Домашняя работа по геометрии за 8 класс

к учебнику «Геометрия. 7-11 класс»
А.В. Погорелов, М.: «Просвещение», 2001 г.

учебно-практическое
пособие

ОГЛАВЛЕНИЕ

§ 6. Четырехугольники

№ 1. На рисунках 114-116 представлены три фигуры, каждая из которых состоит из четырех точек и четырех последовательно соединяющих их отрезков. Какая из этих фигур является четырехугольником?

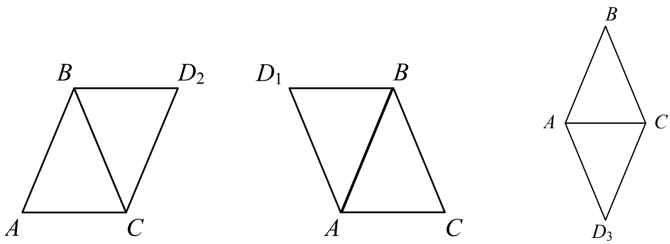
Задача решена в учебнике на стр. 67 п. 50.

№ 2. Постройте какой-нибудь четырехугольник *PQRS*. Укажите его противолежащие стороны и вершины.

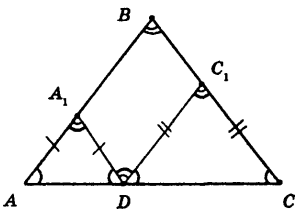
Противолежащие стороны: *PS* и *QR*; а также *PQ* и *SR*.
Противолежащие вершины: *P* и R; а также *Q* и *S*.

№ 3. Сколько можно построить параллелограммов с вершинами в трех заданных точках, не лежащих на одной прямой? Постройте их.

Можно построить три разных параллелограмма с таким свойством:



№ 4. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 5 м. Из точки, взятой на основании этого треугольника, проведены две прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите периметр получившегося параллелограмма.



$\angle ADC_1$. — внешний для ΔDC_1C так что

$\angle ADC_1 = \angle DC_1C + \angle C_1CD$

$\angle ADC_1 = \angle ADA_1 + \angle A_1DC_1$

так что

$\angle DC_1C + \angle C_1CD = \angle ADA_1 +$

$+ \angle A_1DC$;

накрест лежащие углы $\angle A_1DC$ и $\angle DC_1C$ равны. Поэтому $\angle C_1CD = \angle ADA_1$. Но $\angle C_1CD = \angle A_1AD$, поэтому $\angle A_1AD = \angle A_1DA$, а значит, ΔAA_1D — равнобедренный и $AA_1 = A_1D$. Аналогично доказывается, что $DC_1 = C_1C$.

$$P_{A_1BC_1D} = 2 \cdot (A_1B + A_1D) = 2 \cdot (A_1B + AA_1) = 2 \cdot AB = 2 \cdot 5 \text{ м} = 10 \text{ (м)}.$$

Ответ: 10 м.

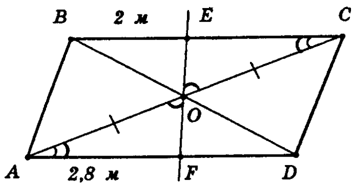
№ 5. Расстояния от точки пересечения диагоналей параллелограмма до двух его вершин равны 3 см в 4 см. Чему равны расстояния от нее до двух других вершин? Объясните ответ.

По свойству диагоналей параллелограмма расстояния от точки пересечения диагоналей параллелограмма до противолежащих вершин параллелограмма равны соответственно расстояниям до двух его вершин, то есть 3 и 4 см.

№ 6. Через точку пересечения диагоналей параллелограмма проведена прямая. Докажите, что отрезок ее, заключенный между параллельными сторонами, делится этой точкой пополам.

Задача решена в учебнике на стр. 69 п. 52.

№ 7. В параллелограмме *ABCD* через точку пересечения диагоналей проведена прямая, которая отсекает на сторонах BC и AD отрезки *BE* = 2м и AF = 2,8 м. Найдите стороны BC и AD.



Рассмотрим Δ *AOF* и ΔECO.

Точка O делит диагональ *AC* пополам, поэтому AO=OC.

$\angle AOF = \angle EOC$ (как вертикальные);

$\angle FAO = \angle ECO$ (как накрест лежащие).

Тогда, ΔAOF = ΔECO (по стороне и прилежащим к ней углам). А, значит, AF = EC = 2,8 м.

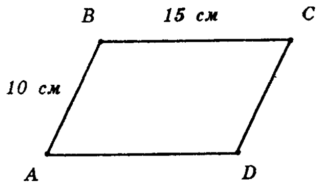
BC = BE + EC = 2 м + 2,8 м = 4,8 м .

Аналогично, BE = *FD* = 2 м,

AD = *AF* + *FD* = 2,8 м + 2 м = 4,8 м,

BC = AD = 4,8 м.
Ответ: 4,8 м.

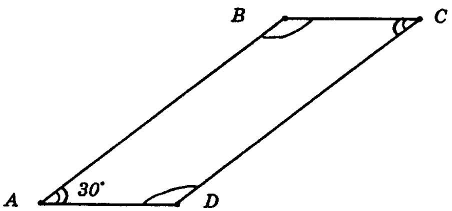
№ 8. У параллелограмма *ABCD AB* = 10 см, BC = 15 см. Чему равны стороны AD и CD? Объясните ответ.



AB=CD и BC=AD по свойству противолежащих сторон параллелограмма. Поэтому AD=15 см и CD=10 см.

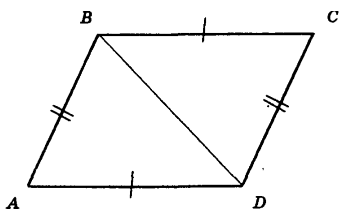
Ответ: 10 см; 15 см.

№ 9. У параллелограмма ABCD ∠A = 30°. Чему равны углы B, C, D? Объясните ответ.



∠A и ∠B — односторонние углы при пересечении параллельных BC и AD секущей AB, поэтому ∠A + ∠B = 180°, откуда ∠B = 180° - 30° = 150°. ∠A=∠C и ∠B=∠D по свойству противолежащих углов параллелограмма. То есть ∠C=30° и ∠D=150°.
Ответ: 150°; 30°; 150°.

№ 10. Периметр параллелограмма ABCD равен 10 см. Найдите длину диагонали BD, зная, что периметр треугольника ABD равен 8 см.



$P_{ABCD}=2\cdot(AB+AD)$, поэтому $AB+AD=\frac{1}{2}P_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot 10$ см = 5см.

$P_{ABD} = AB + AD + BD = 8$ см,

Откуда BD=8 см - (AB+AD)=8 см – 5 см=3 см

Ответ: 3 см.

№ 11. Один из углов параллелограмма равен 40°. Найдите остальные углы.

Задача аналогичная № 9. См. решение задачи № 9.
Ответ: 140°; 40° и 140°.

№ 12. Найдите углы параллелограмма, зная, что один из них больше другого на 50°.

Такие углы не могут быть противолежащими, так как они не равны. Значит, они прилежащие и их сумма равна 180°. Пусть один из углов равен x, тогда другой равен $x+50^o$, по условию.

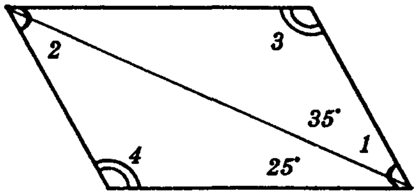
Следовательно $x+(x+50^o)=180^o$; $2x=180^o – 50^o$; $2x = 130^o$; $x = 65^o$.

Так что $\angle 1 = 65°$; $\angle 2 = 65° + 50° = 115°$; $\angle 3 =\angle 1= 65°$ и $\angle 4=\angle 2=115^o$ (по свойству углов противолежащих углов параллелограмма).
Ответ: 65°; 65°; 115°; 115°.

№ 13. Может ли один угол параллелограмма быть равным 40°, а другой — 50°?

Такие углы не могут быть противолежащими , так как они не равны. Они не могут быть прилежащими к одной стороне параллелограмма, так как их сумма равна 90°,а сумма прилежащих углов равна 180^o. Значит, не существует параллелограмма, у которого один угол равен 50°, а другой — 40°.
Ответ: не может.

№ 14. Диагональ параллелограмма образует с двумя его сторонами углы 25° в 35^o. Найдите углы параллелограмма.



Диагональ параллелограмма делит $\angle 1$ на два угла 25° и 35°, поэтому

$\angle 1 = 25° + 35° = 60°$.

$\angle 2 = \angle 1 = 60°$

(противолежащие углы).

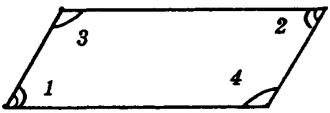
$\angle 1 + \angle 3 = 180°$ ($\angle 1$ и $\angle 2$ прилежащие). Поэтому

$\angle 3 = 180° - 60° = 120°$.

$\angle 4 = \angle 3 = 120°$ (противолежащие углы).

Ответ: 60°; 60°; 120°; 120°.

№ 15. Найдите все углы параллелограмма, если сумма двух из них равна: 1) 80°; 2) 100°; 3) 160°.



Во всех трех случаях углы не могут быть прилежащими, так как их сумма не равна 180^o. А значит они противолежащие, а значит следовательно равные.

1) $\begin{cases} \angle 1 + \angle 2 = 80° \\ \angle 1 + \angle 3 = 180° \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \angle 1 = \angle 2 = 40° \\ \angle 3 = 140° \end{cases}$.

2) и 3) выполняются аналогично.

Ответ: 1) 40°; 40°; 140°; 140°; 2) 50°; 50°; 130°; 130°; 3) 80°; 80°; 100°; 100°.

№ 16. Найдите все углы параллелограмма, если разность двух из них равна: 70°; 2) 110°; 3) 140°.

