sqrt{3}ctgx=-3\cos x;\end{cases}$ $\begin{cases}-1\le\cos x<0,\\ \sqrt{3}\cos x\left(1+\sqrt{3}\sin x\right)=0;\end{cases}$

$\begin{cases}-1\le\cos x<0,\\ \left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \sin x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3};\end{array}\right.\end{cases}$ $\mathrm{x}=\pi+\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{3}+2\pi m,m\in Z$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2}+\pi n;\ \arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{3}+2\pi k;\ \pi+\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{3}+2\pi m;\ \ n,m,k\in Z.$

6.174. $2\sin^2 x=\left|\sqrt{3}tgx\right|;$

1) $\begin{cases}tgx\ge 0,\\ 2\sin^2 x=\sqrt{3}tgx;\end{cases}$ $\begin{cases}\pi n\le x<\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\\ \sin x\left(\sin 2x-\sqrt{3}\right)=0;\end{cases}$

$\begin{cases} \pi n \le x < \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \\ \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \sin 2x = \sqrt{3}; \end{array} \right. \end{cases}$ $\begin{cases} \pi n \le x < \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \\ x = \pi m; \end{cases}$; x = πn, n ∈ Z

2) $\begin{cases} tgx < 0, \\ 2\sin^2 x = -\sqrt{3}tgx; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{\pi}{2} + \pi k < x < \pi(k+1), \\ \sin x\left(\sin 2x + \sqrt{3}\right) = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} \dfrac{\pi}{2} + \pi k < x < \pi(k+1), \\ \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \sin 2x = -\sqrt{3} \end{array} \right. \end{cases}$ - решений нет. Ответ: $\pi n,\ n \in Z$.

6.175. $2\cos^2 x = |ctgx|$;

1) $\begin{cases} ctgx \ge 0, \\ 2\cos^2 x - ctgx = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \pi n < x \le \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \\ \cos x(\sin 2x - 1) = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} \pi n < x \le \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \sin 2x = 1; \end{array} \right. \end{cases}$ $\begin{cases} \pi n < x \le \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi m, m \in Z, \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \pi l, l \in Z; \end{array} \right. \end{cases}$

2) $\begin{cases} ctgx < 0, \\ 2\cos^2 x + ctgx = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{\pi}{2} + \pi k < x < \pi(k+1), k \in Z, \\ \cos x(\sin 2x + 1) = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} \dfrac{\pi}{2} + \pi k < x < \pi(k+1), k \in Z, \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \sin 2x = -1; \end{array} \right. \end{cases}$ $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2} + \pi m;\ \pm\dfrac{\pi}{4} + \pi k;\ n \in Z.$

6.176. $4^{|x-2|\sin x} = 2^{x|\sin x|}$; $2^{2|x-2|\sin x} = 2^{x|\sin x|}$; $2|x-2|\sin x = x|\sin x|$;

1) $\begin{cases} x - 2 > 0, \\ 0 < \sin x \le 1, \\ (2x-4)\sin x = x\sin x; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 2, \\ 0 < \sin x \le 1, \\ \sin x(2x - 4 - x) = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x > 2, \\ 0 < \sin x \le 1, \\ x = 4 \end{cases}$ - нет решений;

2) $\begin{cases} x - 2 \ge 0, \\ -1 \le \sin x \le 0, \\ (2x-4)\sin x = -x\sin x; \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge 2, \\ -1 \le \sin x \le 0, \\ \sin x(2x - 4 + x) = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge 2, \\ -1 \le \sin x \le 0, x = \pi n; \\ \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ x = 1\frac{1}{3}; \end{array}\right. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - 2 < 0, \\ - < \sin x \le 1, \\ (4 - 2x)\sin x = x\sin x; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 2, \\ 0 < \sin x \le 1, \\ \sin x(4 - 2x - x) = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 2, \\ x = 1\frac{1}{3}; \end{cases}$ $x = 1\frac{1}{3}$;

4) $\begin{cases} x - 2 < 0, \\ -1 \le \sin x < 0, \\ (4 - 2x)\sin x + x\sin x = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 2, \\ \sin x < 0, \\ \sin x(4 - x) = 0 \end{cases}$ - решений нет;

Ответ: πn, $n \in Z$; $1\frac{1}{3}$.

6.177. $\sin x = \mathrm{tg}\, x \cdot |\sin x|$;

1) $\begin{cases} 0 \le \sin x \le 1, \\ \sin x = tgx \sin x; \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \le \sin x \le 1, \\ \sin x(1 - tgx) = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \le \sin x \le 1, \\ \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ tgx = 1; \end{array}\right. \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} x = \pi n, n \in Z, \\ x = \frac{\pi}{4} + 2\pi m, m \in Z; \end{array}\right.$

2) $\begin{cases} -1 \le \sin x < 0, \\ \sin x = -tgx \sin x; \end{cases}$ $\begin{cases} -1 \le \sin x < 0, \\ \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ tgx = -1; \end{array}\right. \end{cases}$ $tgx = -1$; $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$.

Ответ: πn; $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $n, k \in Z$.

6.178. $\cos x = \mathrm{tg}\, x \cdot |\cos x|$; $\cos x \ne 0$

1) $\begin{cases} 0 < \cos x \le 1, \\ tgx = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} 0 < \cos x \le 1, \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z; \end{cases}$ $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$

2) $\begin{cases}-1 \le \cos x < 0, \\ tgx = -1;\end{cases}$ $\begin{cases}-1 \le \cos x < 0, \\ x = -\dfrac{\pi}{4} = \pi n, n \in Z\end{cases}$ $x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z.$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n;$ $\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k;$ $n \in Z.$

6.179. $|\cos x|(2x - 4) = |x - 2|$; $2|\cos x|(x - 2) = |x - 2|$;
$x > 2$, $2\left|\cos x\right| = -1$ решений нет.

$\left[\begin{array}{l} x-2=0, \\ \begin{cases} x-2>0, \\ 2|\cos x| = 1; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=2, \\ \begin{cases} x>2, \\ |\cos x| = \dfrac{1}{2}; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=2, \\ \begin{cases} x>2, \\ \cos x = \pm\dfrac{1}{2}; \end{cases} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x=2, \\ \begin{cases} x>2, \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=2, \\ x = \dfrac{\pi}{3} + \pi k, k \in N, \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + \pi k, k \in N. \end{array}\right.$

Ответ: 2; $\pm\dfrac{\pi}{3} + \pi k;$ $\pi \in Z$.

6.180. $|\sin x|(4x + 2) = |2x + 1|$;
$2|\sin x|(2x + 1) = |2x + 1|$;
$2x + 1 < 0$; $\left|\sin x\right| = -1/2$ решений нет.

$\left[\begin{array}{l} x=-0,5 \\ \begin{cases} x>-0,5 \\ \sin x = \pm 0,5 \end{cases} \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x=-0,5 \\ x = \pi n \pm \dfrac{\pi}{6}, n \in N \\ x = \dfrac{\pi}{6} \end{array}\right.$ Ответ: $-0,5;$ $\dfrac{\pi}{6}; \pi n \pm \dfrac{\pi}{6}, n \in N.$

6.181. $|\text{tg}\, x|(x + 3) = |x + 3|$;
$x + 3 < 0$; $\left|\text{tg}x\right| = -1$, решений нет

$\left[\begin{array}{l} x+3=0, \\ \begin{cases} x+3>0, \\ |tgx| = 1; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=-3, \\ \begin{cases} x>-3, \\ \left[\begin{array}{l} tgx = 1, \\ tgx = -1; \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=-3, \\ \begin{cases} x>-3, \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z, \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z; \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} x=-3, \\ x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n, n=-1,0,1,... \\ x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi k, k=0,1,... \end{array}\right.$$

Ответ: -3; $\dfrac{\pi}{4}+\pi n, n=-1,0,1,...;$ $-\dfrac{\pi}{4}+\pi k, k=0,1,....$

6.182. $|\text{ctg}\, x|(2x-3)=|2x-3|$; $2\text{x}-3>0$; $|\text{ctgx}|=-1$ решений нет.

$$\left[\begin{array}{l} 2x-3=0, \\ \begin{cases} 2x-3>0, \\ |ctgx|=1; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2}, \\ \begin{cases} x>\dfrac{3}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} ctgx=1, \\ ctgx=-1; \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2}, \\ \begin{cases} x>\dfrac{3}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z, \\ x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z; \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2}, \\ x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n, n\in N, \\ x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi k, k\in N. \end{array}\right.$$ Ответ: $\pm\dfrac{\pi}{4}+\pi n;\ \pi\in N,$

6.183. $8^x \geq 6\cdot 9^{|x-1|}$;

1) $\begin{cases} x-1\geq 0, \\ 8^x\geq 6\cdot 9^{x-1}; \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq 1, \\ 8^x\geq \dfrac{2}{3}\cdot 9^x; \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq 1, \\ \left(\dfrac{8}{9}\right)^x\geq \dfrac{2}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq 1, \\ x\leq \log_{\frac{8}{9}}\dfrac{2}{3}; \end{cases}$

$1\leq x\leq \log_{\frac{8}{9}}\dfrac{2}{3}$;

2) $\begin{cases} x-1<0, \\ 8^x\geq 6\cdot 9^{1-x}; \end{cases}$ $\begin{cases} x<1, \\ 8^x\geq 9\cdot\left(\dfrac{1}{9}\right)^x\cdot 6; \end{cases}$ $\begin{cases} x<1, \\ (8\cdot 9)^x=54; \end{cases}$

$\begin{cases} x<1, \\ x\geq \log_{72}54; \end{cases}$ $\log_{72}54\leq x<1.$ Ответ: $\left[\log_{72}54;\ \log_{\frac{8}{9}}\dfrac{2}{3}\right].$

6.184. $25^{x+1} \geq 10 \cdot 32^{|x-1|+1}$;

1) $\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ 25^{x+1} \geq 10 \cdot 32^x; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 1, \\ \dfrac{5^{2x+2}}{5} \geq 2 \cdot 32^x; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 1, \\ 5^{2x+1} \geq 2^{5x+1}; \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq 1, \\ 2x+1 \geq (5x+1)\log_5 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 1, \\ x(2-\log_5 32) \geq \log_5 2 - 1; \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq 1, \\ x \leq \dfrac{\log_5 2 - 1}{2 - 5\log_5 2}; \end{cases}$ $x \in \left[1;\ \dfrac{\log_5 2 - 1}{2 - 5\log_5 2}\right]$;

$\dfrac{\log_5 2 - 1}{2 - 5\log_5 2} = \log_{\frac{25}{32}} \dfrac{2}{3} > 1, т.к. \dfrac{2}{5} < \dfrac{25}{32}$

2) $\begin{cases} x-1 < 0, \\ 25^{x+1} \geq 10 \cdot 32^{1-x+1}; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 1, \\ \dfrac{5^{2x+2}}{5} \geq 2 \cdot 32^{2-x}; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 1, \\ 5^{2x+1} \geq 2^{11-5x}; \end{cases}$

$\begin{cases} x < 1, \\ 2x+1 \geq (11-5x)\log_5 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 1, \\ x \geq \dfrac{11\log_5 2 - 1}{2 + 5\log_5 2}; \end{cases}$

$\dfrac{11\log_5 2 - 1}{2 + 5\log_5 2} = \dfrac{\log_5 509{,}6}{\log_5 800}$; $x \in \left[\dfrac{11\log_5 2 - 1}{2 + 5\log_5 2};\ 1\right)$.

Ответ: $\left[\dfrac{11\log_5 2 - 1}{2 + 5\log_5 2};\ \dfrac{\log_5 2 - 1}{2 - 5\log_5 2}\right]$.

6.185. $|e^x - 1| = (2x+3)(e^x - 1)$;

1) $\begin{cases} e^x - 1 \geq 0, \\ (e^x - 1)(1 - 2x - 3) = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} e^x \geq 1, \\ \left[\begin{array}{l} e^x = 1, \\ x = -1; \end{array}\right. \end{cases}$ $x = 0$;

2) $\begin{cases} e^x - 1 < 0, \\ (e^x - 1)(2x + 3 + 1) = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} e^x < 1, \\ x = -2; \end{cases}$ $x = -2$. Ответ: -2; 0.