Данные углы не могут быть противолежащими, так как если бы они были противолежащими, то разность между ними равнялось бы 0^o. То есть они прилежащие к одной стороне, а значит их сумма равна 180^o. Обозначим градусную меру меньшего угла за x, получим:

1) $x + 70^o$ — градусная мера второго угла;

$x + x + 70^o = 180^o$; $2x = 110^o$;

$x = 55^o$, то есть

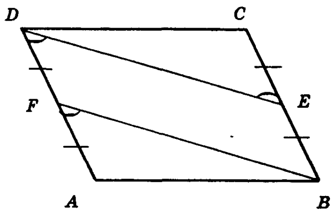
$\angle 1 = 55°$; $\angle 2 = 125°$.

$\angle 3$ и $\angle 4$ соответственно противолежащие углам 1 и 2. А значит $\angle 3=\angle 1=55^{\circ}$, $\angle 4=\angle 2=125^{\circ}$.

2) и 3) решаются аналогично.

Ответ: 1) 55°; 55°; 125°; 125°; 2) 35°; 35°; 145°; 145°; 3) 20°; 20°; 160°; 160°.

№ 17. В параллелограмме ABCD точка *E* — середина стороны BC, а F — середина стороны AD. Докажите, что четырехугольник *BEDF* — параллелограмм.



Докажем, что $\angle EDF$ и $\angle BFD$ — односторонние для прямых ED и *BF* и секущей *FD* и их сумма равна 180°, а значит, прямая $BF \parallel ED$ и, тогда, четырехугольник *BEDF* — параллелограмм.

Рассмотрим Δ ABF и Δ CDE:

AB = CD — противоположные стороны параллелограмма.

$\angle A = \angle C$ — противоположные углы параллелограмма.

$AF = CE$, так как $AF = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC = CE$

Значит, $\Delta\ ABF = \Delta CDE$ — по двум сторонам и углу между ними. Следовательно $\angle CED=\angle AFB$. Но $\angle CED = \angle EDF$ (накрест лежащие для параллельных BC и AD и секущей *ED*). Значит $\angle EDF=\angle AFB$. Поэтому $\angle EDF + \angle BFD = \angle AFB + \angle BFD = 180°$, так как $\angle AFB$ и $\angle BFD$ — смежные углы. Тогда, $BF \parallel ED$ и четырехугольник *BEDF* — параллелограмм. Что и требовалось доказать.

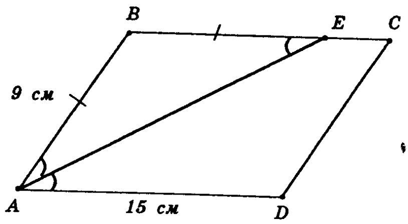
№ 18. Докажите, что если у четырехугольника две стороны параллельны и равны, то он является параллелограммом.

Задача решена в учебнике на стр. 70 п. 53.

№ 19. В параллелограмме *ABCD* проведена биссектриса угла A, которая пересекает сторону BC в точке *E*. Чему равны отрезки *BE* и *EC*, если AB = 9 см, AD = 15 см?

$\angle BAE = \angle EAD$ (так как AE — биссектриса $\angle BAD$). К тому же $\angle BEA=\angle EAD$ (накрест лежащие углы при параллельных BC и AD и секущей AE). А значит

$\angle BAE = \angle BEA$. Тогда, Δ ABE — равнобедренный и AB= BE = 9 см (боковые стороны). BC = AD=15 см; BC = BE + EC;
15=9+EC,
откуда EC=6 см.
Ответ: BE=9 см; EC=6 см.



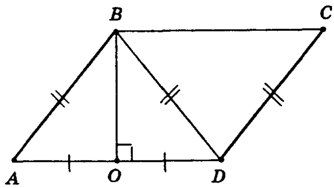
№ 20. Две стороны параллелограмма относятся как 3:4. а периметр его равен 2,8 м. Найдите стороны.

Пусть одна сторона равна 3x, тогда вторая 4x. $P = (4x + 3x)\cdot 2$; то есть 14x=2,8 м. и x=0,2 м. Далее, $3x = 3\cdot 0{,}2$ м $=0{,}6$ м. и $4x = 4\cdot 0{,}2$ м. = 0,8 м.

Противоположные стороны параллелограмма равны. Так что стороны параллелограмма 0,6 м; 0,6 м; 0,8 м; 0,8 м.

Ответ: 0,6 м; 0,6 м; 0,8 м; 0,8 м.

№ 21. В параллелограмме *ABCD* перпендикуляр, опущенный из вершины *B* на сторону AD, делит ее пополам. Найдите диагональ BD и стороны параллелограмма, если известно, что периметр параллелограмма равен 3,8 м, а периметр треугольника ABD равен 3 м.



Δ ABD — равнобедренный, так как BO является одновременно высотой и медианой. Значит AB = BD. AB=CD (противоположные стороны параллелограмма). Значит BD= CD.

$P_{ABCD}=2(AB+AD)$ и $P_{ABCD}=3{,}8$ м

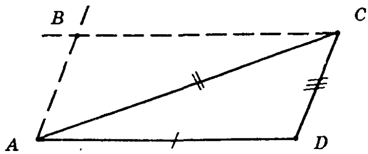
$P_{ABD}=AB+BD+AD=2AB+AD$. $P_{ABD}=3$ м. Так что,

$P_{ABCD} - P_{ABD} = 2AB + 2AD - AB - BD - AD = 2AD\text{-}AD=AD$. То есть AD=0,8 м

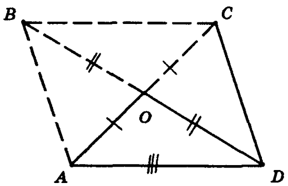
$$BD = \frac{1}{2}(P_{ABD} - AD) = \frac{1}{2}(3\text{ м} - 0{,}8\text{ м}) = 1{,}1\text{ м}.$$ AD = BC = 0,8 м; AB = DC = 1,1 м.

Ответ: BD = 1,1 м.; стороны ABCD равны 0,8 м; 1,1 м; 0,8 м; 1,1 м.

№ 22. Постройте параллелограмм: 1) по двум сторонам и диагонали; 2) по стороне и двум диагоналям.

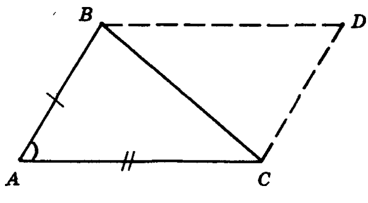


1) Построим ΔACD по трем сторонам (две стороны равны сторонам параллелограмма, а третья сторона — диагональ параллелограмма). Через вершины C и A проведем прямые, параллельные сторонам AD и DC, соответственно точка пересечения B будет являться четвертой вершиной искомого параллелограмма ABCD.

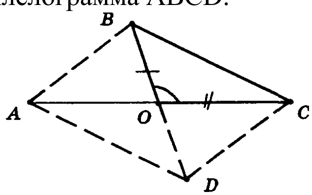


2) Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам. Построим треугольник по трем сторонам (первая сторона является стороной параллелограмма, две другие равны половине диагоналей). На продолжении стороны AO отложим отрезок OC = AO, а на продолжении стороны DO отложим отрезок OB = DO. Точки *B* и *C* являются вершинами искомого параллелограмма ABCD.

№ 23. Постройте параллелограмм: 1) по двум сторонам и углу; 2) по диагоналям и углу между ними.



1) Строим ΔABC по двум сторонам и углу. Через вершины B и C проводим прямые, параллельные сторонам AC и AB, соответственно, точка пересечения C является четвертой вершиной искомого параллелограмма ABCD.



2) Строим Δ *BCO* по двум сторонам, которые являются половинами данных диагоналей, и углу между ними. Далее на

продолжениях сторон ВО и СО и откладываем отрезки OD и ОА, соответственно равные половинам диагоналей. Получаем искомый параллелограмм ABCD.

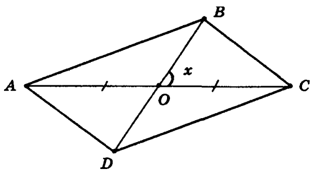
№ 24. Докажите, что если у параллелограмма все углы равны, то он является прямоугольником.

Задача доказана в учебнике на стр. 71 п. 54.

№ 25. Докажите, что если в параллелограмме хотя бы один угол прямой, то он является прямоугольником.

Пусть один из углов равен 90°, тогда, прилежащий угол равен 90°, т.к. их сумма равна 180^{o}. У каждого из этих углов есть противолежащие, равные им углы. Тогда все четыре угла прямые и искомый параллелограмм является прямоугольником. Что и требовалось доказать.

№ 26. Докажите, что если у параллелограмма диагонали равны, то он является прямоугольником.



Пусть ABCD — параллелограмм. O — точка пересечения диагоналей. AC = DB (по условию), тогда,

$AO = OC = DO = OB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}AC$ Значит ΔAOB и ΔBOC — равнобедренные. Пусть $\angle$BOC=x. Следовательно $\angle OBC=\frac{1}{2}$ (180°-x).

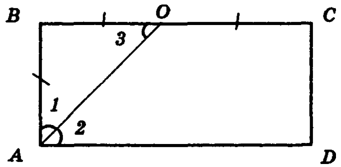
$\angle AOB = 180° - x$, $\angle ABO = \frac{1}{2}(180° - \angle AOB) = \frac{1}{2}(180° - 180° + x) = \frac{1}{2}x$. $\angle ABC = \angle ABO + \angle OBC = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(180° - x) = \frac{1}{2}x + 90° - \frac{1}{2}x = 90°$. То есть $\angle B=90^{o}$.

Аналогично доказывается, что остальные углы параллелограмма тоже прямые. Следовательно, данный параллелограмм является прямоугольником.

№ 27. Бетонная плита с прямолинейными краями должна иметь форму прямоугольника. Как при помощи бечевки проверить правильность формы плиты?

У правильной плиты должна быть форма прямоугольника, а значит противолежащие стороны и диагонали должны быть равны. Это можно проверить с помощью бечевки.

№ 28. Биссектриса одного из углов прямоугольника делит сторону прямоугольника пополам. Найдите периметр прямоугольника, если его меньшая сторона равна 10 см.



Заметим, что

$\angle 1 = \angle 2$ (так как AO — биссектриса).

$\angle 2 = \angle 3$ (как накрест лежащие углы для прямых BC, AD и секущей AO).

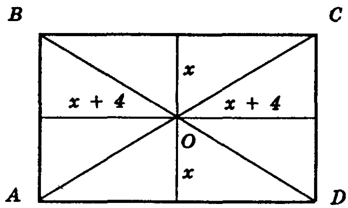
Значит, $\angle 1 = \angle 3$ и Δ ABO — равнобедренный. Поэтому AB = BO = 10 см (стороны равнобедренного треугольника).

BO = OC (по условию). Значит, OC = 10 см, BC = BO + OC = = 10 см + 10 см = 20 см.

$P_{ABCD} = 2\cdot(AB + BC) = 2\cdot (10 + 20) = 60$ см.

Ответ: 60 см.

№ 29. В прямоугольнике точка пересечения диагоналей отстоит от меньшей стороны на 4 см дальше, чем от большей стороны. Периметр прямоугольника равен 56 см. Найдите стороны прямоугольника.



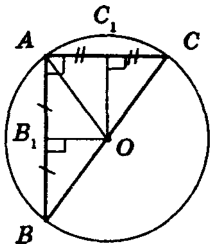
Пусть расстояние от точки пересечения до большей стороны равно x см, тогда расстояние до меньшей (x+4) см. P_{ABCD}=2·(AB+BC)=56 см.

BC =2· (x + 4); AB = 2x; 2·(x + 4) + 2x = 56: 2; 4x = 20;

x = 5. AB = 2x=10 (см); BC =2(x+4)= 18 (см).

Ответ: 10 см; 18 см.

№ 30. Из одной точки окружности проведены две взаимно перпендикулярные хорды , которые удалены от центра на 6 см и 10 см. Найдите их длины.



Опустим из центра O перпендикуляры OC_1 и OB_1 на данные хорды AC и AB. Четырехугольник AC_1OB_1— прямоугольник, поэтому $AB_1 = OC_1 = 10$ см;

$AC_1 = B_1O = 6$ см.

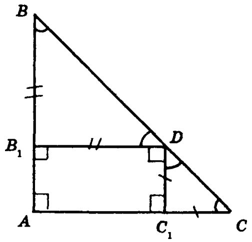
Рассмотрим ΔAOB. Он равнобедренный, так как AO = OB = r, OB_1 — перпендикуляр, проведенный к основанию равнобедренного треугольника, а значит является и медианой. Поэтому, $AB_1 = B_1B$, и значит AB = = $2AB_1 =$ 20 см.

Аналогично доказывается, что

$AC = 2AC_1 = 2·6$ см = 12 см;

Ответ: 20 см; 12 см.

№ 31. В прямоугольный треугольник, каждый катет которого равен 6 см, вписан прямоугольник, имеющий с треугольником общий угол. Найдите периметр прямоугольника.



По условию AB = AC = 6 см, значит ΔABC — равнобедренный, поэтому

$\angle B = \angle C = \frac{1}{2}(180° - 90°) = 45°$.

Рассмотрим ΔBDB_1.

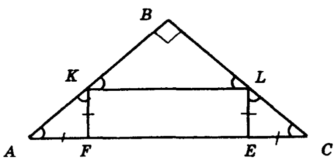
$\angle B_1 = 90°$ (по условию), $\angle B = 45°$, значит $\angle B_1DB = 180° - (90°+45°) = 45°$.

Значит ΔBDB_1 — равнобедренный, так как $\angle B = \angle B_1DB = 45°$, поэтому $BB_1 = B_1D$.

$P_{AB_1DC_1} = 2(AB_1+B_1D) = 2(AB_1+B_1B) = 2AB = 2\cdot 6$ см $=12$ см.

Ответ: 12 см.

№ 32. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан прямоугольник так, что две его вершины находятся на гипотенузе, а две другие — на катетах. Чему равны стороны прямоугольника, если известно, что они относятся как 5: 2, а гипотенуза треугольника равна 45 см?



ΔABC — равнобедренный, отсюда $\angle A = \angle C = \frac{1}{2}(180^\circ - 90^\circ) = 45^\circ$

ΔAFK и ΔCEL — равнобедренные , так как $\angle AKF = 180^\circ - \angle F - \angle A = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ = \angle A$ и аналогично $\angle ELK = \angle C$ Поэтому $AF = FK$ и $LE = EC$.

К тому же $KF = LE$ (стороны прямоугольника), так что $AF = KF = LE = EC$.

Пусть FK=2x, а KL=5x. Тогда AF=EC=FK=2x и FE=KL=5x. Получим

$AC = AF + FE + EC = 2x + 5x + 2x = 9x = 45$; откуда

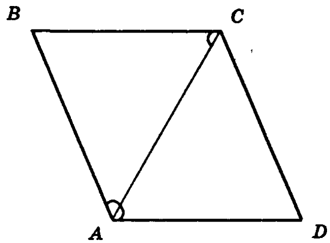
$x = 5$. Далее, $FK = 2x = 10$ см; $KL = 5x = 25$ см.

Ответ: 10 см; 25 см.

№ 33. Докажите, что если у параллелограмма диагонали перпендикулярны, то он является ромбом.

Задача доказана в учебнике на стр. 72 п. 55.

№ 34. Докажите, что если диагональ параллелограмма является биссектрисой его углов, то он является ромбом.



Пусть AC биссектриса и диагональ в параллелограмме $ABCD$, тогда $\angle BAC = \angle CAD$.

$\angle BCA = \angle CAD$ (как накрест лежащие углы для параллельных BC и AD и секущей AC).

Тогда, $\angle BAC = \angle BCA$, а значит ΔABC — равнобедренный с основанием AC. Значит, AB = BC. По свойству параллелограмма AB = CD, BC = AD, как противоположные стороны.

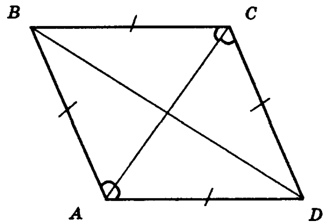
Итак, все стороны параллелограмма ABCD равны, значит, он ромб. Что и требовалось доказать.

№ 35. Углы, образуемые диагоналями ромба с одной из его сторон, относятся как 4:5. Найдите углы ромба.

Диагонали ромба являются биссектрисами его углов. Пусть половина меньшего угла равна 4x, следовательно весь угол будет равен 8x. Половина большего угла тогда равна 5x, а весь угол 10x. Так как эти углы являются прилежащими к одной стороне их сумма равна 180°.

То есть, 8x + 10x = 180°; откуда x=10°. Тогда углы ромба равны 8x и 10x, то есть 80°; 100°.
Ответ: 80°; 80°; 100°; 100°.

№ 36. Докажите, что четырехугольник, у которого все стороны равны, является ромбом.



Пусть AB = BC = CD = AD .

Рассмотрим ΔABC и ΔADC. Они равнобедренные, так как

AB=BC и CD=AD.

Далее AB=CD, BC=AD и

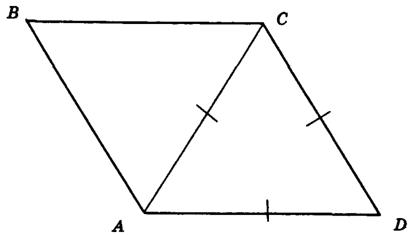
AC — общая.

Значит ΔABC = ΔADC (по трем сторонам). Поэтому ∠BAC =∠ ACD. А эти углы являются накрест лежащими для прямых AB и CD и секущей AC.

Значит, AB‖CD. Аналогично доказывается что BC‖AD. Значит, данный четырехугольник — параллелограмм с равными сторонами, то есть — ромб.

Что и требовалось доказать.

№ 37. В ромбе одна из диагоналей равна стороне. Найдите углы ромба.



AD = CD (стороны ромба), и AD = AC (по условию).

Значит, AC = CD = AD, поэтому ΔACD — равносторонний, и

∠D = 60° (угол равностороннего треугольника).

∠A + ∠D = 180° так как ∠A и ∠D — прилежащие к одной стороне ромба.

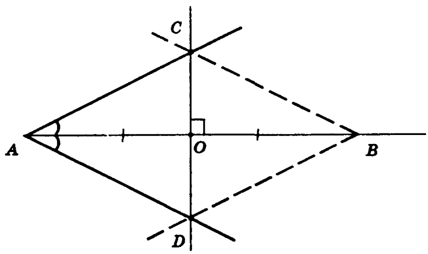
Откуда ∠D = 120°.

$\angle B=\angle D=60^{o}$ и $\angle C=\angle A=120^{o}$ – как противолежащие углы ромба.

Так что углы ромба 60°; 60°; 120°; 120°. 60°; 60°; 120°; 120°.

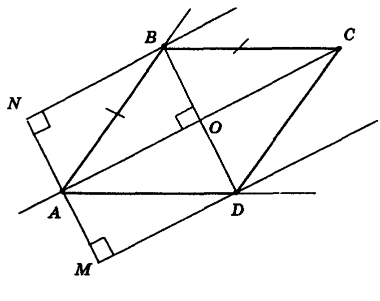
№ 38. Постройте ромб: 1) по углу и диагонали, исходящей из вершины этого угла; 2) по диагонали и противолежащему углу.

1) Строим данный угол и проводим биссектрису. От вершины биссектрисы откладываем диагональ AB и делим ее пополам, точкой O. Проводим перпендикуляр через точку O к диагонали AB, который пересекает стороны угла в точках C и D, которые являются вершинами искомого ромба.



2) Пусть дан угол α и диагональ d. Необходимо построить ромб, в котором один из углов равен a, а противолежащая диагональ равна d.

Предположим, что существует ромб ABCD, в котором диагональ BD = d, и $\angle BAD=a$.



Диагональ AC — биссектриса $\angle BAD$ и $AC \perp BD$. Проведем через точку A прямую $MN \perp AC$ и отложим отрезки $AM = AN = \frac{1}{2}$ d, по разные стороны от точки A, следовательно, *MNBD* — прямоугольник.