6.186. $\sin^2 x = \cos x \cdot |\sin x|$;

1) $\begin{cases} 0 \leq \sin x \leq 1, \\ \sin^2 x - \cos x \sin x = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \leq \sin x \leq 1, \\ \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \sin x = \cos x; \end{array}\right. \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x = \pi n, n \in Z, \\ x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z; \end{array}\right.$

2) $\begin{cases} -1 \le \sin x < 0, \\ \sin^2 x + \cos x \sin x = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} -1 \le \sin x < 0, \\ \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \sin x = -\cos x; \end{array} \right. \end{cases}$

$x = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi m, m \in Z.$ Ответ: πn; $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k,\ \ n, k \in Z.$

6.187. $\cos^2 x = \sin x \cdot |\cos x|$;

1) $\begin{cases} \cos x \ge 0, \\ \cos^2 x = \sin x \cdot \cos x; \end{cases}$ $\begin{cases} \cos x \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \cos x = \sin x; \end{array} \right. \end{cases}$

$\begin{cases} \cos x \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z, \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z; \end{array} \right. \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z, \\ x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi m, m \in Z; \end{array} \right.$

2) $\begin{cases} \cos x < 0, \\ \cos^2 x = -\sin x \cdot \cos x; \end{cases}$ $\begin{cases} \cos x < 0, \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \cos x = -\sin x; \end{array} \right. \end{cases}$ $\begin{cases} \cos x < 0, \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z; \end{cases}$

$x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi l, l \in Z.$ Ответ: $\dfrac{\pi}{2} + \pi k;\ \dfrac{\pi}{4} + 2\pi m;\ \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi l,\ \ k, m, l \in Z.$

6.188. $|e^x - 1| = (3x + 2)(e^x - 1)$;

1) $\begin{cases} e^x - 1 \ge 0, \\ \left(e^x - 1\right)\left(3x + 2 - 1\right) = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} e^x \ge 1, \\ \left[\begin{array}{l} e^x = 1, \\ x = -\dfrac{1}{3}; \end{array} \right. \end{cases}$ $x = 0;$

2) $\begin{cases} e^x - 1 < 0, \\ \left(e^x - 1\right)\left(3x + 2 + 1\right) = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} e^x < 1, \\ x = -1; \end{cases}$ $x = -1$. Ответ: -1; 0.

6.189. $|\sin x| + \sin x(x - 4)^2 = 0$;

1) $\begin{cases} 0 \le \sin x \le 1, \\ \sin x\left(1 + \left(x - 4\right)^2\right) = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \le \sin x \le 1, \\ \sin x = 0; \end{cases}$ $x = \pi n,\ n \in Z;$

2) $\begin{cases} -1 \le \sin x < 0, \\ \sin x\left(\left(x - 4\right)^2 - 1\right) = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} -1 \le \sin x < 0, \\ \left(x - 3\right)\left(x - 5\right) = 0; \end{cases}$ $x = 5.$

Ответ: 5; $\pi n,\ n \in Z.$

6.190. $\sin x + |\sin x|(x + 1{,}5)^2 = 0$;

1) $\begin{cases} 0 \le \sin x \le 1, \\ \sin x\left(1 + (x+1{,}5)^2\right) = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \le \sin x \le 1, \\ \sin x = 0; \end{cases}$ $x = \pi k,\ k \in Z$;

2) $\begin{cases} -1 \le \sin x < 0, \\ \sin x\left(1 - (x+1{,}5)^2\right) = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} -1 \le \sin x < 0, \\ (x+2{,}5)(-x-0{,}5) = 0; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x = -0{,}5, \\ x = -2{,}5. \end{array}\right.$

Ответ: -0,5; -2,5; $\pi k,\ k \in Z$.

6.191. $|\log_2 x - 1| = (4 - 8x)(\log_2 x - 1)$;

1) $\begin{cases} \log_2 x - 1 \ge 0, \\ (\log_2 x - 1)(1 - 4 + 8x) = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \log_2 x \ge 1, \\ x > 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = \dfrac{3}{8}; \end{array}\right. \end{cases}$ $x = 2$;

2) $\begin{cases} \log_2 x - 1 < 0, \\ (\log_2 x - 1)(4 - 8x + 1) = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \log_2 x < 1, \\ x > 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = \dfrac{5}{8}; \end{array}\right. \end{cases}$ $x = \dfrac{5}{8}$.

Ответ: 2; $\dfrac{5}{8}$.

6.192. $|\log_2 x - 1| = (2x + 5)(\log_2 x - 1)$;

1) $\begin{cases} \log_2 x - 1 \ge 0, \\ (\log_2 x - 1)(1 - 2x - 5) = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \log_2 x \ge 1, \\ x > 0, \\ \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 1, \\ x = -2; \end{array}\right. \end{cases}$ $x = 2$;

2) $\begin{cases} \log_2 x - 1 < 0, \\ (\log_2 x - 1)(2x + 5 + 1) = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \log_2 x < 1, \\ x > 0, \\ \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 1, \\ x = -3; \end{array}\right. \end{cases}$ решений нет.

Ответ: 2.

6.193. $\begin{cases} 2|x-2|+3|y+1|=20, \\ 2x-y=3; \end{cases}$

1) $\begin{cases} x\ge 2, \\ y\ge -1, \\ 2x-4+3y+3=20, \\ y=2x-3; \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge 2, \\ y\ge -1, \\ 2x+6x-9-1=20, \\ y=2x-3; \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge 2, \\ y\ge -1, \\ x=3{,}75, \\ y=4{,}5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x\ge 2, \\ y< -1, \\ 2x-4-3y-3=20, \\ y=2x-3; \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge 2, \\ y< -1, \\ 2x-7-6x+9=20, \\ y=2x-3; \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge 2, \\ y< -1, \\ x=-4{,}5, \\ y=-12; \end{cases}$

решений нет.

3) $\begin{cases} x<2, \\ y\ge -1, \\ -2x+4+3y+3=20, \\ y=2x-3; \end{cases}$ $\begin{cases} x<2, \\ y\ge -1, \\ x=5{,}5, \\ y=2x-3; \end{cases}$ решений нет.

4) $\begin{cases} x<2, \\ y< -1, \\ -2x+4-3y-3=20, \\ y=2x-3; \end{cases}$ $\begin{cases} x<2, \\ y< -1, \\ -2x-6x=10, \\ y=2x-3; \end{cases}$ $\begin{cases} x<2, \\ y< -1, \\ x=-1{,}25, \\ y=-5{,}5; \end{cases}$

Ответ: (3,75; 4,5); (-1,25; -5,5).

6.194. $\begin{cases} 3|x+1|+2|y-2|=20, \\ x+2y=4; \end{cases}$

1) $\begin{cases} x+1\ge 0, \\ y-2\ge 0, \\ 3x+3+2y-4=20, \\ x=4-2y; \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge -1, \\ y\ge 2, \\ 12-6y+2y-1=20, \\ x=4-2y; \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge -1, \\ y\ge 2, \\ y=-2\frac{1}{4}, \\ x=4-2y; \end{cases}$

решений нет;

2) $\begin{cases} x+1\ge 0, \\ y-2<0, \\ 3x+3-2y+4=20, \\ x=4-2y; \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge -1, \\ y<2, \\ 12-6y+7-2y=20, \\ x=4-2y; \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge -1, \\ y<2, \\ y=-\frac{1}{8}, \\ x=4\frac{1}{4} \end{cases}$

$\left(4\frac{1}{4};\ -\frac{1}{8}\right)$;

3) $\begin{cases} x+1<0, \\ y-2\ge 0, \\ -3x-3+2y-4=20, \\ x=4-2y; \end{cases}$ $\begin{cases} x<-1, \\ y\ge 2, \\ -12+6y+2y-7=20, \\ x=4-2y; \end{cases}$ $\begin{cases} x<-1, \\ y\ge 2, \\ y=4\frac{7}{8}, \\ x=-5\frac{3}{4}; \end{cases}$;

$\left(-5\frac{3}{4};\ 4\frac{7}{8}\right)$.

4) $\begin{cases} x+1<0, \\ y-2<0, \\ -3x-3-2y+4=20, \\ x=4-2y; \end{cases}$ $\begin{cases} x<-1, \\ y<2, \\ -12+6y-2y+1=20, \\ x=4-2y; \end{cases}$ $\begin{cases} x<-1, \\ y<2, \\ y=7\frac{3}{4}, \\ x=4-2y; \end{cases}$

решений нет.

Ответ: $\left(4\frac{1}{4};\ -\frac{1}{8}\right)$; $\left(-5\frac{3}{4};\ 4\frac{7}{8}\right)$.

6.195. $\begin{cases} 4|x-3|+|y+2|=7, \\ x+2y=4; \end{cases}$ $\begin{cases} 4|4-2y-3|+|y+2|=7, \\ x=4-2y; \end{cases}$

$\begin{cases} 4|1-2y|+|y+2|=7, \\ x=4-2y; \end{cases}$ $4|1-2y|+|y+2|=7;$

1) $\begin{cases} y\ge\frac{1}{2}, \\ -4+8y+y+2=7; \end{cases}$ $\begin{cases} y\ge\frac{1}{2}, \\ 9y=9; \end{cases}$ $\begin{cases} y\ge\frac{1}{2}, \\ y=1; \end{cases}$ $y=1$, $x=2$;

2) $\begin{cases} -2\le y<\frac{1}{2}, \\ 4(1-2y)+y+2=7; \end{cases}$ $\begin{cases} -2\le y<\frac{1}{2}, \\ -7y=1; \end{cases}$ $\begin{cases} -2\le y<\frac{1}{2}, \\ y=-\frac{1}{7}; \end{cases}$

$y=-\frac{1}{7}$, $x=4\frac{2}{7}$;

3) $\begin{cases} y<-2, \\ 4-8y-y-2=7; \end{cases}$ $\begin{cases} y<-2, \\ -9y=5; \end{cases}$ $\begin{cases} y<-2, \\ y=-\frac{5}{9}; \end{cases}$ решений нет.

Ответ: (2; 1); $\left(4\frac{2}{7};\ -\frac{1}{7}\right)$.

6.196. $\begin{cases}2|x-1|-3|y+2|=1,\\2x+y=3;\end{cases}$ $\begin{cases}2|x-1|-3|5-2x|=1,\\y=3-2x;\end{cases}$

1) $\begin{cases}x\ge\dfrac{5}{2},\\2(x-1)-3(2x-5)=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x\ge\dfrac{5}{2},\\-4x=-12;\end{cases}$ $x=3,\ y=-3;$

2) $\begin{cases}1\le x<\dfrac{5}{2},\\2x-2-15+6x=1;\end{cases}$ $\begin{cases}1\le x<\dfrac{5}{2},\\8x=18;\end{cases}$ $\begin{cases}1\le x<\dfrac{5}{2},\\x=2\dfrac{1}{4};\end{cases}$ $x=2{,}25,\ \ y=-1{,}5;$

3) $\begin{cases}x<1,\\2-2x-15+6x=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x<1,\\4x=14;\end{cases}$ $\begin{cases}x<1,\\x=\dfrac{7}{2};\end{cases}$ решений нет.

Ответ: (3; -3); $(2{,}25;\ -1{,}5)$.

6.197. $\begin{cases}\sqrt{x^2-2x}=y-1,\\y+2|x|=1;\end{cases}$

1) $x\ge0$: $\begin{cases}x^2-2x=(y-1)^2,\\y\ge1,\\y+2x=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2-2x=4x^2,\\y\ge1,\\y=1-2x;\end{cases}$ $\begin{cases}3x^2+2x=0,\\y\ge1,\\y=1-2x;\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0,\\x=-\dfrac{2}{3},\end{array}\right.\\y\ge1,\\y=1-2x;\end{cases}$

$x_1=0,\ y_1=1;$

2) $x<0$: $\begin{cases}x^2-2x=(y-1)^2,\\y\ge1,\\y-2x=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2-2x=4x^2,\\y\ge1,\\y=1+2x;\end{cases}$ $\begin{cases}3x^2+2x=0,\\y\ge1,\\y=1+2x;\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0,\\x=-\dfrac{2}{3},\end{array}\right.\\y\ge1,\\y=1+2x;\end{cases}$

решений нет. Ответ: (0; 1);.

6.198. $\begin{cases}x-\sqrt{x^2-2y+1}=1,\\x+|y|=2;\end{cases}$

1) $\begin{cases} \sqrt{x^2-2y+1}=x-1, \\ x+y=2, \\ y\ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-2y+1=x^2-2x+1, \\ y=2-x, \\ y\ge 0, \\ x\ge 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=y, \\ y=2-x, \\ y\ge 0, \\ x\ge 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=1, \\ y=1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2-2y+1=x^2-2x+1, \\ x-y=2, \\ y<0, \\ x\ge 1; \end{cases}$ $\begin{cases} y<0, \\ x=y, \\ x-y=2, \\ x\ge 1; \end{cases}$ решений нет.

Ответ: (1; 1).

6.199. $2|x+1|>x+4$;

1) $\begin{cases} x\ge -1, \\ 2x+2>x+4; \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge -1, \\ x>2; \end{cases}$ $x>2$;

2) $\begin{cases} x+1<0, \\ -2x-2>x+4; \end{cases}$ $\begin{cases} x<-1, \\ x<-2; \end{cases}$ $x<-2$; Ответ: $(-\infty; -2)\cup(2; \infty)$.