Построим $\angle BAD = \alpha$. Проведем биссектрису AC угла BAD. Через точку A проведем прямую $MN \perp a$ и от точки A отложим $AM = AN = \frac{1}{2}d$. Проведем через *M и N* прямые, параллельные AC, точки пересечения этих прямых со сторонами угла BAD обозначим соответственно B и D. Раствором циркуля, равным AB, проведем дугу с центром B, при этом, точку пересечения дуги с прямой *a* обозначим C. Получим четырехугольник ABCD.

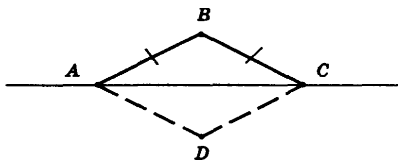
Докажем, что ABCD — ромб в котором $\angle BAD = \alpha$ и BD = d.

$\angle BAD = \alpha$ — по построению.

Так как *MNBD* — прямоугольник по построению, то отрезок AO — серединный перпендикуляр к BD и ΔBAD — равнобедренный (AB=AD); OC — серединный перпендикуляр в ΔBCD, значит, ΔBCD — равнобедренный (BC = CD). Так как AB = BC по построению, то AB=BC=CD=AD и ABCD — ромб с $\angle BAD = \alpha$.

По построению BD = *MN* = d, значит, ABCD — искомый ромб.

№ 39. Постройте ромб: 1) по стороне и диагонали; 2) по двум диагоналям.

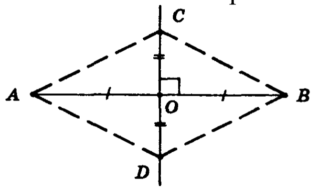


1) Построим диагональ AC. Строим треугольник ABC по трем сторонам AB, BC, AC, где

AB = BC — данные стороны ромба, а

AC — диагональ ромба.

Через точку A проводим прямую, параллельную BC, а через точку C прямую, параллельную AB. Точку пересечения данных прямых обозначим D ABCD – искомый ромб.

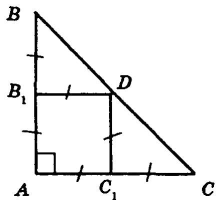


2) Строим диагональ CD и проводим к ней серединный перпендикуляр. От точки O на серединном перпендикуляре в разные стороны откладываем отрезки OA и OB равные $\frac{1}{2}$ от длины второй диагонали. Точки A, B, C, D — вершины искомого ромба.

№ 40. Докажите, что если диагонали прямоугольника пересекаются под прямым углом, то он есть квадрат.

Задача доказана в учебнике на стр. 73 п. 56.

№ 41. В равнобедренный прямоугольный треугольник, каждый катет которого 2 м, вписан квадрат, имеющий с ним общий угол. Найдите периметр квадрата.



AB = AC = 2 м.

ΔB_1BD и ΔC_1CD — равнобедренные (доказательство аналогично задаче № 31 § 6). Значит

$BB_1 = B_1D$ (боковые стороны равнобедренных треугольников).

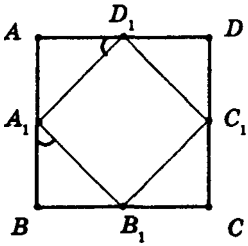
$B_1D = AB_1$ (стороны квадрата).

Тогда, $AB_1 = B_1B = B_1D$.

Значит $AB = 2AB_1 = 2$ м; $AB_1 = 1$ м. $P_{AB_1DC_1} = 4AB_1 = 4 \cdot 1 = 4$ м.

Ответ: 4 м.

№ 42. Дан квадрат *ABCD*. На каждой из его сторон отложены равные отрезки: $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ есть квадрат.



Рассмотрим ΔAD_1A_1, ΔDC_1D_1, ΔCB_1C_1, ΔBA_1B_1.

$AA_1 = DD_1 = CC_1 = BB_1$ (по условию). А значит и $AD_1 = DC_1 = CB_1 = BA_1$.

$\angle A = \angle D = \angle C = \angle B = 90°$ (т.к. ABCD — квадрат). Тогда, $\Delta AD_1A_1 = \Delta DC_1D_1 = \Delta CB_1C_1 = \Delta BA_1B_1$ (по двум катетам). Значит, $A_1D_1 = D_1C_1 = C_1B_1 = B_1A_1$, а также $\angle AD_1A_1 = \angle BA_1B_1$.

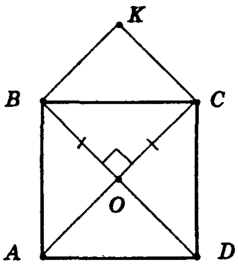
$\angle AD_1A_1 + \angle AA_1D_1 = 90°$ (сумма острых углов прямоугольного треугольника). Значит, $\angle BA_1B_1 + \angle AA_1D_1 = 90°$. А так как

$\angle AA_1D_1 + \angle D_1A_1B_1 + \angle BA_1B_1 = 180°$, то

$\angle D_1A_1B_1 = 180° - (\angle BA_1B_1 + \angle AA_1D_1) = 90°$.

Аналогично доказывается, что и остальные углы четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ прямые. Тогда, данный четырехугольник $A_1B_1C_1D_\wedge$ является квадратом. Что и требовалось доказать.

№ 43. Диагональ квадрата равна 4 м. Сторона его равна диагонали другого квадрата. Найдите сторону последнего.

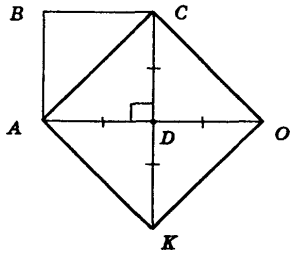


Пусть в квадрате ABCD диагональ AC = 4 м. Диагонали квадрата равны, в точке пересечения делятся пополам и взаимно перпендикулярны, поэтому, ΔBOC — равнобедренный и прямоугольный. Достроив его до прямоугольника *BOCK*, получим квадрат с диагональю, равной стороне данного квадрата . Тогда его сторона

$$OC = \frac{1}{2} AC = 2 \text{ м}.$$

Ответ: 2м.

№ 44. Дан квадрат, сторона которого 1 м, диагональ его равна стороне другого квадрата. Найдите диагональ последнего.

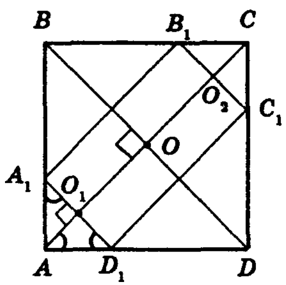


Пусть в квадрате ABCD сторона AB = 1м. Продолжим сторону AD и на продолжении от точки D, отложив отрезок DO = AD, аналогично продолжим CD, отложив отрезок DK = CD.

Получим четырехугольник ACOK, в котором диагонали AO и CK в точке пересечения делятся пополам, а также равны и взаимно перпендикулярны, значит, *ACOK* — квадрат, диагонали которого AO = CK = 2AD = 2 · 1 м = 2 м.

Ответ: 2 м.

№ 45. В квадрат вписан прямоугольник так, что на каждой стороне квадрата находится одна вершина прямоугольника и стороны прямоугольника параллельны диагоналям квадрата. Найдите стороны прямоугольника, зная, что одна из них вдвое больше другой и что диагональ квадрата равна 12 м.



$\angle BOA = 90°$ (диагонали квадрата пересекаются под прямым углом).

$\angle BOA = \angle A_1O_1A = 90°$ (как соответственные углы для параллельных прямых BD и A_1D, и секущей AC).

AC — биссектриса, поэтому $\angle A_1AO_1 =$

$$= \angle O_1AD_1 = \frac{1}{2} \angle A = 45°.$$

Значит, $\angle AA_1O_1 = \angle AD_1O_1 = 45°$. ΔA_1AD_1 — равнобедренный; так как AO_1 является высотой, биссектрисой, а значит и медианой. Значит $A_1O_1 = O_1D_1$. ΔAO_1D_1 — равнобедренный, значит, $AO_1 = O_1D_1$. Так что, $A_1O_1=AO_1=O_1D_1$. Пусть отрезок A_1O_1=x м, тогда A_1D_1=2x м и $A_1B_1=2A_1D_1$=4 м.

Далее, $AC=AO_1 + O_1O_2 + O_2C=AO_1 + A_1B_1 + O_2C$, x+4x+x= 12;

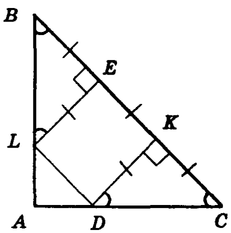
6x = 12 м; x = 2 м. Тогда A_1D_1 = 2x = 2·2 м = 4 м;

A_1B_1 = 4x = 8 м.

$A_1D_1 = B_1C_1$ = 4 м; $A_1B_1 = D_1C_1$ = 8 м.

Ответ: 4 м; 8 м.

№ 46. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан квадрат так, что две его вершины находятся на гипотенузе, а другие две — на катетах. Найдите сторону квадрата, если известно, что гипотенуза равна 3 м.



ΔABC — прямоугольный равнобедренный, тогда,

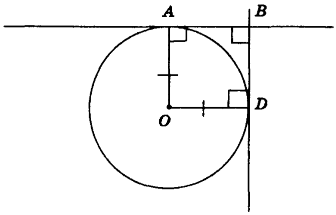
$\angle ABC = \angle ACB = \frac{1}{2}$ (180°-90°)=45°.

ΔDKC — равнобедренный, так как

$\angle DKC = 90°$; $\angle ACK = 45°$, тогда, и $\angle KDC = 45°$. Значит DK = KC. Аналогично и ΔBLE — равнобедренный и BE = *LE*. *LE* = =KD=EK – стороны квадрата. Пусть BE=x м. Тогда EK=KC=x м . BC = BE + EK + KC = 3x м = 3 м; x = 1 м. Откуда EK = 1 м.

Ответ: 1 м.

№ 47. Из данной точки проведены к окружности две взаимно перпендикулярные касательные, радиус окружности 10 см. Найдите длины касательных (расстояние от данной точки до точки касания).



Касательная перпендикулярна радиусу в точке касания. Поэтому $\angle A = \angle D = 90°$; $\angle B = 90°$ по условию, а значит, и $\angle O = 90°$. Четырехугольник ABDO — прямоугольник. AO = OD=10 см (радиусы). Тогда BD=AO=10 см и AB=OD=10 см (как противоположные стороны прямоугольника).
Ответ: 10 см.

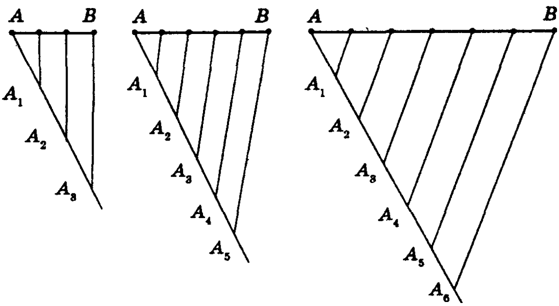
№ 48. Разделите данный отрезок AB на 3 равных части.

Задача решена в учебнике на стр. 74 п. 57.

№ 49. Разделите данный отрезок на указанное число равных частей: 1) 3; 2) 5; 3)6.

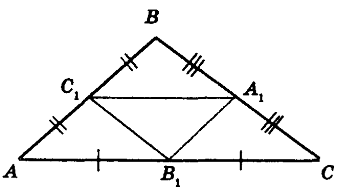
См. решение задачи № 48.

1)n = 3, 2) n = 5, 3) n = 6.



№ 50. Стороны треугольника равны 8 см, 10 см, 12 см. Найдите стороны треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.

Пусть точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон ΔABC.



Тогда A_1C_1, A_1B_1, B_1C_1 — средние линии данного треугольника ABC. Значит

$A_1C_1 = \frac{1}{2} \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 12$ см = 6 см;

$A_1B_1 = \frac{1}{2} \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 8$ см = 4 см; $B_1C_1 = \frac{1}{2} \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 10$ см = 5 см.

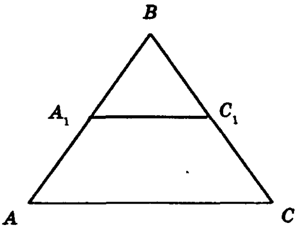
Ответ: 4 см; 5 см; 6 см.

№ 51. Периметр треугольника равен 12 см, середины сторон соединены отрезками. Найдите периметр полученного треугольника.

Воспользуемся задачей № 50.

Отрезки, соединяющие середины сторон треугольника, являются средними линиями и равны половине их длин . $P_{ABC} = AB + BC + CA = 12$ см; $P_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}(AB+BC+AC) = = \frac{1}{2} \cdot 12$ см = 6 см. Ответ: 6 см.

№ 52. Средняя линия равнобедренного треугольника, параллельная основанию, равна 3 см. Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 16 см.



$A_1C_1 \parallel AC$; $A_1C_1 = \frac{1}{2}AC = 3$ см; $AC = 6$ см.

ΔABC— равнобедренный, значит $AB = BC$. Тогда
$P_{ABC} = AC + AB + BC = AC + 2AB = 6$ см $+ 2AB = 16$см.
$2AB = 10$ см; $AB = BC = 5$ см.

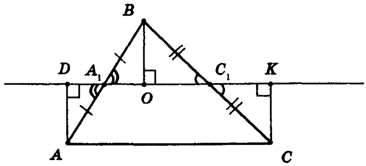
Ответ: 6 см; 5 см; 5 см.

№ 53. Как построить треугольник, если заданы середины его сторон?

При построении воспользуемся свойством средней линии треугольника.

Соединим три точки, которые являются серединами сторон треугольника. Получим треугольник. Через каждую вершину данного треугольника проводим прямую, параллельную противоположной стороне. Точки пересечения таких прямых и образуют искомый треугольник.

№54. Докажите, что вершины треугольника равноудалены от прямой, проходящей через середины двух его сторон.



Проведем AD ⊥ DK; BO ⊥ DK; CK ⊥ DK (где DK – продолжение A_1C_1).

Δ ADA_1, ΔA_1OB, ΔBOC_1 и ΔC_1KC — прямоугольные.

Рассмотрим Δ ADA_1 и Δ BOA_1:

$AA_1 = A_1B$ (так как A_1 – середина AB). $\angle DA_1A = \angle BA_1O$ (вертикальные углы). Значит ΔADA_1 = ΔBOA_1 (по гипотенузе и острому углу). Поэтому AD=BO. Аналогично доказывается, что Δ BOC_1 = Δ CKC_1 и BO = CK. Значит AD = BO = CK. А значит, вершины A, B и C равноудалены от прямой DK, проходящей через середины сторон *AB* и *BC*. Что и требовалось доказать.

№ 55. Докажите, что середины сторон четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

Задача доказана в учебнике на стр. 74 п. 58.

№ 56. Найдите стороны параллелограмма из предыдущей задачи, если известно, что диагонали четырехугольника равны 10 м и 12 м.

Используем решение задачи № 55 (см. рис. 134 на стр. 91 учебника).

EF — средняя линия Δ *ABC*.

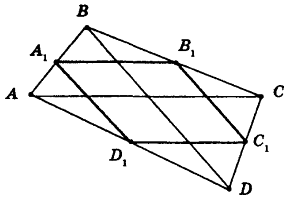
Значит $EF=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}10\text{м}=5\text{м}$, а $HG=EF$ – противолежащая сторона, то есть HG=5 м

EH — средняя линия ΔABD.

Значит $EH = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}\cdot 12$ м $= 6$, а FG=EH – противолежащая сторона, то есть $EH = FG = 6$ м.

Ответ: 5 м; 6 м.

№ 57. У четырехугольника диагонали равны a и b. Найдите периметр четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон данного четырехугольника.



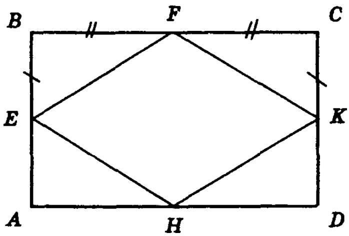
В двух предыдущих задачах было доказано, что сторона параллелограмма равна половине диагонали четырехугольника, которой она параллельна.

Значит, четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм; со сторонами $A_1B_1=\frac{1}{2}a$ и $B_1C_1=\frac{1}{2}b$.

$$P_{A_1B_1C_1D_1} = 2(A_1B_1 + B_1C_1)2 = 2\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right) = a + b$$

Ответ: $a + b$.

№ 58. Докажите, что середины сторон прямоугольника являются вершинами ромба. И наоборот, середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника.

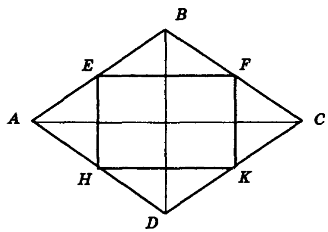


1) Четырехугольник ABCD — прямоугольник, *E*, *F*, *K* и *H*— середины его сторон.

Четырехугольник *EFKH* — параллелограмм (см. решение задачи № 55).

Δ EBF = Δ KCF (так как EB=CK и BF=FC). Значит $EF = FK$, где EF и FK - стороны параллелограмма. Значит, *EFKH* — ромб.

2) Пусть четырехугольник ABCD является ромбом и E, *F*, *K*, *H* — середины его сторон.

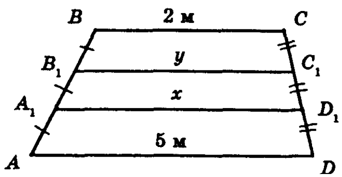


Четырехугольник *EFKH* — параллелограмм (см. задачу №55).

Его стороны параллельны диагоналям ромба (как средние линии), а они перпендикулярны, значит, углы четырехугольника $EFKH$ — прямые. Значит, четырехугольник $EFKH$ — прямоугольник.

Что и требовалось доказать.

№ 59. Боковая сторона трапеции разделена на три равные части, и из точек деления проведены к другой стороне отрезки параллельные основаниям. Найдите длины этих отрезков, если основания трапеции равны 2 м и 5 м.



B_1C_1 — средняя линия трапеции A_1BCD_1. Пусть $B_1C_1 = y$ м. A_1D_1 — средняя линия трапеции AB_1C_1D. Пусть $A_1D_1 = x$ м. Тогда:

$$B_1C_1 = \frac{2+x}{2};\quad 2B_1C_1 = 2 + x;$$

$$2y = 2 + x \quad A_1D_1 = \frac{y+5}{2};\ 2A_1D = y + 5;\quad 2x = y + 5;\quad y = 2x - 5$$

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2y = 2 + x \\ y = 2x - 5, \end{cases}$$

$2\cdot(2x - 5) = 2 + x$,

$4x - 10 = 2 + x$,

$3x = 12$,

$x = 4$. $y = 2\cdot4 - 5 = 3$. Значит,

$A_1D_1 = 4$ м. $B_1C_1 = 3$ м.

Ответ: 3 м; 4 м.

№ 60. Докажите, что у равнобокой трапеции углы при основании равны.

Задача решена в учебнике на стр. 76 п. 59.

№ 61. Чему равны углы равнобокой трапеции, если известно, что разность противолежащих углов равна 40°?

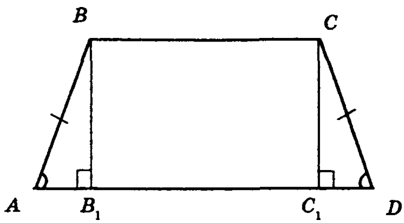
Известно, что у равнобокой трапеции сумма противолежащих углов равна 180°. Пусть градусная мера одного угла равна x, а противолежащего ему — y. Получим систему:

$$\begin{cases} x + y = 180 \\ x - y = 40, \end{cases}$$ Складываем равенства:

2x=220, x=110, из первого уравнения y=180 – x = 180 – 110 = 70.