6.200. $3|x-1|\le x+3$;

1) $\begin{cases} x-1\ge 0, \\ 3x-3\le x+3; \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge 1, \\ x\le 3; \end{cases}$ $x\in[1; 3]$;

2) $\begin{cases} x-1<0, \\ 3-3x\le x+3; \end{cases}$ $\begin{cases} x<1, \\ x\ge 0; \end{cases}$ $[0; 1)$. Ответ: $[0; 3]$.

6.201. $4|x+2|<2x+10$;

1) $\begin{cases} x+2\ge 0, \\ 4x+8<2x+10; \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge -2, \\ x<1; \end{cases}$ $x\in[-2; 1)$;

2) $\begin{cases} x+2<0, \\ -4x-8<2x+10; \end{cases}$ $\begin{cases} x<-2, \\ x>-3; \end{cases}$ $x\in(-3; -2)$. Ответ: $(-3; -1)$.

6.202. $3|x+1|\ge x+5$;

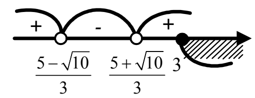
1) $\begin{cases} x+1\ge 0, \\ 3x+3\ge x+5; \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge -1, \\ x\ge 1; \end{cases}$ $x\ge 1$;

2) $\begin{cases} x+1<0, \\ -3x-3\ge x+5; \end{cases}$ $\begin{cases} x<-1, \\ x\le -2; \end{cases}$ $x\le -2$. Ответ: $(-\infty; -2]\cup[1; \infty)$.

6.203. $3x^2-|x-3|>9x-2$;

1) $\begin{cases} x-3\ge 0, \\ 3x^2-x+3>9x-2; \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge 3, \\ 3x^2-10x+5>0; \end{cases}$ $\frac{D}{4}=25-15=10$;

$$\begin{cases} x \geq 3, \\ 3\left(x - \dfrac{5+\sqrt{10}}{3}\right)\left(x - \dfrac{5-\sqrt{10}}{3}\right) > 0; \end{cases}$$



$x \geq 3;$

2) $\begin{cases} x - 3 < 0, \\ 3x^2 + x - 3 > 9x - 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 3, \\ 3x^2 - 8x - 1 > 0; \end{cases}$

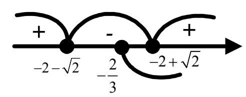
$$\begin{cases} x < 3, \\ 3\left(x - \dfrac{4-\sqrt{19}}{3}\right)\left(x - \dfrac{4+\sqrt{19}}{3}\right) > 0; \end{cases} x \in \left(-\infty;\ \dfrac{4-\sqrt{19}}{3}\right) \cup \left(\dfrac{4+\sqrt{19}}{3};\ 3\right).$$

Ответ: $\left(-\infty;\ \dfrac{4-\sqrt{19}}{3}\right) \cup \left(\dfrac{4+\sqrt{19}}{3};\ \infty\right)$.

6.204. $x^2 + 4 \geq |3x + 2| - 7x;$

1) $\begin{cases} 3x + 2 \geq 0, \\ x^2 + 4 - 3x - 2 + 7x \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x \geq -\dfrac{2}{3}, \\ x^2 + 4x + 2 \geq 0; \end{cases}$

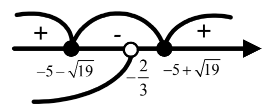
$$\begin{cases} x \geq -\dfrac{2}{3}, \\ 3\left(x + 2 - \sqrt{2}\right)\left(x + 2 + \sqrt{2}\right) \geq 0; \end{cases}$$



$x \in \left[-2 + \sqrt{2};\ \infty\right);$

2) $\begin{cases} 3x + 2 < 0, \\ x^2 + 4 + 3x + 2 + 7x \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x < -\dfrac{2}{3}, \\ x^2 + 10x + 6 \geq 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} x < -\dfrac{2}{3}, \\ 3\left(x + 5 - \sqrt{19}\right)\left(x + 5 + \sqrt{19}\right) \geq 0; \end{cases}$$



$x \in \left(-\infty;\ -5 - \sqrt{19}\right]$.

Ответ: $\left(-\infty;\ -5 - \sqrt{19}\right] \cup \left[-2 + \sqrt{2};\ \infty\right)$.

6.205. $|x - 2| - x < 2x^2 - 9x + 9;$

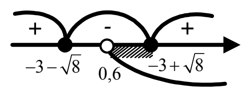
1) $\begin{cases} x - 2 \geq 0, \\ x - 2 - x - 2x^2 + 9x - 9 < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 2, \\ 2x^2 - 9x + 11 > 0; \end{cases}$ $D < 0;\ x \geq 2;$

2) $\begin{cases} x-2<0, \\ 2-x-x-2x^2+9x-9<0; \end{cases}$ $\begin{cases} x<2, \\ 2x^2-7x+7>0; \end{cases}$ $D<0$; $x<2$.

Ответ: $(-\infty;\ \infty)$.

6.206. $x^2-|5x-3|-x<2$;

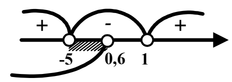
1) $\begin{cases} 5x-3\ge 0, \\ x^2-5x+3-x-2<0; \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge 0{,}6, \\ x^2-6x+1<0; \end{cases}$



$\begin{cases} x\ge 0{,}6, \\ (x-3+\sqrt{8})(x-3-\sqrt{8})<0; \end{cases}$

$x\in\left[0{,}6;\ 3+\sqrt{8}\right)$;

2) $\begin{cases} 5x-3<0, \\ x^2+5x-3-x-2<0; \end{cases}$ $\begin{cases} x<0{,}6, \\ x^2+4x-5<0; \end{cases}$



$\begin{cases} x<0{,}6, \\ (x+5)(x-1)<0; \end{cases}$

$x\in(-5;\ 0{,}6)$. Ответ: $(-5;\ 3+\sqrt{8})$.

Параметры

6.207. $\frac{a}{2a-x}=3$; $\begin{cases} x\ne 2a, \\ a=6a-3x; \end{cases}$ $\begin{cases} x\ne 2a, \\ 3x=5a; \end{cases}$ $\begin{cases} x\ne 2a, \\ x=\frac{5}{3}a. \end{cases}$

Т.к. $2a=\frac{5}{3}a$ только при $a=0$, то решение уравнения - $x=\frac{5}{3}a$

($a\ne 0$). Ответ: при $a=0$ нет решения; при $a\ne 0$: $x=\frac{5}{3}a$.

6.208. $\frac{a}{a-2x}=3$; О.Д.З. $a-2x\ne 0$; $x\ne\frac{a}{2}$. Тогда:

$a=3a-6x$; $6x=2a$; $x=\frac{a}{3}$. Т.к. $\frac{a}{3}=\frac{a}{2}$ только при $a=0$, то $x=\frac{a}{3}$ – решение уравнения при $a\ne 0$; при $a=0$ нет решений.

Ответ: при $a=0$ нет решений; при $a\ne 0$: $x=\frac{a}{3}$.

6.209. $\frac{a}{2a-x}=2$; $x\ne 2a$; $a=4a-2x$; $2x=3a$; $x=\frac{3}{2}a$;

$2a = \frac{3}{2}a$ при $a = 0$. При $a = 0$ нет решений.

Ответ: при $a = 0$ нет решений; при $a \neq 0$: $x = \frac{3}{2}a$.

6.210. $\frac{a}{a-2x} = 2$. Уравнение имеем смысл при $x \neq \frac{a}{2}$.

При этом a=2a–4x; $x = \frac{a}{4}$. Т.к. $\frac{a}{4} = \frac{a}{2}$ при a=0, то при a=0 решений нет. Ответ: если $a = 0$, то решений нет, если $a \neq 0$, то $x = \frac{a}{4}$.

6.211. $|x + 2a| \cdot x + 1 - a = 0$.
Так как $x = 2$ – корень уравнения, то $|2 + 2a| \cdot 2 + 1 - a = 0$;

$\begin{cases} a \geq -1, \\ 4 + 4a + 1 - a = 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a < -1, \\ -4 - 4a + 1 - a = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} a \geq -1, \\ a = -\frac{5}{3}; \end{cases}$ $\begin{cases} a < -1, \\ a = -\frac{3}{5}; \end{cases}$ решений нет.

Ответ: таких значений a нет.
6.212. $2 \geq |x + 3a| + x^2$, $x = 3$ не является решением.
Найдем те значения a, при которых 3 – решение неравенства, т.е. $2 \geq |3 + 3a| + 9$; $|3 + 3a| \leq -7$, т.к. $|3 + 3a| \geq 0$; $-7 < 0$, то решений нет; x=3 не является решением при любых значениях a. Ответ: $(-\infty; \infty)$.
6.213. $4 - |x - 2a| < x^2$, $x = -3$.
Так как –3 – решение неравенства, то $4 - |-3 - 2a| < 9$; $|-3 - 2a| > -5$, неравенство верно при любых значениях a. Ответ: $(-\infty; \infty)$.
6.214. $3 - |x - 2a| > x^2$, $x = -2$. Так как $x = -2$ – решение, то a удовлетворяет неравенству: $3 - |-2 - 2a| > 4$; $|-2 - 2a| < -1$. Так как $|-2-2a| \geq 0$, то неравенство не имеет решений. Ответ: решений нет.
6.215. $-2 \leq |x + 3a| - x^2$, $x = 2$. Найдем значения a, при которых $x = 2$ – решение неравенства, т.е. $-2 \leq |2 + 3a| - 4$; $|2 + 3a| \geq 2$;

$\begin{cases} 2 + 3a \geq 0, \\ 2 + 3a \geq 2 \end{cases}$ или $\begin{cases} 2 + 3a < 0, \\ 2 + 3a \leq -2; \end{cases}$

$\begin{cases} a \geq -\frac{2}{3}, \\ a \geq 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a < -\frac{2}{3}, \\ a \leq -\frac{4}{3}; \end{cases}$

$a \geq 0$ или $a \leq -\frac{4}{3}$;

$x = 2$ решение неравенства при $a \in \left(-\infty;\ -\frac{4}{3}\right] \cup [0;\infty)$. Значит,

$x = 2$ не является решением неравенства при а $\in \left(-\frac{4}{3};\ 0\right)$.

Ответ: $\left(-\frac{4}{3};\ 0\right)$.

6.216. $x^2+4x-2|x-a|+2-a = 0$, $x = -1$. Найдем, при каких значениях a $x = -1$ – корень уравнения: $1-4-2|-1-a|+2-a=0$; $2|-1-a| + 1 + a = 0$;

$$\begin{cases} -1-a \geq 0, \\ -2-2a+1+a=0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -1-a < 0, \\ 2+2a+1+a=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \leq -1, \\ a=-1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a > -1, \\ a=-1 \end{cases} \text{ - решений нет;}$$

откуда $a = -1$; $x = -1$ не является корнем при $a \neq -1$.
Ответ: $(-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.

6.217. $|x - a|\ x + 1 - 2a = 0$, $x = -2$. Так как $x = -2$ – корень, то a удовлетворяет уравнению: $-2|-2 - a| + 1 - 2a = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -2-a \geq 0, \\ 4+2a+1-2a=0; \end{cases} \quad \text{решений нет;} \\ \begin{cases} -2-a < 0, \\ -4-2a+1-2a=0; \end{cases} \quad \begin{cases} a > -2, \\ a=-\frac{3}{4}; \end{cases} \quad a=-\frac{3}{4}. \end{array}\right.$$

Ответ: при $a = -\frac{3}{4}$.

6.218. $|2x + a| \cdot (x^2 + 1) + 3 - 2a = 0$, $x = 1$. Найдем значения a, при которых $x = 1$ является корнем. $|2 + a| \cdot 2 + 3 - 2a = 0$;

1) $\begin{cases} 2+a \geq 0, \\ 4+2a+3-2a=0; \end{cases} \quad \begin{cases} a \geq -2, \\ 7=0; \end{cases}$ решений нет;

2) $\begin{cases} 2+a < 0, \\ -4-2a+3-2a=0; \end{cases} \quad \begin{cases} a < -2, \\ a=-\frac{1}{4}; \end{cases}$ решений нет.

Значит, $x = 1$ не является решением уравнения при всех $a \in R$.
Ответ: $(-\infty; \infty)$.

6.219. $\left(a-3x^2-\cos\frac{11\pi}{4}x\right)\sqrt{8-ax}=0,\ \ x=2.$

По условию $x = 2$ – корень, тогда a удовлетворяет уравнению:
$(a-12)\sqrt{8-2a}=0,$ которое равносильно совокупности:

$\begin{cases}a-12=0,\\ 8-2a\ge 0\end{cases}$ или $8 - 2a = 0;$

$\begin{cases}a=12,\\ a\le 4;\end{cases}$ решений нет; $a = 4.$ Ответ: 4.