Углы при основании у равнобокой трапеции равны.
Ответ: 70°; 110°

№ 62. В равнобокой трапеции большее основание равно 2,7 м, боковая сторона равна 1 м, угол между ними 60°. Найдите меньшее основание.



Пусть ABCD — равнобокая трапеция.

Тогда AB = CD, и ∠A = ∠D, тогда, $\Delta ABB_1 = \Delta DCC_1$ (где $BB_1 \perp AD$ и $CC_1 \perp AD$).

Из равенства треугольников следует, что $AB_1 = DC_1$. ΔABB_1 — прямоугольный, ∠A = 60° (по условию), тогда, $\angle ABB_1 = 30°$, значит

$AB_1 = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot 1$ м = 0,5 м (катет, лежащий против угла 30, равен $\frac{1}{2}$ гипотенузы). Значит и $DC_1 = AB_1 = 0{,}5$ м.

$BC = B_1C_1$ (противоположные стороны прямоугольника BCC_1B_1)

Тогда AD=2,7 м, $AD = AB_1 + B_1C_1 + C_1D = 2AB_1 + BC = 2 \cdot 0{,}5$ м + BC.

2,7 м = 1 м + BC; BC = 1,7 м.
Ответ: 1,7 м.

№ 63. В равнобокой трапеции высота, проведенная из вершины тупого угла, делит большее основание на отрезки 6 см и 30 см. Найдите основания трапеции.

Воспользуемся решением и рисунком задачи № 62. В решении задачи № 62 мы доказали, что $AB_1 = C_1D = 6$ см. Далее

$B_1D = 30$ см,

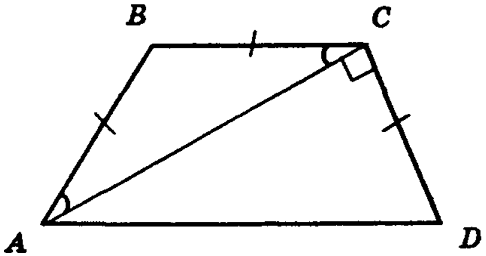
$B_1D = B_1C_1 + C_1D$, $B_1C_1 = B_1D - C_1D = 30$ см – 6 см = 24 см,

$B_1C_1 = BC = 24$ см.

$AD = AB_1 + B_1D = 6$ см + 30 см = 36 см.

Ответ: 36 см; 24 см.

№64*. Меньшее основание равнобокой трапеции равно боковой стороне, а диагональ перпендикулярна боковой стороне. Найдите углы трапеции.



Рассмотрим ΔABC:

$AB = BC$, значит, ΔABC равнобедренный и $\angle BAC = \angle BCA$. Пусть $\angle BAC = \angle BCA = x°$.

Но $\angle CAD = \angle ACB$ (как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей AC). Значит $\angle CAD = x°$. Значит, AC — биссектриса угла BAD. В равнобокой трапеции углы при основании равны, тогда

$\angle D = \angle BAD = 2x°$.

Рассмотрим ΔACD:

$\angle CAD = x°$; $\angle D = 2x°$; $\angle ACD = 90°$.

Составим уравнение: $x + 2x + 90 = 180$; откуда получим

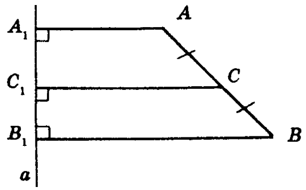
$3x = 90$; $x = 30$, то есть

$\angle BAC = 30°$; $\angle BAD = \angle CDA = 2 \cdot \angle BAC = 2 \cdot 30° = 60°$.

$\angle ABC = \angle BCD = \angle ACB + \angle ACD = 30° + 90° = 120°$.

Ответ: 60°; 60°; 120°; 120°.

№ 65. По одну сторону от прямой *a* даны две точки A и B на расстояниях 10 м и 20 м от нее. Найдите расстояние от середины отрезка AB до прямой *a*.



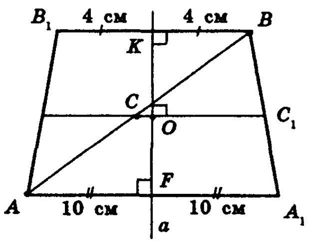
Проведем $AA_1 \perp a$; $BB_1 \perp a$; $CC_1 \perp a$. $AC = CB$ (C — середина отрезка AB). Четырехугольник ABB_1A_1 — прямоугольная трапеция. Отрезок CC_1параллелен основаниям AA_1 и BB_1 (перпендикуляры, проведенные к одной прямой, параллельны), поэтому

CC_1 — средняя линия трапеции ABB_1A_1. А значит,

$$CC_1 = \frac{AA_1 + BB_1}{2} = \frac{10\text{м} + 20\text{м}}{2} = 15 \text{ м.}$$

Ответ: 15 м.

№ 66. По разные стороны от прямой a даны две точки A и B на расстояниях 10 см и 4 см от нее. Найдите расстояние от середины отрезка AB до прямой *a*.



Построим точки B_1 и A_1 на расстояниях 10 см и 4 см от прямой a, так что $AA_1 \perp a$ и $BB_1 \perp a$. Через точку C середину отрезка AB, проведем к прямой a перпендикуляр CC_1.

$B_1B \parallel CC_1 \parallel AA_1$. $AC = CB$ (по построению). $BC_1 = C_1A_1$. Рассмотрим Δ ABA_1. CC_1 — средняя линия Δ ABA_1, поэтому

$$CC_1 = \frac{1}{2}AA_1 = \frac{1}{2} \cdot 20 \text{ см} = 10 \text{ см.}$$

Рассмотрим трапецию $FKBA_1$. OC_1 — средняя линия трапеции.

поэтому $OC_1 = \dfrac{KB + FA_1}{2} = \dfrac{4\text{см} + 10\text{см}}{2}$ = 7 см. А значит,

$CO = CC_1 - OC_1 = 10$ см - 7 см = 3 см.

Ответ: 3 см.

№ 67. Основания трапеции относятся как 2:3, а средняя линия равна 5 м. Найдите основания.

Пусть длина меньшего основания трапеции равна 2x, а большего 3x. Средняя линия трапеции равна полусумме основания. То есть

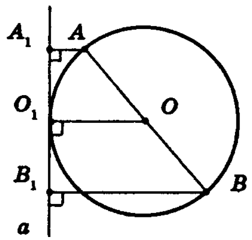
$$5 = \frac{2x + 3x}{2};$$

$10 = 5x$; $x = 2$.

Меньшее основание равно 2 · 2 м = 4 м, большее — 3 · 2 м =6 м.

Ответ: 4 м; 6 м.

№ 68. Концы диаметра удалены от касательной к окружности на 1,6 м и 0,6 м. Найдите длину диаметра.



$AA_1 \perp a$; $OO_1 \perp a$; $BB_1 \perp a$;

тогда, $AA_1 \parallel OO_1 \parallel BB_1$

$AO = BO = OO_1$. — радиусы одной окружности.

$A_1O_1 = O_1B_1$

$AA_1 = 0{,}6$ м; $BB_1 = 1{,}6$ м.

OO_1 — средняя линия трапеции AA_1B_1B. Поэтому

$$OO_1 = \frac{AA_1 + BB_1}{2} = \frac{0{,}6\text{м} + 1{,}6\text{м}}{2} = 1{,}1 \text{ м.}$$

$AB = AO + OB = 2 \cdot OO_1 = 1{,}1\text{м} \cdot 2 = 2{,}2$ м. Диаметр равен 2,2 м.

Ответ: 2,2 м.

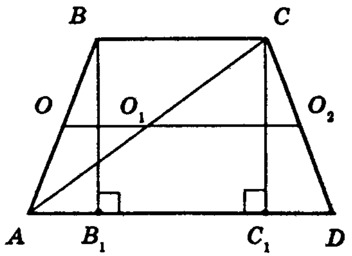
№ 69. Средняя линия трапеции 7 см, а одно из ее оснований больше другого на 4 см. Найдите основания трапеции.

Средняя линия трапеции равна полусумме оснований. Пусть длина меньшего основания равна x см, большего — (x + 4) см. Средняя линия равна 7 см. Тогда, $7 = \frac{x + (x + 4)}{2}$; то есть

$14 = 2x + 4$; $2x = 10$; $x = 5$.

5см — одно основание, второе основание: 5 см + 4 см = 9 см. Ответ: 5 см; 9 см.

№ 70. Высота, проведенная из вершины тупого угла равнобокой трапеции, делит большее основание на части, имеющие длины a и b (a > b). Найдите среднюю линию трапеции.



Пусть *ABCD* — равнобокая трапеция.

$AB_1 = b$; $B_1D = a$ (по условию);

$\Delta ABB_1 = \Delta DCC_1$ (см. задачу № 62), отсюда $AB_1 = C_1D = b$.

$BC = B_1C_1 = a - b$ (BCC_1B_1 — прямоугольник).

Средняя линия трапеции состоит из средних линий ΔABC и ΔACD. То есть

$$OO_1 = \frac{1}{2}BC = \frac{a-b}{2},\ O_1O_2 = \frac{1}{2}AD = \frac{a+b}{2}.$$

$$OO_2 = OO_1 + O_1O_2 = \frac{a-b}{2} + \frac{a+b}{2} = \frac{2a}{2} = a.$$

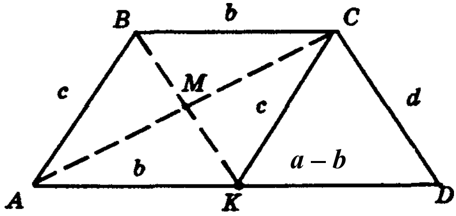
Ответ: a.

№ 71*. Постройте трапецию по основаниям и боковым сторонам.

Пусть даны отрезки *a*, *b*, *c*, *d*, такие, что в трапеции ABCD с основаниями AD и BC $AD = a$; $BC = b$;

$AB = c$; $DC = d$ ($AD > BC$).

Пусть есть трапеция ABCD, удовлетворяющая таким условиям.



Проведем в трапеции ABCD прямую CK‖AB, пересекающую AD в точке K. Получим параллелограмм ABCK, в котором CK = AB = c; AK = BC = b.