6.220. $\left(a-3x^2-\sin\frac{11\pi}{4}x\right)\sqrt{11-3ax}=0,\ \ x=2.$

Так как $x = 2$ – корень уравнения, то a удовлетворяет уравнению:
$(a-12+1)\sqrt{11-6a}=0;\ \ (a-11)\sqrt{11-6a}=0;$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=11,\\ 11-6a=0,\end{array}\right.\\ 11-6a\ge 0;\end{cases}\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=11,\\ a=\frac{11}{6},\end{array}\right.\\ a\le\frac{11}{6};\end{cases}\quad a=\frac{11}{6}.$$

6.221. $2x^6 - x^4 - ax^2 = 1.$ $f(x) = 2x^6 - x^4 - ax^2 - 1,$ $D(f) = R.$
Функция четная, поэтому, чтобы данное уравнение имело три корня, один из корней должен быть равен 0 ,(f(x), значит если $x\neq 0$, то число корней четно). Проверка показывает, что $x = 0$ не является решением уравнения, значит, уравнение не может иметь три корня. Ответ: нет.

6.222. $2x^8 - 3ax^6 + 4x^4 - ax^2 = 5.$ Пусть $f(x) = 2x^8 - 3ax^6 + 4x^4 - ax^2 - 5,$ $D(f) = R.$ Так как функция $f(x)$ четная, то если x_0 – корень уравнения $f(x) = 0$, то $-x_0$ также является корнем этого уравнения.
Заметим, что $x=0$ не является корнем уравнения, значит, корней четное число. Таким образом, 5 корней уравнение иметь не может.
Ответ: не может.

6.223. $3^x + 3^{-x} = ax^4 + 2x^2 + 2.$ Пусть $f(x) = 3^x + 3^{-x} - (ax^4 + 2x^2 + 2),$ $D(f) = R.$ $f(x)$ – четная функция. $f(0) = 0$, значит, $x = 0$ – корень уравнения.
Аналогично задаче 6.222 получим, что число корней нечетное.
Ответ: данное уравнение имеем нечетное число корней.

6.224. $4^x - 4^{-x} = x^3 + 2ax^2$. Пусть $f(x) = 4^x - 4^{-x} - x^3 - 2ax.$ Заметим, что $f(x) = -f(-x)$ и $x=0$ –является нулем функции f(x), значит f(x) – имеем нечетное число нулей. Доказано.

6.225. $\log_3(9^x + 9a^3) = x$. Уравнение равносильно системе:
$\begin{cases} 9^x + 9a^3 > 0, \\ 9^x + 9a^3 = 3^x; \end{cases}$ $9^x + 9a^3 - 3^x = 0$, замена $t = 3^x$, $t > 0$; $t^2 - t + 9a^3 = 0$.

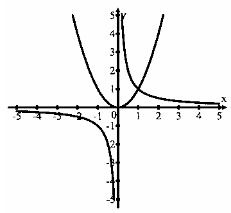
Чтобы исходное уравнение имело ровно два корня, полученное уравнения должно иметь два положительных корня. Это возможно, когда $D > 0$ и $t_1 \cdot t_2 > 0$, $t_1 + t_2 < 0$ (теорема Виета).

$\begin{cases} t_1 \cdot t_2 = 9a^3 > 0, \\ t_1 + t_2 = -1 < 0, \\ D = 1 - 36a^3 > 0, \end{cases}$ то $\begin{cases} a > 0, \\ a < \sqrt[3]{\dfrac{1}{36}}. \end{cases}$ Ответ: $\left(0; \sqrt[3]{\dfrac{1}{36}}\right)$.

6.226. $\log_2(4^x - a) = x$; $4^x - a = 2^x$, $2^x = t$, $t > 0$; $t^2 - t - a = 0$.
Исходное уравнение будет иметь единственный корень, если уравнение $t^2 - t - a = 0$ имеет единственный положительный.
Уравнение имеет единственный корень при Д = 0;

$1 + 4a = 0$; $a = -1/4$; $t = 1/2 > 0$ – верно. Ответ: $-\dfrac{1}{4}$.

6.227. $\log_2(4^x + a^3) + x = 0$; $4^x + a^3 = 2^{-x}$, замена $2^x = t$, $t > 0$;



$t^2 + a^3 = \dfrac{1}{t}$; $1 - t^3 = a^3 t$.

Решим графически
Из графика видно, что ни при каком значении a уравнение не может иметь двух положительных корней.
Ответ: решений нет.

6.228. $x - \log_3(2a - 9^x) = 0$; $x = \log_3(2a - 9^x)$; $3^x = 2a - 9^x$.
Замена: $3^x = t$, $t > 0$; $t^2 + t - 2a = 0$. Исходное уравнение не имеет корней, если:
1) уравнение $t^2 + t - 2a = 0$ не имеет корней, т.е. $D < 0$;
2) оба корня уравнения $t^2 + t - 2a = 0$ – неположительны.

1) $D = 1 + 8a$; $D < 0$: $1 + 8a < 0$; $a < -\dfrac{1}{8}$;

2) Используя теорему Виета: $\begin{cases} 1 + 8a \ge 0, \\ -1 \le 0, \\ -2a \ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a \ge -\dfrac{1}{8}, \\ a \le 0. \end{cases}$

Таким образом, при $a \le 0$ уравнение не имеет решений.
Ответ: $(-\infty; 0]$.

6.229. $|x-1| = ax + 2$;

1) $\begin{cases} x \ge 1, \\ x - 1 = ax + 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge 1, \\ x(1-a) = 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x < 1, \\ 1 - x = ax + 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 1, \\ x(1+a) = -1. \end{cases}$ Рассмотрим первую систему:

$\begin{cases} x \ge 1, \\ x(1-a) = 3. \end{cases}$ При $a = 1$ решений нет; $a \ne 1$, то $x = \dfrac{3}{1-a}$.

Проверим $x \ge 1$: $\dfrac{3}{1-a} \ge 1$; $\begin{cases} 1 - a > 0, \\ 3 \ge 1 - a \end{cases}$ $\begin{cases} a < 1, \\ a \ge -2 \end{cases}$.

При a $\in$ [-2; 1) $x = \dfrac{3}{1-a}$. Для второй системы:

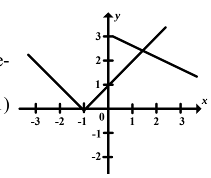
$\begin{cases} x < 1, \\ x(1+a) = -1. \end{cases}$ При a = -1 решений нет; $a \ne$ -1, то $x = -\dfrac{1}{a+1}$;

$-\dfrac{1}{a+1} < 1$; $\begin{cases} a + 1 > 0, \\ -1 < a + 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} a + 1 < 0, \\ -1 > a + 1; \end{cases}$; $\begin{cases} a > -1, \\ a > -2 \end{cases}$ или $\begin{cases} a < -1, \\ a < -2; \end{cases}$

$a \in (-\infty; -2) \cup (-1; \infty)$, $x = -\dfrac{1}{a+1}$.

Ответ: $a \in (-\infty; -2) \cup [1; \infty)$, $x = -\dfrac{1}{a+1}$; $a \in [-2; -1]$, $x = \dfrac{3}{1-a}$;

$a \in (-1; 1)$, $x = -\dfrac{1}{a+1}$, $x = \dfrac{3}{1-a}$.



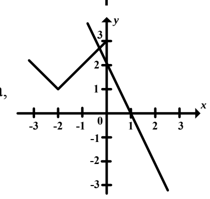
6.230. $|x+1| = 3 - ax$. Решим графически:

Из графика видно, что при $a \in (-1; 1)$ решения два;

$a \in (-\infty; -1] \cup [1; \infty)$ – решений одно.

Ответ: $a \in (-1; 1)$ – корня два,

$a \in (-\infty; -1] \cup [1; \infty)$ – один корень.



6.231.

$|x+2| + 1 = a - 2x$;

Из графика видно, что при любом a, уравнение имеет один корень.

Ответ: $(-\infty; \infty)$.

6.232. $|x-2|-1=a-3x$; $\quad |x-2|=a+1-3x$;

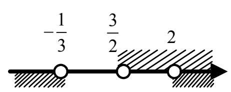
1) $\begin{cases} x\ge 2, \\ x-2=a+1-3x; \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge 2, \\ x=\dfrac{a+3}{4}; \end{cases}$ $x=\dfrac{a+3}{4}\ge 2$, значит, $a+3\ge 8$; $a\ge 5$;

2) $\begin{cases} x<2, \\ -x+2=a+1-3x; \end{cases}$ $\begin{cases} x<2, \\ x=\dfrac{a-1}{2}; \end{cases}$ $x=\dfrac{a-1}{2}<2$, значит, $a-1<4$; $a<5$.

Следовательно, при всех значения a решение единственное.
Ответ: $(-\infty;\ \infty)$.

Неравенства

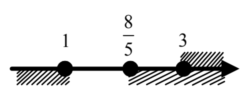
6.233. $(2x-3)\sqrt{3x^2-5x-2}>0$.



$\begin{cases} 2x-3>0, \\ 3x^2-5x-2>0; \end{cases}$ $\begin{cases} x>\dfrac{3}{2}, \\ 3(x-2)\left(x+\dfrac{1}{3}\right)>0. \end{cases}$

Ответ: $(2;\ \infty)$.

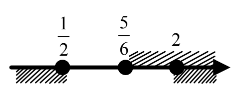
6.234. $\left(4x-x^2-3\right)\sqrt{5x-8}\le 0$;



$\begin{cases} 4x-x^2-3\le 0, \\ 5x-8\ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} -(x-3)(x-1)\le 0, \\ x\ge\dfrac{8}{5}; \end{cases}$

$\begin{cases} (x-3)(x-1)\ge 0, \\ x\ge\dfrac{8}{5}. \end{cases}$ Ответ: $[3;\ \infty)\cup\left\{\dfrac{8}{5}\right\}$.

6.235. $(6x-5)\sqrt{2x^2-5x+2}\ge 0$;

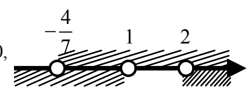


$\begin{cases} 6x-5\ge 0, \\ 2x^2-5x+2\ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge\dfrac{5}{6}, \\ 2(x-2)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\ge 0. \end{cases}$

Ответ: $[2;\ \infty)\cup\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

6.236. $\left(3x - x^2 - 2\right)\sqrt{7x+4} < 0;$

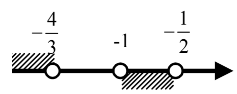
$$\begin{cases} 3x - x^2 - 2 < 0, \\ 7x + 4 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x-2)(x-1) > 0, \\ x > -\dfrac{4}{7}. \end{cases}$$



Ответ: $\left(-\dfrac{4}{7};\ 1\right) \cup (2;\ \infty)$.

6.237. $(3x+4)\sqrt{-3x-2x^2-1} < 0;$

$$\begin{cases} 3x + 4 < 0, \\ -3x - 2x^2 - 1 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < -\dfrac{4}{3}, \\ 2x^2 + 3x + 1 < 0; \end{cases}$$

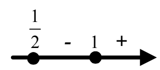


$$\begin{cases} x < -\dfrac{4}{3}, \\ 2(x+1)\left(x + \dfrac{1}{2}\right) < 0. \end{cases}$$

Ответ: решений нет.

6.238. $(3x^2 - x - 2)\sqrt{2x-1} \geq 0.$

$f(x) = (3x^2 - x - 2)\sqrt{2x-1}.$

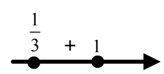


$D(f) = \left[\dfrac{1}{2};\ \infty\right)$; $f(x) = 0$ при $x = \dfrac{1}{2}$; $x = 1$; $\left(x = -\dfrac{2}{3} \notin D(f)\right)$.

Ответ: $\{1/2\} \cup [1;\ \infty)$.

6.239. $(7x+2)\sqrt{4x-3x^2-1} \leq 0;$

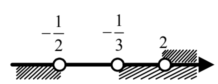
$f(x) = (7x+2)\sqrt{4x-3x^2-1};$ $D(f) = \left[\dfrac{1}{3};\ 1\right]$;



$f(x)$ – непрерывна при $x \in \left(\dfrac{1}{3};\ 1\right)$. Нули функции: $x = \dfrac{1}{3}$; $x=1$; $x=-2/7$.

Ответ: $x = 1/3$; $x = 1$.

6.240. $(2x^2 - 3x - 2)\sqrt{3x+1} > 0;$

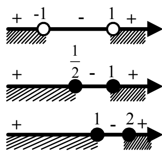


$$\begin{cases} 3x + 1 > 0, \\ 2x^2 - 3x - 2 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > -\dfrac{1}{3}, \\ 2(x-2)\left(x + \dfrac{1}{2}\right) > 0. \end{cases}$$

Ответ: $(2;\ \infty)$.

6.241. $\sqrt{2x^2-3x+1}>\sqrt{x^2-3x+2}$;

$$\begin{cases}2x^2-3x+1>x^2-3x+2,\\ 2x^2-3x+1\ge 0,\\ x^2-3x+2\ge 0;\end{cases}\qquad \begin{cases}(x-1)(x+1)>0,\\ 2(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)\ge 0,\\ (x-2)(x-1)\ge 0.\end{cases}$$



Для первого;

Для второго;

Для третьего неравенства системы

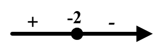
Объединяя, получим $\left[\begin{array}{l}x<-1,\\ x\ge 2.\end{array}\right.$ Ответ: (-∞; -1) ∪ [2; ∞).

6.242. $2^{\sqrt{x^2-3x+3}}>2^{\sqrt{x^2-2x+5}}$; $\sqrt{x^2-3x+3}>\sqrt{x^2-2x+5}$;

$f(x)=\sqrt{x^2-3x+3}-\sqrt{x^2-2x+5}$;

$\begin{cases}x^2-3x+3\ge 0,\\ x^2-2x+5\ge 0.\end{cases}$ $D(f)=R$.. $x^2-3x+3=x^2-2x+5$; $x=-2$.

Т.к. $f(0)<0$; $f(-3)=\sqrt{21}-\sqrt{20}>0$, то



***x*<-2**

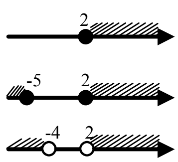
Ответ: (-∞; -2).

6.243. $3^{-\sqrt{x^2+2x+2}}\le 3^{-\sqrt{x^2-x+5}}$; $-\sqrt{x^2+2x+2}\le-\sqrt{x^2-x+5}$;

$\begin{cases}x^2+2x+2\ge x^2-x+5,\\ x^2+2x+2\ge 0,\\ x^2-x+5\ge 0;\end{cases}$ $\begin{cases}3x\ge 3,\\ x\in R,\\ x\in R;\end{cases}$ $x\ge 1$. Ответ: [1; ∞).

6.244. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x-2}}>\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2+3x-10}}$; ($a$>1) $\sqrt{x-2}<\sqrt{x^2+3x-10}$;

$$\begin{cases}x-2\ge 0,\\ x^2+3x-10\ge 0,\\ x-2<x^2+3x-10;\end{cases}\qquad \begin{cases}x\ge 2,\\ (x-2)(x+5)\ge 0,\\ (x-2)(x+4)>0.\end{cases}$$



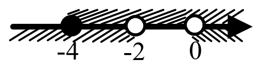
Для первого;

Для второго;

Для третьего;

значит, $x>2$. Ответ: (2; ∞).

6.245. $\left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{x+4}} > \left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{x^2+3x+4}}$;



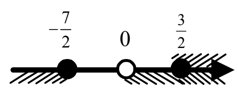
$\sqrt{x+4} < \sqrt{x^2+3x+4}$;

$\begin{cases} x+4 < x^2+3x+4, \\ x+4 \ge 0 \\ x^2+3x+4 \ge 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x(x+2) > 0 \\ x \ge -4 \\ x \in R \end{cases}$ Ответ: [-4; -2) $\cup$ (0; ∞).

6.246. $2^{1+2x} - 21 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} + 2 \ge 0$;

$2^{1+2x} - 21 \cdot \left(2^{2x+3}\right)^{-1} + 2 \ge 0$; $2^{1+2x} - 21 \cdot \left(2^{2x+1}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{4} + 2 \ge 0$.

Замена $2^{1+2x} = t$, $t > 0$ по свойству степеней: $t - \frac{21}{4}t^{-1} + 2 \ge 0$, откуда



$\begin{cases} 4t^2 + 8t - 21 \ge 0, \\ t > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 4\left(t + \frac{7}{2}\right)\left(t - \frac{3}{2}\right) \ge 0, \\ t > 0. \end{cases}$ $t \ge \frac{3}{2}$.

$2^{1+2x} \ge \frac{3}{2}$. Логарифмируя по основанию 2, получим:

$1 + 2x \ge \log_2 \frac{3}{2}$; $2x \ge \log_2 \frac{3}{2} - 1$; $x \ge \frac{1}{2}\left(\log_2 \frac{3}{2} - 1\right)$; $x \ge \frac{1}{2}\log_2 3 - 1$.

Ответ: $\left[\frac{1}{2}\log_2 3 - 1;\ \infty\right)$.

6.247. $3^{4-3x} - 35\left(\frac{1}{3}\right)^{2-3x} + 6 \ge 0$; $3^{2-3x} > 0$; $3^{6-6x} - 35 + 2 \cdot 3^{3-3x} \ge 0$;

$t = 3^{3-3x}$, $t > 0$; $t^2 + 2t - 35 \ge 0$; $(t + 7)(t - 5) \ge 0$; $t \in (-\infty; -7] \cup [5; \infty)$.
Так как $t > 0$, то $t \in [5; \infty)$, т.е. $3^{3-3x} \ge 5$; $3 - 3x \ge \log_3 5$;

$x \le 1 - \frac{1}{3}\log_3 5$. Ответ: $\left(-\infty;\ 1 - \frac{1}{3}\log_3 5\right]$.

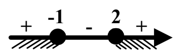
6.248. $4^{5+4x} - 15\left(\frac{1}{4}\right)^{3+4x} + 8 \ge 0$; $t = 4^{4=4x}, t > 0$;

$t^2 + 2t - 15 \ge 0$; $(t-3)(t+5) \ge 0$; $t \in (-\infty; -5] \cup [3; \infty)$.

Т.к. $t > 0$, то $t \in [3; \infty)$. Т.к. $4^{4+4x} \ge 3$; $4 + 4x \ge \log_4 3$; $x \ge \frac{1}{4}\log_4 3 - 1$

Ответ: $\left[\frac{1}{4}\log_4 3 - 1;\ \infty\right)$.

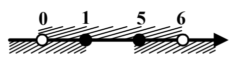
6.249. $5^{5-4x} - 2\left(\frac{1}{5}\right)^{3-4x} - 5 \ge 0$; $(5^{3-4x} > 0)$; $5^{8-8x} - 2 - 5 \cdot 5^{3-4x} \ge 0$;



$5^{8-8x} - 5^{4-4x} - 2 \ge 0$; $(5^{4-4x})^2 - 5^{4-4x} - 2 \ge 0$;
Замена $t = 5^{4-4x}$, $t > 0$.
$t^2 - t - 2 \ge 0$; $(t-2)(t+1) \ge 0$; $t \in (-\infty; -1] \cup [2; \infty)$.
Так как $t > 0$, то $t \in [2; \infty)$;

$5^{4-4x} \ge 2$; $4 - 4x \ge \log_5 2$; $x \le 1 - \frac{1}{4}\log_5 2$. Ответ: $\left(-\infty;\ 1 - \frac{1}{4}\log_5 2\right]$.

6.250. $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}\left(6^{x+1} - 36^x\right) \ge -2$; $\begin{cases} 6^{x+1} - 36^x > 0, \\ 6^{x+1} - 36^x - 5 \le 0. \end{cases}$ Замена $t = 6^x$, $t > 0$;



$\begin{cases} 6t - t^2 > 0, \\ -t^2 + 6t - 5 \le 0; \end{cases}$ $\begin{cases} t(t-6) < 0, \\ (t-5)(t-1) \ge 0. \end{cases}$

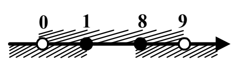
Откуда $t \in (0; 1] \cup [5; 6)$, значит,
$0 < 6^x \le 1$, и $5 \le 6^x < 6$,
$x \le 0$ $\log_6 5 \le x < 1$. Ответ: $(-\infty; 0] \cup [\log_6 5; 1)$.

6.251. $\log_{\frac{1}{\sqrt{6}}}\left(5^{x+1} - 25^x\right) \le -2$. $5^{x+1} - 25^x \ge 6$. Замена $5^x = t$ $(t > 0)$;

$t^2 - 5t + 6 \le 0$; $(t-3)(t-2) \le 0$; $t \in [2; 3]$, т.е. $\begin{cases} 5^x \ge 2, \\ 5^x \le 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge \log_5 2, \\ x \le \log_5 3. \end{cases}$

Ответ: $[\log_5 2; \log_5 3]$.

6.252. $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(3^{x+2} - 9^x\right) \ge -6$; $\begin{cases} 3^{x+2} - 9^x > 0, \\ 3^{x+2} - 9^x \le \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-6}; \end{cases}$ $\begin{cases} 9^x - 9 \cdot 3^x < 0, \\ 9^x - 9 \cdot 3^x + 8 \ge 0. \end{cases}$



Замена $t = 3^x$, $t > 0$.
$\begin{cases} t^2 - 9t < 0, \\ t^2 - 9t + 8 \ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} t(t-9) < 0, \\ (t-1)(t-8) \ge 0. \end{cases}$

Откуда $t \in (0; 1] \cup [8; 9)$, т.е. $\left[\begin{array}{l} 3^x \le 1, \\ \begin{cases} 3^x \ge 8, \\ 3^x < 9; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x \le 0, \\ \begin{cases} x \ge \log_3 8, \\ x < 2. \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: $(-\infty; 0] \cup [\log_3 8; 2)$.

6.253. $\log_2(2-3x) > 4x+1$.; $y_1 = 4x+1$; $y_2 = \log_2(2-3x)$.

$D(y_2) = \left(-\infty;\ \dfrac{2}{3}\right)$; y_1 возрастает, y_2 убывает.

Точка пересечения этих графиков (0; 1). Ответ: $(-\infty; 0)$.

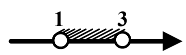
6.254. $\log_2(2+x) > 1-x$; $y_1 = \log_2(x+2)$; $y_2 = 1-x$;

$D(y_1) = (-2; \infty)$, $D(y_2) = R$. $y_1(x)$ возрастает.

x	-1	0	2
y_1	0	1	2

$y_2(x)$ убывает, $y_2(0) = 1$, $y_2(1) = 0$.; Ответ: $(0; \infty)$.

6.255. $9^x - 2\cdot 3^x < 3$. Замена $t = 3x$, $(t > 0)$. $t^2 - 2t - 3 < 0$;

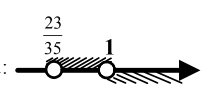


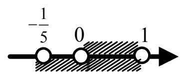
$(t-3)(t+1) < 0$. $t \in (-1; 3)$. Учитывая, что $t>0$, получим $t \in (0; 3)$, т.е. $0 < 3^x < 3$; $x < 1$. Ответ: $(-\infty; 1)$.

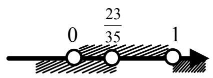
6.256. $4^x - 3\cdot 2^x < 4$; Замена $t = 2^x$, $(t > 0)$; $t^2 - 3t - 4 < 0$; $t \in (-1;4)$. Учитывая, что $t > 0$ получим $t \in (0;4)$ т.е. $0 < 2^x < 4$; $x < 2$. Ответ: $(-\infty; 2)$.

6.257. $\log_x \dfrac{2x+\frac{2}{5}}{5(1-x)} > 0$;

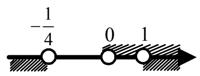
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>1, \\ \dfrac{2x+\frac{2}{5}}{5(1-x)} > 1; \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x<1, \\ 0 < \dfrac{2x+\frac{2}{5}}{5(1-x)} < 1; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>1, \\ \dfrac{2x+\frac{2}{5}-5+5x}{5(1-x)} > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x<1, \\ \dfrac{2x+\frac{2}{5}}{5(1-x)} > 0, \\ \dfrac{2x+\frac{2}{5}-5+5x}{5(1-x)} < 0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>1, \\ \dfrac{7\left(x-\frac{23}{35}\right)}{5(1-x)} > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x<1, \\ \dfrac{2x+\frac{2}{5}}{5(1-x)} > 0, \\ \dfrac{7\left(x-\frac{23}{35}\right)}{5(1-x)} < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

1-я система:  - нет решений

2-я система: 

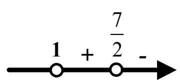
 $x \in \left(0; \frac{23}{35}\right).$

6.258. $\log_x \frac{4x+1}{6(x-1)} < 0.$



Рассмотрим функцию $f(x) = \log_x \frac{4x+1}{6(x-1)}$ и найдем значения x, при которых $f(x)<0.$;

Найдем $D(f)$: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ \frac{4x+1}{6(x-1)} > 0. \end{cases}$ $D(f) = (1; \infty)$. $\log_x \frac{4x+1}{6(x-1)} = 0;$

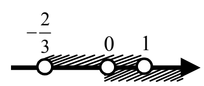


$\frac{4x+1}{6(x-1)} = 1;$ $2x = 7;$ $x = \frac{7}{2}, f\left(\frac{7}{2}\right) = 0.$

$f(2) = \log_2 \frac{3}{2} > 0;$ $f(4) = \log_2 \frac{17}{18} < 0.$

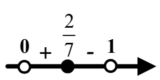
Ответ: $(3{,}5; \infty)$.