Далее рассмотрим ΔKCD:

KC = c; CD = d; KD = a - b.

Данный треугольник можно построить по трем известным сторонам. Тогда

Построим трапецию ABCD по плану:

1. На произвольной прямой от точки A отложим отрезок AD = a, на этом отрезке от точки A отложим отрезок AK = b.

2. Построим ΔKCD со сторонами KD = a - b;

KC = c; CD = d.

3. Построим параллелограмм AKCB, для этого проведем через точки A и C прямые параллельные прямым CK и AK и пересекающиеся в точке B.

Докажем, что получившийся четырехугольник ABCD — искомая трапеция.

AD = a (по построению). BC‖AK, BC‖AD, так как *ABCK* — параллелограмм по построению. BC = b (по построению).

Если BC‖AD, BC = b; AD = a, то ABCD — трапеция с основаниями AD = a, BC = b, удовлетворяющими условию задачи.

CD = d; CK = c (по построению).

AB = CK = c, так как *ABCK* — параллелограмм. Боковые стороны CD и AB удовлетворяют условию задачи.

Итак, ABCD — искомая трапеция.

Заметим, что задача имеет решения только если можно построить ΔKCD со сторонами d; c; $a – b$. Это возможно тогда и только тогда, когда одна сторона меньше суммы двух других, но больше разности двух других, то есть, при условиях:

$$\begin{cases} d < c + a - b \\ d > c - (a - b), \end{cases}$$

$$\begin{cases} d < c + a - b \\ d > c + b - a, \end{cases}$$

$$\begin{cases} d + b < a + c \\ d + a > b + c, \end{cases}$$

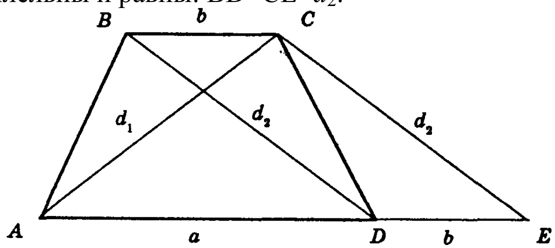
Так как в данной полуплоскости относительно KD можно построить только один ΔKCD с заданными сторонами, то решение, то есть искомая трапеция, будет единственным.

№ 72*. Постройте трапецию по основаниям и диагоналям.

Даны отрезки a, b, d_1 и d_2. Необходимо построить трапецию ABCD (с основаниями AD и BC, AD > BC), такую, что AD = a; BC = b; AC = d; BD = d_2.

Допустим, что ABCD — искомая трапеция.

Тогда на продолжении AD отложим отрезок DE = b. Следовательно, DBCE — параллелограмм, так как две его стороны BC и DE параллельны и равны. Поэтому стороны BD и CE параллельны и равны: BD=CE=d_2.



Рассмотрим ΔACE. AC = d_1; CE = d_2; $AE = a + b$.

План построения трапеции:

1) На произвольной прямой отложим отрезок AD = a. На продолжении AD отложим отрезок DE = b.

2) Построим ΔACE по известным сторонам AE = $a + b$; AC = d_1; CE = d_2.

3) Через точку C проведем прямую, параллельную AE, и на этой прямой от точки C в ту же полуплоскость относительно CE, где и точка A, отложим отрезок CB = b.

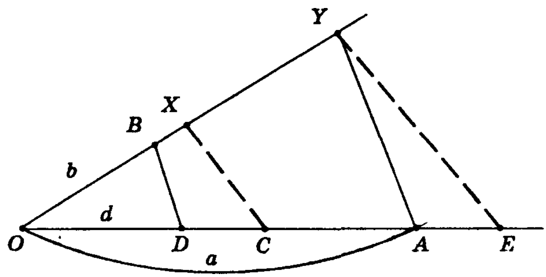
4) Получим четырехугольник ABCD. Докажем, что ABCD искомая трапеция.

BC ‖ AD (по построению). Так как AD ≠ *BC* (по условию), то ABCD не является параллелограммом, а значит, является трапецией с основаниями AD = *a*, BC = *b* (по построению).

По построению диагональ AC = d_1; CE = d_2. Так как *BCED* — параллелограмм (его противоположные стороны BC и DE по построению параллельны и равны), то BD = CE = d_2.

Значит, диагонали AC и BD равны соответственно d_1 и d_2, и следовательно, ABCD — искомая трапеция. Заметим, что задача имеет решения не всегда, а только в случае если можно построить ΔACE со сторонами в + *b*, d_1 и d_2. Это возможно тогда и только тогда, когда одна сторона больше разности двух других и меньше суммы двух других, то есть, когда $|d_2 - d_1| <$ а + $b < d_2 + d_1$. В этом случае ΔACE определяется однозначно и задача имеет единственное решение. В других случаях ΔACE построить нельзя и задача решений не имеет.

№ 73*. Даны отрезки *a*, *b*, c, *d*, *e*. Постройте отрезок $x = \frac{abc}{de}$.



Даны пять отрезков: а, *b*, с, *d*, *e*. Необходимо построить отрезок $x = \frac{abc}{de}$. Построим сначала отрезок данной $y = \frac{ab}{d}$, а затем искомый отрезок $x = \frac{abc}{de}$.

Построим любой острый угол с вершиной O и на одной стороне этого угла отложим отрезки OD = *d* и OA = а, а на другой стороне отрезок OB = *b*.

Через точку A проведем прямую, параллельную BD, которая пересечет луч OB в точке Y.

Так как $BD \parallel AY$, то $\frac{OA}{OD} = \frac{OY}{OB}$; $OY = \frac{OA \cdot OB}{OD} = \frac{ab}{d} = y$.

Далее, на стороне OA отложим отрезки OC = c и $OE = e$. Через точку C проведем прямую, параллельную YE и пересекающую OB в точке X. Так как $YE \parallel XC$, то

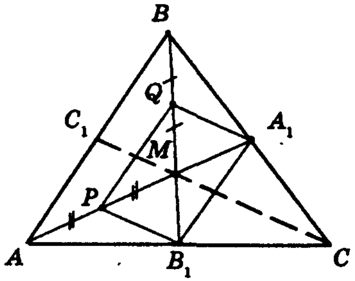
$$\frac{OY}{OX} = \frac{OE}{OC};\ OX = \frac{OY \cdot OC}{OE} = \frac{y \cdot c}{e} = \frac{abc}{de}$$

Обозначим $OX=x$ – искомый отрезок.

№ 74*. 1). В треугольнике ABC проведены медианы AA_1 и BB_1, которые пересекаются в точке M. В треугольнике AMB проведена средняя линия PQ. Докажите, что четырехугольник A_1B_1PQ — параллелограмм.

2) Докажите, что любые две медианы треугольника в точке пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины.

3) Докажите, что все три медианы треугольника пересекаются в одной точке.



1) Так как PQ — средняя линия ΔAMB, то $PQ \parallel AB$ и $PQ = \frac{1}{2} AB$.

A_1B_1 — средняя линия ΔACB; поэтому

$A_1B_1 \parallel AB$ и $A_1B_1 = \frac{1}{2} AB$. Так как $A_1B_1 \parallel AB$ и $PQ \parallel AB$, то $PQ \parallel A_1B_1$. А так же $PQ = \frac{1}{2} AB = A_1B_1$.

Значит, четырехугольник A_1B_1PQ — параллелограмм, так как две его стороны параллельны и равны, чем доказано первое утверждение.

2) Докажем, что медианы AA_1 и BB_1 в точке пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины. PQ — средняя линия ΔAMB, следовательно $AP = PM = x$; $BQ = QM = y$. Выше мы доказали, что A_1B_1PQ — параллелограмм, значит, его диагонали в точке пересечения делятся пополам, то есть $A_1M = PM = x$ и $B_1M=MQ=Y$.

Получаем

$BM:MB_1 = 2y:y = 2:1$;

$AM:MA_1 = 2x:x = 2:1$;

Чем доказано второе утверждение задачи.

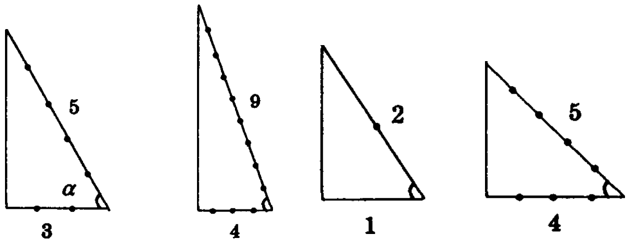
3) Проведем третью медиану CC_1, которая пересекает медиану AA_1 в некоторой точке и, согласно доказанному во второй части задачи, эта точка должна делить медиану AA_1 в отношении 2:1, считая от точки A. Так как положение такой точки на отрезке определяется однозначно, то она совпадает с точкой M. Значит, CC_1 проходит через точку M. То есть все три медианы пересекаются в одной точке. Что и требовалось доказать.

§ 7. Теорема Пифагора

№ 1. Постройте угол, косинус которого равен: 1) $\frac{3}{5}$; 2) $\frac{4}{9}$; 3) 0,5; 4) 0,8.

Построим прямоугольный треугольник, у которого отношение катета к гипотенузе равно заданному значению косинуса. А значит угол треугольника, прилежащий к этому катету, является искомым углом.

1) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$; 2) $\cos\alpha = \frac{4}{9}$;



3)$\cos\alpha = 0{,}5$; 4) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$

$0{,}5 = \frac{1}{2}$ $\quad 0.8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

№ 2. У прямоугольного треугольника заданы катеты *а* и *в*. Найдите гипотенузу, если:
1) $a = 3$, $b = 4$; 2) $a = 1$, $b = 1$; 3) $a = 5$, $b = 6$.

Если c — гипотенуза, a и b — катеты, то по теореме Пифагора:

$c^2 = a^2 + b^2$; $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Далее:

1) $c = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$;

2) $c = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \approx 1{,}4$;

3) $c = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{25+36} = \sqrt{61} \approx 7{,}8$.