6.259. $\log_x \frac{3x+2}{4(1-x)} \geq 0.$; $f(x) = \log_x \frac{3x+2}{4(1-x)}$.



Найдем $D(f)$: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ \frac{3x+2}{4(1-x)} > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ \frac{3(x+\frac{2}{3})}{4(1-x)} > 0. \end{cases}$

$D(f) = (0; 1)$. $\log_x \frac{3x+2}{4(1-x)} = 0;$ $\frac{3x+2}{4(1-x)} = 1;$ $x = \frac{2}{7};$

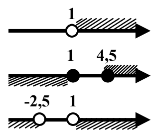


$f\left(\frac{1}{7}\right) = \log_{\frac{1}{7}} \frac{17}{24} < 0;$ $f\left(\frac{3}{7}\right) = \log_{\frac{3}{7}} \frac{23}{16} < 0$, т.е. $x \in (0;\ 2/7]$. Ответ: $(0;\ 2/7]$.

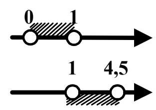
6.260. $\log_x \frac{2x+5}{4(x-1)} \le 0$;

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x>1, \\ \frac{2x+5}{4(x-1)} \le 1, \\ \frac{2x+5}{4(x-1)} > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x<1, \\ \frac{2x+5}{4(x-1)} \ge 1; \end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x>1, \\ \frac{-2x+9}{4(x-1)} \le 0, \\ \frac{2x+5}{4(x-1)} > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x<1, \\ \frac{-2x+9}{4(x-1)} \ge 0; \end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x>1, \\ \frac{2(x-4,5)}{4(x-1)} \ge 0, \\ \frac{2(x+2,5)}{4(x-1)} > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x<1, \\ \frac{2(x-4,5)}{4(x-1)} \le 0; \end{cases}\end{array}\right.$$

для первой системы: для второй системы:



$x \ge 4.5$;



- решений нет

Ответ: $[4,5; \infty)$.

6.261. $\log_{5x-4x^2} 4^{-x} > 0$; $-x \cdot \log_{5x-4x^2} 4 > 0$; $x\log_{5x-4x^2} 4 < 0$.

$f(x) = x\log_{4x-4x^2} 4$.

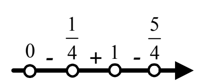
Область определения: $\begin{cases} 5x-4x^2>0, \\ 5x-4x^2 \ne 1; \end{cases}$ $\begin{cases} 4x\left(x-\frac{5}{4}\right)<0, \\ 4x^2-5x+1 \ne 0. \end{cases}$

$4x^2 - 5x + 1 = 0$: $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = 1$. Решая неравенство, найдем

$x \in \left(0;\ \frac{5}{4}\right)$. $D(f) = \left(0; \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4};\ 1\right) \cup \left(1;\ \frac{5}{4}\right)$. $x = 0$;

$x\log_{5x-4x^2} 4 = 0$ - нет решений. $f(x)$ не обращается в 0 на $D(f)$.

$f\left(\frac{1}{2}\right) > 0$; $f\left(\frac{1}{8}\right) < 0$; $f\left(\frac{9}{8}\right) < 0$;

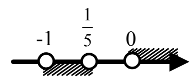


Ответ: $\left(0;\ \frac{1}{4}\right) \cup \left(1;\ \frac{5}{4}\right)$.

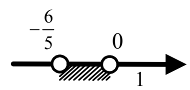
6.262. $\log_{-6x-5x^2} 6^x > 0;$

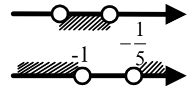
$\begin{cases} -6x-5x^2 > 1; \\ 6^x > 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} 0 < -6x-5x^2 < 1, \\ 6^x < 1. \end{cases}$

$\begin{cases} 5\left(x+\frac{1}{5}\right)(x+1) < 0, \\ x > 0 \end{cases}$ - решений нет.

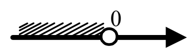


$\begin{cases} 5x\left(x+\frac{6}{5}\right) < 0, \\ 5\left(x+\frac{1}{5}\right)(x+1) > 0, \\ x < 0. \end{cases}$





Итак, $x \in (-6/5;\ -1) \cup (-1/5;\ 0)$.



Ответ: $(-6/5;\ -1) \cup (-1/5;\ 0)$.

6.263. $\log_{4+x^2} 8 < 1$. Т.к. $4 + x^2 \geq 4$; $8 < 4 + x^2$; $x^2 > 4$;

$x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$. Ответ: $(-\infty; -2) \cup (2; \infty)$.

6.264. $\log_{x^2+2} 3 \geq 1$. Т.к. $x^2 + 2 \geq 2$,; $x^2 + 2 \leq 3$; $x^2 \leq 1$; $x \in [-1; 1]$.

Ответ: $[-1; 1]$.

6.265. $\log_7 x - \log_x \frac{1}{7} \geq 2$; $\log_7 x + \log_x 7 \geq 2$; перейдем в $\log_x 7$ к основанию 7. $\log_7 x + \frac{1}{\log_7 x} \geq 2$, $x \neq 1$, $x > 0$. Замена: $\log_7 x = t$.

$t + \frac{1}{t} \geq 2$; $\frac{(t-1)^2}{t} \geq 0$; $t > 0$, т.е. $\log_7 x > 0$; $x > 1$. Ответ: $(1; \infty)$.

6.266. $2\log_2 \sqrt{x} - 2 > \log_x \frac{1}{2}$; $\log_2 x + \log_x 2 \geq 2$, $x > 0$, $x \neq 1$.

Замена: $\log_2 x = u$. $u + \frac{1}{u} - 2 \geq 0$; $\frac{u^2 - 2u + 1}{u} \geq 0$; $\frac{(u-1)^2}{u} \geq 0$; $u > 0$.

Т.е. $\log_2 x > 0$; $x > 1$. Ответ: $(1; \infty)$.

6.267. $\log_x \frac{1}{4} + \log_4 x^{-1} \leq -2$; $-\log_x 4 - \log_4 x \geq -2$; $x > 0$, $x \neq 1$;

$\log_x 4 + \log_4 x \geq 2$. Замена $\log_4 x = t$.

$\frac{t^2+1-2t}{t} \ge 0$; $\frac{(t-1)^2}{t} \ge 0$. Откуда $t > 0$. $\log_4 x > 0$; $x > 1$.

Ответ: $(1; \infty)$.

6.268. $\log_x 3 - 4 \ge -4\log_3 x$; $\log_x 3 + 4\log_3 x - 4 \ge 0$; $x > 0$, $x \ne 1$.

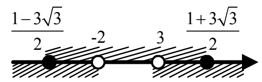
Замена $\log_3 x = t$. $\frac{1}{t} + 4t - 4 \ge 0$; $\frac{4t^2-4t+1}{t} \ge 0$; $\frac{(2t-1)^2}{t} \ge 0$; $t > 0$.

$\log_3 x > 0$, т.е. $x > 1$. Ответ: $(1; \infty)$.

6.269. $\log_{\frac{8}{3}} \log_{\frac{1}{2}} \left(x^2 - x - 6\right) \ge 0$. Т.к. $\frac{8}{3} > 1$,

$\log_{\frac{1}{2}} \left(x^2 - x - 6\right) \ge 1$; $\begin{cases} x^2 - x - 6 \le \frac{1}{2}, \\ x^2 - x - 6 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x^2 - 2x - 12 \le 1, \\ (x-3)(x+2) > 0; \end{cases}$

$\begin{cases} 2\left(x - \frac{1+3\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{1-3\sqrt{3}}{2}\right) \le 0, \\ (x-3)(x+2) > 0. \end{cases}$



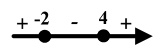
Ответ: $\left[\frac{1-3\sqrt{3}}{2};\ -2\right) \cup \left(3;\ \frac{1+3\sqrt{3}}{2}\right]$.

6.270. $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(2^{x+2} - 4^x\right) \le -2$. $2^{x+2} - 4^x \ge \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-2}$; $4^x - 2^{x+2} + 3 \le 0$.

Замена $2^x = t$, $t > 0$. $t^2 - 4t + 3 \le 0$; $(t-3)(t-1) \le 0$; $t \in [1; 3]$.

Т.е. $1 \le 2^x \le 3$; $0 \le x \le \log_2 3$. Ответ: $[0; \log_2 3]$.

6.271. $\log_{\frac{27}{41}} \log_5 \left(x^2 - 2x - 3\right) \le 0$.



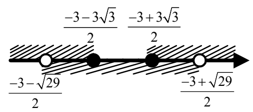
Равносильно $\log_5(x^2 - 2x - 3) \ge 1$; $x^2 - 2x - 3 \ge 5$;

$x^2 - 2x - 8 \ge 0$; $(x+2)(x-4) \ge 0$. $x \in (-\infty; -2] \cup [4; \infty)$.

Ответ: $(-\infty; -2] \cup [4; \infty)$.

6.272. $\log_{\frac{12}{11}} \log_{\frac{1}{2}} \left(x^2 + 3x - 4\right) \le 0$;

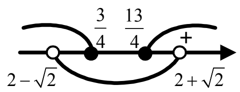
$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} \left(x^2 + 3x - 4\right) \le 1, \\ \log_{\frac{1}{2}} \left(x^2 + 3x - 4\right) > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + 3x - 4 \ge \frac{1}{2}, \\ x^2 + 3x - 4 < 1; \end{cases}$



$$\begin{cases} 2\left(x+\frac{-3+3\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{-3-3\sqrt{3}}{2}\right)\ge 0, \\ \left(x-\frac{-3+\sqrt{29}}{2}\right)\left(x-\frac{-3-\sqrt{29}}{2}\right)<0; \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{-3-\sqrt{29}}{2};\ \frac{-3-3\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[\frac{-3+3\sqrt{3}}{2};\ \frac{-3+\sqrt{29}}{2}\right)$.

6.273. $\log_5 \log_{\frac{9}{16}}\left(x^2-4x+3\right)\le 0;$



$$\begin{cases} \log_{\frac{9}{16}}\left(x^2-4x+3\right)\le 1, \\ \log_{\frac{9}{16}}\left(x^2-4x+3\right)>0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-4x+3\ge\frac{9}{16}, \\ x^2-4x+3<1; \end{cases}\quad \begin{cases} 16x^2-64x+39\ge 0, \\ x^2-4x+2<0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16\left(x-\frac{3}{4}\right)\left(x-\frac{13}{4}\right)\ge 0, \\ (x-(2-\sqrt{2}))(x-(2+\sqrt{2}))<0. \end{cases}$$ Ответ: $\left(2-\sqrt{2};\ \frac{3}{4}\right]\cup\left[\frac{13}{4};\ 2+\sqrt{2}\right)$.

6.274. $\min(1+2x, 2+x) > -1$.

$\begin{cases} 1+2x>-1, \\ 2+x>-1; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x>-2, \\ x>-3; \end{cases}$ $\begin{cases} x>-1, \\ x>-3; \end{cases}$ т.е. $x > -1$. Ответ: $(-1; \infty)$.

6.275. $\min(3-2x, 1-x) < 1$.

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3-2x\le 1-x, \\ 3-2x<1; \end{cases} \\ \begin{cases} 3-2x>1-x, \\ 1-x<1; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 2, \\ x>1; \end{cases} \\ \begin{cases} x<2, \\ x>0; \end{cases} \end{array}\right.$ таким образом, $x \in (0; \infty)$. Ответ: $(0; \infty)$.

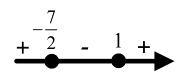
6.276. $\max(3-2x, 1-x) < 1$. $\begin{cases} 3-2x<1, \\ 1-x<1; \end{cases}$ $\begin{cases} x>1, \\ x>0. \end{cases}$ Ответ: $(1; \infty)$.

6.277. $\max(3-2x, 1-x) > 1$. $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3-2x\ge 1-x, \\ 3-2x>1; \end{cases} \\ \begin{cases} 3-2x<1-x, \\ 1-x>1; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\le 2, \\ x<1; \end{cases} \\ \begin{cases} x>2, \\ x<0; \end{cases} \end{array}\right.$ $x<1$.

Ответ: $(-\infty; 1)$.

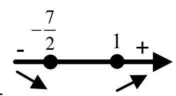
Возрастание, убывание, экстремумы, наибольшие и наименьшие значения

6.278. $y=\sqrt{2x^2+5x-7}$; $[3;\,4]$.



$2x^2+5x-7\ge 0$; $2(x+(7/2))(x-1)\ge 0$;

$D(f)$: $x\in(-\infty;\ -7/2]\cup[1;\ \infty)$.

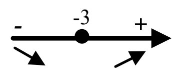


$y'=\dfrac{4x+5}{2\sqrt{2x^2+5x-7}}$; $y'=0$ при $x=-\dfrac{5}{4}$ — не входит в $D(f)$.

на $[3;\,4]$ y монотонно возрастает, следовательно, $\max\limits_{[3;4]} y(x)=y(4)=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$; $\min\limits_{[3;4]} y(x)=y(3)=\sqrt{26}$.

Ответ: $\max\limits_{[3;4]} y(x)=3\sqrt{5}$; $\min\limits_{[3;4]} y(x)=\sqrt{26}$.

6.279. $y=\sqrt{\dfrac{1}{2}x^2+3x+5}$, $[2;\,5]$.



$D(y)=R$, т.к. $\dfrac{1}{2}x^2+3x+5>0$ при всех x.

$y'=\dfrac{x+3}{2\sqrt{\dfrac{1}{2}x^2+3x+5}}$; $y'=0$ при $x=-3$. Т.о., на $[2;\,5]$ y возрастает,

следовательно, $y_{\text{наиб.}}=y(5)=\sqrt{65/2}$; $y_{\text{наим.}}=y(2)=\sqrt{13}$.

Ответ: $y_{\text{наиб.}}=\sqrt{65/2}$; $y_{\text{наим.}}=\sqrt{13}$.

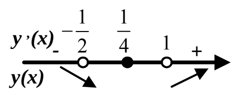
6.280. $y=\dfrac{3}{\sqrt{3+x-\dfrac{1}{4}x^2}}$, $[-1;\,3]$. $D(y)$: $-\dfrac{1}{4}x^2+x+3>0$;

$x^2-4x-12<0$; $(x+2)(x-6)<0$; $D(y)=(-2;\,6)$.

$y'=-\dfrac{1}{2}\dfrac{3\left(1-\dfrac{x}{2}\right)}{\left(\sqrt{3+x-\dfrac{1}{4}x^2}\right)^3}$; $y'=0$ при $x=2$.

$y(2)=\dfrac{3}{2}$; $y(-1)=\dfrac{6}{\sqrt{7}}$; $y(3)=\dfrac{6}{\sqrt{15}}$; $y_{\text{наиб.}}=\dfrac{6}{\sqrt{7}}$; $y_{\text{наим.}}=\dfrac{3}{2}$.

6.281. $y=-\dfrac{3}{\sqrt{2x^2-x-1}}$, $[2;\ 3]$.



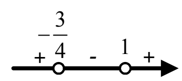
$D(y)$: $2x^2-x-1>0$; $2(x-1)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)>0$;

$D(y)=\left(-\infty;\ -\dfrac{1}{2}\right)\cup(1;\ \infty)$.

$y'(x)=\dfrac{3(4x-1)}{2(\sqrt{2x^2-x-1})^3}$; $y'=0$ при $x=\dfrac{1}{4}$. на $[2;\ 3]$ $y(x)$ возрастает.

$y_{\text{наиб.}}=y(3)=-\dfrac{3}{\sqrt{14}}$; $y_{\text{наим.}}=y(2)=-\dfrac{3}{\sqrt{5}}$.

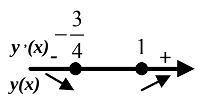
6.282. $y=\sqrt{4x^2-x-3}$.



Область определения: $4x^2-x-3\ge 0$;

$4(x-1)\left(x+\dfrac{3}{4}\right)\ge 0$; $D(y)=\left(-\infty;\ -\dfrac{3}{4}\right]\cup[1;\ \infty)$.

$y'=\dfrac{8x-1}{2\sqrt{4x^2-x-3}}$;



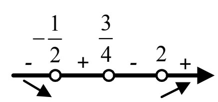
$y'(x)=0$ при $x=\dfrac{1}{8}$ $\left(\dfrac{1}{8}\notin D(y)\right)$.

Ответ: возрастает при $x\in[1;\ \infty)$; убывает при $x\in\left(-\infty;\ -\dfrac{3}{4}\right]$.

6.283. $y=\log_2(2x^2-3x-2)$; $D(y)$: $2x^2-3x-2>0$; $(x-2)(x+1/2)>0$;

$D(y)=\left(-\infty;\ -\dfrac{1}{2}\right)\cup(2;\ \infty)$.

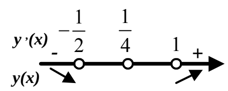
$y'=\dfrac{4x-3}{(2x^2-3x-2)\ln 2}$; $y'=\dfrac{4\left(x-\dfrac{3}{4}\right)}{2(x-2)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\ln 2}$;



$y(x)$ возрастает на $(2;\ \infty)$;
$y(x)$ убывает на $(-\infty;\ -(1/2))$.
Ответ: возрастает на $(2;\ \infty)$; убывает на $(-\infty;\ -(1/2))$.

6.284. $y=-\dfrac{3}{\sqrt{2x^2-x-1}}$; $D(y)$: $2x^2-x-1>0$; $2(x-1)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)>0$;

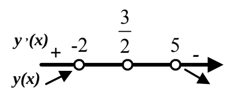
$D(y)=(-\infty;\ -1/2)\cup(1;\ \infty)$.



$y'=\dfrac{3(4x-1)}{2(\sqrt{2x^2-x-1})^3}$; y'=0 при $x=\dfrac{1}{4}$.

Ответ: возрастает на $(1;\ \infty)$; убывает на $(-\infty;\ -1/2)$.

6.285. $y=\dfrac{5}{\sqrt{x^2-3x-10}}$;

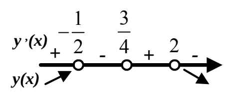


$D(y)$: $x^2-3x-10>0$; $(x-5)(x+2)>0$;
$D(y)=(-\infty;\ -2)\cup(5;\ \infty)$.

$y'=\dfrac{-5(2x-3)}{2(\sqrt{x^2-3x-10})^3}$; $y'=0$ при $x=\dfrac{3}{2}\notin D(y)$.

6.286. $y=\log_{0,5}(2x^2-3x-2)$; $D(y)$: $2x^2-3x-2>0$;
$2(x-2)(x+1/2)>0$;

$D(y)=\left(-\infty;\ -\dfrac{1}{2}\right)\cup(2;\ \infty)$.

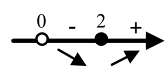


$y'=\dfrac{4x-3}{(2x^2-3x-2)\ln 0{,}5}$; $y'=\dfrac{4(x-3/4)}{2(x-2)(x+1/2)\ln 0{,}5}$;

Ответ: возрастает на $(-\infty;\ -1/2)$; убывает на $(2;\ \infty)$.

6.287. Пусть x см – длина стороны основания, тогда $(3-x)$ см – длина бокового ребра.
$V(x)=x^2(3-x)=3x^2-x^3$, $x\in[0;\ 3]$; $V'(x)=6x-3x^2=3x(2-x)$;
$V(x)=0$ при $x=2$, $x=0$; $V(0)=0$; $V(3)=0$; $V(2)=4$.
Ответ: ребра 2 см; 2 см и 1 см, $V=4$ см^3.

6.288. Пусть x см – сторона основания ($x>0$). Т.к. $V=4$ см^3, то боковое ребро равно $\dfrac{4}{x^2}$ см.

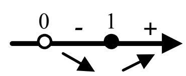


$P(x)=\left(\dfrac{4}{x^2}+x\right)\cdot 2$, $D(y)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ \infty)$.

$P'(x)=2\left(1-\dfrac{8}{x^3}\right)$; $P'(x)=0$ при $x=2$; $x=2$ – точка минимума.

$P(2)=6$. Ответ: ребра: 2 см; 2 см; 1 см; $P=6$ см.

6.289. Пусть x см – сторона боковой грани, $x > 0$. Тогда стороны основания x см и $(6 - x)$ см.
$V(x) = x^2(6 - x)$, $x \in [0; 6]$; $V'(x) = 12x - 3x^2 = 3x(4 - x)$;
$V'(x) = 0$ при $x = 4$. $x = 0$; $V(0) = 0$; $V(6) = 0$; $V(4) = 32$.
Ответ: ребра: 4 см; 4 см; 9 см; $V = 32$ см^3.
6.290. Пусть x см – длина ребра боковой грани, $x > 0$.



Стороны основания: x см и $\dfrac{0,5}{x^2}$ см.

$$P(x) = \left(x + \frac{0,5}{x^2}\right) \cdot 2 = 2x + \frac{1}{x^2};$$

$P'(x) = 2 - \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x^3}$; $P'(x) = 0$ при $x = 1$;

$x = 1$ – точка минимума. $P_{\min} = 3$ см.
Ответ: ребра: 1 см; 1 см; 0,5 см; $P = 3$ см.
6.291. $y = x\ln x - x\ln 5$, $[1; 5]$. Найдем $y' = \ln x + 1 - \ln 5$;
$y'=0$: $\ln x = \ln 5 - 1$; $x = 5/e$. Так как $\ln 5 > 1$, то решений нет; $y'(x) < 0$,
$y_{наим} = y(5/e) = (5/e)\big((\ln 5 - 1) - \ln 5\big) = -(5/e)$. Ответ: $y_{наим} = -5/e$.

6.292. $y = (1/2)x\ln x - x\ln 2$; $[1; 4]$;

$D(y) = (0; \infty)$. $y'(x) = (1/2)\ln x + (1/2) - \ln 2$;

$y'(x) = 0$: $(1/2)\ln x + (1/2) - \ln 2 = 0$; $\ln x = \ln(4/e)$; $x = (4/e)$.

$y'(x) > 0$: $x > 4/e$; $y'(x) < 0$: $x < 4/e$. Значит, $4/e$ — точка минимума. $y_{наим.} = y(4/e) = -(2/e)$. Ответ: $-(2/e)$.

6.293. $y = \dfrac{1}{3}x\ln x - \dfrac{1}{6}x\ln 9$, $[1; 3]$; $y'(x) = \dfrac{1}{3}\ln x + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{6}\ln 9$;

$y'(x) = 0$: $\dfrac{1}{3}\ln x + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{6}\ln 9 = 0$; $\ln x = \ln\dfrac{3}{e}$; $x = \dfrac{3}{e}$;

$y'(x) > 0$ при $x > \dfrac{3}{e}$; $y'(x) < 0$ при $x < \dfrac{3}{e}$. Значит, $\dfrac{3}{e}$ - точка минимума.

$y_{наим.} = y\left(\dfrac{3}{e}\right) = \dfrac{2}{3e}\ln\dfrac{3}{e} - \dfrac{1}{2e}\ln 9 = \dfrac{\ln 3}{e} - \dfrac{1}{e} - \dfrac{\ln 3}{e} = -\dfrac{1}{e}$. Ответ: $-\dfrac{1}{e}$.

6.294. $y = 2x\ln x - x\ln 49$, $[1; 7]$; $y'(x) = 2 + 2\ln x - \ln 49$;
$y'(x) = 0$ при $2 + 2\ln x - \ln 49 = 0$; $\ln x + 1 - \ln 7 = 0$; $x = 7/e$;

$y'(x) > 0$ при $x > 7/e$; $y'(x) < 0$ при $x < 7/e$.

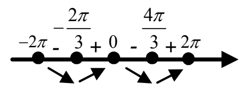
Значит, $7/e$ точка минимума.

$y_{\text{наим.}} = y\left(\frac{7}{e}\right) = \frac{14}{e}(\ln 7 - \ln e) - \frac{7}{e}\ln 49 = -\frac{14}{e}$. Ответ: $-\frac{14}{e}$.

6.295. $y = 2\sqrt{3}\cos x + 2\sin x - 2x + 1$; $y' = -2\sqrt{3}\sin x + 2\cos x - 2$;

$y'(x)$=0: $-2\sqrt{3}\sin x + 2\cos x - 2 = 0$;

$-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2}$;



$\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{1}{2}$; $x + \frac{\pi}{3} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$. $\left[\begin{array}{l} x = 2\pi k, \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z. \end{array}\right.$

Точки минимума: $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$. Ответ: $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.

6.296. $y = \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x + 10 - 2x$;

Преобразуем $y(x)$: $y(x) = 2\sin(2x + \pi/6) + 10 - 2x$;

$D(y) = R$. $y'(x) = 4\cos(2x + \pi/6) - 2$;

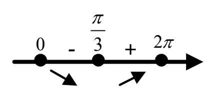
$y'(x) = 0$: $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$; $2x + \frac{\pi}{6} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.

$x = \frac{\pi}{12} + \pi k$ или $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

Точки максимума: $x = \frac{\pi}{12} + \pi k, k \in Z$. Ответ: $\frac{\pi}{12} + \pi k, k \in Z$.

6.297. $y = 2\sqrt{3}\sin x - 2\cos x - 2\sqrt{3}x + 11$;

$y(x) = 4\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 2\sqrt{3}x + 11$;



$y'(x) = 4\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 2\sqrt{3}$; $y'(x) = 0$: $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

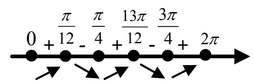
$x - \frac{\pi}{6} = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$. $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ или $x = 2\pi k$, $k \in Z$.

Точки максимума: $x = 2\pi k$, $k \in Z$. Ответ: $2\pi k$, $k \in Z$.

6.298. $y = \sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x + 2\sqrt{3}x - 3$;

$y(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) + 2\sqrt{3}x - 3$; $y'(x) = -4\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) + 2\sqrt{3}$;

$y'(x) = 0$: $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $2x - \frac{\pi}{3} = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$.



$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ или $x = \frac{\pi}{12} + \pi k, k \in Z$.

Точки минимума: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

Ответ: $\pi/4 + \pi k, k \in Z$.

6.299. $y = 1 + 4\sin x - 2x$, $[0; \pi]$. $y'(x) = 4\cos x - 2$;
$y'(x) = 0$: $\cos x = 1/2$; $x = \pm\pi/3 + 2\pi k, k \in Z$.

Промежутку $[0; \pi]$ принадлежит точка $\pi/3$;

$y(0) = 1$; $y(\pi) = 1 - 2\pi$; $y(\pi/3) = 1 + 2\sqrt{3} - (2\pi/3)$; $y_{\text{наим.}} = 1 - 2\pi$.

6.300. $y = -3 + 4\sin x + 2x$, $[\pi; 2\pi]$. $y'(x) = 4\cos x + 2$;
$y'(x) = 0$: $\cos x = -(1/2)$; $x = \pm(2\pi/3) + 2\pi k, k \in Z$.

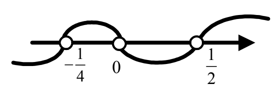
Данному отрезку $[\pi; 2\pi]$ принадлежит точка $x = 4\pi/3$.

$y(\pi) = -3 + 2\pi$; $y(2\pi) = -3 + 4\pi$; $y(4\pi/3) = -3 + (8\pi/3) - 2\sqrt{3}$;

$\max\limits_{[\pi;2\pi]} y(x) = 4\pi - 3$. Ответ: $\max\limits_{[\pi;2\pi]} y(x) = 4\pi - 3$.

Примерное оформление варианта по курсу «В»

1. $\frac{8x^2 - 2x - 1}{x} < 0$; $8x^2 - 2x - 1 = 8\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{4}\right)$;



$\frac{(x - 1/2)(x + 1/4)}{x} < 0$;

Ответ: $(-\infty; -1/4)$; $(0; 1/2)$.

2. $\log_2 3 - \log_2(2 - 3x) = 2 - \log_2(4 - 3x)$;

$\log_2 \frac{3}{2 - 3x} = \log_2 \frac{4}{4 - 3x}$ - уравнение равносильно системе:

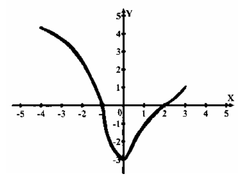
$$\begin{cases} \frac{3}{2 - 3x} = \frac{4}{4 - 3x}, \\ 2 - 3x > 0, \\ 4 - 3x > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 12 - 9x = 8 - 12x, \\ 3x < 2, \\ 3x < 4; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x = -4, \\ x < \frac{2}{3}; \end{cases}$$

$x = -4/3$. Ответ: $-4/3$.

3. $3tg2x-\sqrt{3}=0;\;\; tg2x=\frac{\sqrt{3}}{3};\;\; 2x=\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z;$

$x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z.$ Ответ: $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z.$

4. По заданным условиям задача неоднозначна, выполним один из возможных вариантов.



5. $f(x)=3x^4-1.\;\; F(x)=\frac{3}{5}x^5-x+C.$

Ответ: $F(x)=\frac{3}{5}x^5-x+C.$

6. $y=\sin x$, $y=\sin 2x$; $\sin x=\sin 2x$; $\sin x-2\sin x\cos x=0$;
$\sin x(1-2\cos x)=0$;

$\sin x=0$; $\cos x=\frac{1}{2}$; $x=\pi k$, $k\in Z$; $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z.$

Абсциссы общих точек: πk, $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, k, n $\in$ Z.

7. $y=x+1$, $y=e^x$. Пусть x_0 – абсцисса точки касания;
$y_{\text{кас}}=e^{x_0}+e^{x_0}(x-x_0).\;\; e^{x_0}=1;\;\; e^{x_0}-e^{x_0}\cdot x_0=1\;\; (1);$
$x_0=0$; при $x_0=0$ равенство (1) верно, значит, прямая $y=x+1$ является касательной к графику функции $y=e^x$ в точке с абсциссой $x_0=0$. Ответ: является.

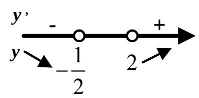
8. $\cos x\ge 1+2^x$; $\left.\begin{matrix}|\cos x|\le 1\\ 1+2^x>1\end{matrix}\right\}$ для любых действительных x, значит, неравенство решений не имеет. Ответ: решений нет.

9. $\begin{cases}\frac{1}{x}+y=-\frac{1}{2},\\ y^2-\frac{3}{x^2}=\frac{1}{4}.\end{cases}$ Пусть $1/x=a$, где $x\ne 0$, $a\ne 0$ (*).

$\begin{cases}a+y=-\frac{1}{2},\\ y^2-3a^2=\frac{1}{4};\end{cases}\quad \begin{cases}y=-\frac{1}{2}-a,\\ -3a^2+\frac{1}{4}+a+a^2=\frac{1}{4};\end{cases}\quad \begin{cases}y=-\frac{1}{2}-a,\\ \left[\begin{array}{l}a=0,\\ a=\frac{1}{2},\end{array}\right.\end{cases}$

учитывая (*), получим $x=2$; $y=-1$. Ответ: (2; –1).

10. $y = \log_{0,5}(2x^2 - 3x - 2)$, $D(y) = (-\infty;\ -1/2) \cup (2;\ \infty)$.



$y' = \dfrac{4x-3}{(2x^2-3x-2)\ln 1/2}$;

$y' = 0$: $x = 3/4$ - не принадлежит $D(y)$.

Ответ: убывает на $(-\infty;\ -1/2)$, возрастает на $(2;\infty)$.

Вариант экзаменационного задания по курсу «Математика»

1. $\dfrac{(x+11)(2x-5)}{3x} \le 0$. Ответ: $(-\infty; -11] \cup (0; 5/2]$

2. $10 \cdot 5^{x-1} + 5^{x+1} = 7$; $2 \cdot 5^x + 5 \cdot 5^x = 7$; $5^x = 1$; $x = 0$. Ответ: $x = 0$

3. $2\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{2}$; $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\dfrac{\pi}{2} - x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n;\ n \in Z$

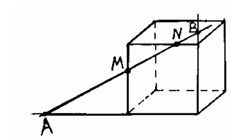
Ответ: $x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n$ *и* $x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n;\ n \in Z$

4. а) D(y) = [–3,5; 5]; б) [–3; –0,4] $\cup$ [2,5; 5]; в) $x = -1,5$; $y = -1,5$; $x = 1$; $y = 4,5$; г) возрастает [–1,5; 1] ; убывает [–3,5; –1,5] $\cup$ [1; 5]
д) $y_{наиб} = 4,5$; $y_{наим} = -3$.

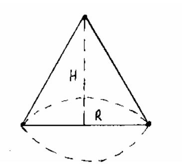
5. $f(x) = tgx - 2\sin x;\ x = -(\pi/4)$

$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 2\cos x;\ f'(-\pi/4) = \dfrac{1}{(\sqrt{2}/2)^2} - 2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2}$.

6.



7.

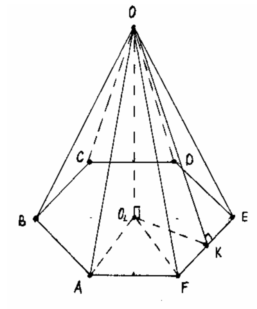


Получится конус. R = 3; H = 4.

$l = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$; $S_{бок} = \pi R l = 15\pi$; $S_{осн} = \pi R^2 = 9\pi$

$S = S_{бок} + S_{осн} = 24\pi$ **;** Ответ: 24π.

8.



$S_{бок} = 6S\Delta$; $S\Delta = \dfrac{OK \cdot EF}{2}$; $OK = \sqrt{OF^2 - FK^2}$

$O'F = \sqrt{OF^2 - OO'^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$; $FK = \dfrac{5}{2}$;

$OK = \sqrt{13^2 - \dfrac{25}{4}} = \dfrac{\sqrt{651}}{2}$; $\Delta S = \dfrac{5\sqrt{651}}{4}$; $S_{бок} = \dfrac{15\sqrt{651}}{2}$.

Ответ: $\dfrac{15\sqrt{651}}{2}$.

9. $y = \sin x$ и $y = \sin 2x$; $\sin x = \sin 2x$; $\sin x - 2\sin x \cos x = 0$;

$\sin x(1 - 2\cos x) = 0$; $\sin x = 0$; $\cos x = \dfrac{1}{2}$.

Ответ: $x = \pi k,\ k \in Z$; $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$.

10. $y = x + 1$, $y = e^x$. Пусть x_0 – абсцисса точки касания

$y_{кас} = e^{x_0} + e^{x_0}(x - x_0)$; $e^{x_0} = 1$; $e^{x_0} - e^{x_0} \cdot x_0 = 1$ (1);

$x_0 = 0$ при $x_0 = 0$ равенство (1) верно значит, прямая $y = x + 1$ является касательной к графику функции $y = e^x$.

Ответ: является.

Вариант экзаменационного задания
по курсу «Математика»

1. $\dfrac{(x+11)(2x-5)}{3x} \le 0$

Ответ: $(-\infty; -11] \cup (0; 5/2]$

2. $10 \cdot 5^{x-1} + 5^{x+1} = 7$; $2 \cdot 5^x + 5 \cdot 5^x = 7$; $5^x = 1$; $x = 0$

Ответ: x = 0

3. $2\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{2}$; $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **;** $\dfrac{\pi}{2} - x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n;\ n \in Z$

Ответ: $x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n$ *и* $x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n;\ n \in Z$

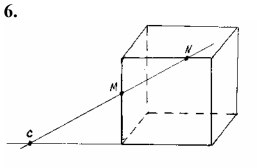
4. *а)* D(y) = [–3,5; 5]; б) [–3; –4,0] $\cup$ [2,5; 5]; в) x = –1,5; y = –1,5.
г) возрастает [–1,5; 1] ; убывает [–3,5; –1,5] $\cup$ [1; 5]
д) $y_{наиб} = 4{,}5$; $y_{наим} = -3$.

5. $f(x) = tgx - 2\sin x;\ x = -\dfrac{\pi}{4}$

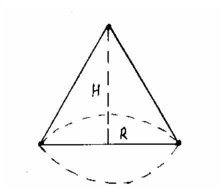
$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 2\cos x;\quad f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2}$$

Ответ: $2 - \sqrt{2}$

6.



7.

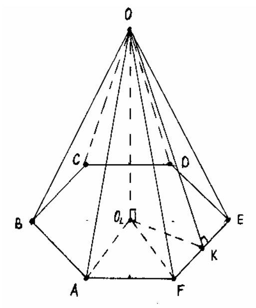


Получится конус. R = 3; H = 4

$l = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5;\quad S_{бок} = \pi R l = 15\pi;\ S_{осн} = \pi R^2 = 9\pi$

$S = S_{бок} + S_{осн} = 24\pi$ **;** Ответ: 24π.

8.



$S_{бок} = 6S\Delta;\;\; S\Delta = \frac{OK\cdot EF}{2};\; OK = \sqrt{OF^2 - FK^2}$

$O'F = \sqrt{OF^2 - OO'^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5;\;\; FK = \frac{5}{2}$

$OK = \sqrt{13^2 - \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{651}}{2}$

$\Delta S = \frac{5\sqrt{651}}{4};\;\; S_{бок} = \frac{15\sqrt{651}}{2}$

Ответ: $\frac{15\sqrt{651}}{2}$

9. $y = \sin x$ и $y = \sin 2x$

$\sin x = \sin 2x$

$\sin x - 2\sin x\cos x = 0$

$\sin x(1 - 2\cos x) = 0$

$\sin x = 0;\;\; \cos x = \frac{1}{2}$

Ответ: $x = \pi k,\, k \in Z;\;\; x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\; n \in Z$

10. $y = x + 1,\;\; y = e^x$

Пусть x_0 – абсцисса точки касания

$y_{кас} = e^{x_0} + e^{x_0}(x - x_0)$

$e^{x_0} = 1;\; e^{x_0} - e^{x_0}\cdot x_0 = 1$ (1);

$x_0 = 0$ при $x_0 = 0$ равенство (1) верно значит, прямая y = x + 1 является касательной к графику функции $y = e^x$.

Ответ: является.