Ответ: 1) 5; 2) $\sqrt{2} \approx 1{,}4$; 3) $\sqrt{61} \approx 7{,}8$.

№ 3. У прямоугольного треугольника заданы гипотенуза *с* и катет *а*. Найдите второй катет, если: 1) $c = 5$, $a = 3$; 2) $c = 13$, $a = 5$; 3)$c = 6$, $a = 5$.

Если b – второй катет, то по теореме Пифагора:

$c^2 = a^2 + b^2, b^2 = c^2 - a^2, b = \sqrt{c^2 - a^2}.$ Далее:

1) $b = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$;

2) $b = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169-25} = \sqrt{144} = 12$;

3) $b = \sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{36-25} = \sqrt{11} \approx 3{,}3$.

Ответ: 1) 4; 2) 12; 3) $\sqrt{13} \approx 3{,}3$.

№ 4. Две стороны прямоугольного треугольника равны 3 м и 4 м. Найдите третью сторону. (Два случая.)

Данные стороны могут быть двумя катетами или одним катетом и гипотенузой.

1) $\left.\begin{array}{l} a = 3м \\ b = 4м \end{array}\right\}$ катеты, тогда гипотенуза, по теореме Пифагора

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5\text{м.}$$

2) a = 3 м — катет, c = 4 м — гипотенуза, c > a. Тогда второй катет, по теореме Пифагора:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7} \approx 2{,}6\text{м.}$$

Ответ: 5 м; или $\sqrt{7} \approx$ 2,6 м.

№ 5. Могут ли стороны прямоугольного треугольника быть пропорциональны числам 5, 6, 7?

Обозначим стороны треугольника *5x, 6x, 7x,* где *x* — некоторый коэффициент. Так как треугольник прямоугольный, то по теореме Пифагора $(5x)^2 + (6x)^2 = (7x)^2$, то есть $25 + 36 = 49$, но это неверно.

Значит, стороны прямоугольного треугольника не могут быть пропорциональны этим числам.

Ответ: не могут.

№ 6. Найдите сторону ромба, если его диагонали равны: 1) 6 см и 8 см; 2) 16 дм и 30 дм; 3) 5 м и 12 м.

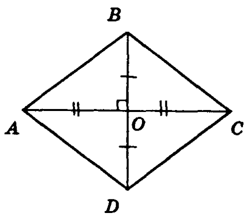
Диагонали ромба перпендикулярны и в точке пересечения делятся пополам. Значит ΔAOB — прямоугольный и AO= $\frac{1}{2}$AC, BO= $\frac{1}{2}$BD.

Значит,

1) AO=3 см; BO=4 см
2) AO=8 дм; BO=15 дм
3) AO=2,5 м; BO=6 м

По теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{AO^2 + BO^2}$$, то есть



1) $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ см.

2) $AB = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17$ дм.

3) $AB = \sqrt{2{,}5^2 + 6^2} = \sqrt{6{,}25 + 36} = \sqrt{42{,}25} = 6{,}5$ м

Ответ: 5 см; 17 дм; 6,5 м.

№ 7. Стороны прямоугольника 60 см и 91 см. Чему равна диагональ?

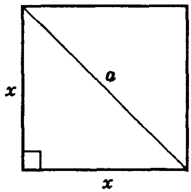
Диагональ прямоугольника является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами, равными сторонам прямоугольника. Значит гипотенуза, по теореме Пифагора, равно:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{60^2 + 91^2} = \sqrt{3600 + 8281} = \sqrt{11881} = 109 \ \text{(см)}.$$

Ответ: 109 см.

№ 8. Диагональ квадрата a. Чему равна сторона квадрата?

Обозначим сторону квадрата за x. Тогда по теореме Пифагора получим:

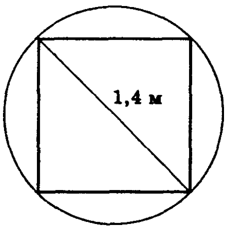


$$a^2 = x^2 + x^2;\ a^2 = 2x^2;\ x^2 = \frac{a^2}{2},$$

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

№ 9. Можно ли из круглого листа железа диаметром 1,4 м вырезать квадрат со стороной 1 м?



Чтобы из круга диаметром 1,4 м можно было вырезать квадрат со стороной 1 м, диагональ квадрата должна быть не больше диаметра круга. Найдем диагональ квадрата по формуле

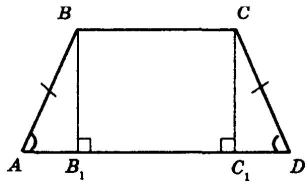
$$d = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Так что $d = \sqrt{2} > \sqrt{1{,}96} \approx 1{,}4$

То есть диагональ квадрата больше диаметра круга, а значит квадрат вырезать нельзя.

Ответ: нельзя.

№ 10. Найдите высоту равнобокой трапеции, у которой основания 5 м и 11 м, а боковая сторона 4 м.



Проведем высоты BB_1 и CC_1 . $\Delta ABB_1 = \Delta CC_1D$ (по гипотенузе и острому углу).

Значит $AB_1 = DC_1$.

$BC = B_1C_1$ (так как BCC_1B_1-рямоугольник).

$AB_1=\frac{1}{2}(AD–B_1C_1)= \frac{1}{2}(11–5)=3$ м.

ΔABB_1 — прямоугольный. Поэтому

$BB_1 = \sqrt{AB^2 - AB_1^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7} \approx 2{,}6$ м.

Ответ: $\sqrt{7}$ м $\approx 2{,}6$ м.

№ 11. Найдите медиану равнобедренного треугольника с основанием *a* и боковой стороной *b*, проведенную к основанию.

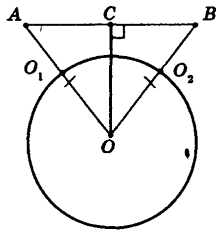
Задача решена в учебнике на стр. 86 п. 63.

№ 12. Могут ли увидеть друг друга космонавты, летящие над поверхностью Земли на высоте 230 км, если расстояние между ними по прямой равно 2200 км? Радиус Земли равен 6370 км.

Пусть A и B точки, в которых находятся космонавты

$AO_1 = O_2B = 230$ км.

$AB = 2200$ км.



$OO_1=OO_2=R=6370$ км. Чтобы космонавты, находящиеся в точках A и B, могли видеть друг друга, надо, чтобы высота OC ΔAOB была больше радиуса Земли.

ΔAOB — равнобедренный, поэтому OC — высота, а значит и медиана ΔAOB, поэтому $AC = CB = 2200 : 2 = 1100$ км.

Далее, $AO=AO_1+O_1O=230+6370=6600$ км.

$$OC = \sqrt{AO^2 - AC^2} = \sqrt{6600^2 - 1100^2} =$$
$$= \sqrt{(6600-1100)(6600+1100)} = \sqrt{77 \cdot 100 \cdot 55 \cdot 100} = 100\sqrt{77 \cdot 55} =$$
$$= 100\sqrt{7 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 5} = 1100\sqrt{35} \approx 1100 \cdot 6 \approx 6600(\text{км}),$$

— что больше чем R.

Так что космонавты могут увидеть друг друга.
Ответ: Могут.

№ 13. В равностороннем треугольнике со стороной a найдите высоту.

Проведем высоту. Она также будет являться и медианой, так как треугольник является равнобедренным.

Далее по теореме Пифагора:

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

№ 14. Даны отрезки a и b. Как построить отрезок: 1) $\sqrt{a^2 + b^2}$; 2) $\sqrt{a^2 - b^2}$, $a > b$?

1) Даны два отрезка a и b, требуется построить отрезок $\sqrt{a^2 + b^2}$. Построим прямоугольный треугольник с катетами a и b. Его гипотенуза по теореме Пифагора равна $\sqrt{a^2 + b^2}$, а это и есть искомый отрезок.

2) Необходимо построить прямоугольный треугольник по известным гипотенузе a и катету b. Второй катет — по теореме Пифагора равен $\sqrt{a^2 - b^2}$, то есть является искомым отрезком.

№ 15*. Даны отрезки a и b. Как построить отрезок $x = \sqrt{ab}$?

Если мы построим отрезки $m = \frac{a+b}{2}$ и $n = \frac{a-b}{2}$, то, пользуясь предыдущей задачей, мы сможем построить отрезок

$$\sqrt{m^2 - n^2} = \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}} = \sqrt{ab} = x$$ — искомый отрезок.

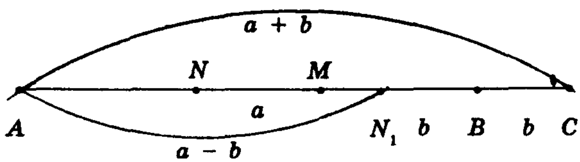
$$\frac{(a+b)^2}{4}-\frac{(a-b)^2}{4}=\frac{a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2}{4}=\frac{4ab}{4}=ab.$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=ab$$

$$\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}=\sqrt{ab}$$

То есть, если построить отрезки $m=\frac{a+b}{2}, n=\frac{a-b}{2}$,

то $\sqrt{ab}=\sqrt{m^2-n^2}$.



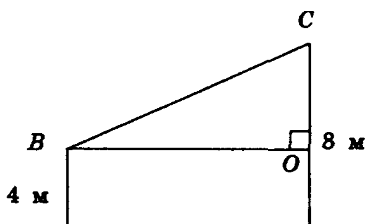
Теперь построим отрезки $m=\frac{a+b}{2}$; $n=\frac{a-b}{2}$,

на луче АС отложим АВ = a, $BC = b$.

АС = $a + b$, разделив его пополам, получим $AM = \frac{a+b}{2} = m$.

От точки В отложим на луче ВА отрезок BN_1 = b, получим $AN_1 = a - b$, разделив его пополам, получим $AN = \frac{a-b}{2} = n$.

№ 16. Между двумя фабричными зданиями устроен покатый желоб для передачи материалов. Расстояние между зданиями равно 10 м, а концы желоба расположены на высоте 8 м и 4 м над землей. Найдите длину желоба.



Проведем BO⊥CD. Четырехугольник, ABOD — прямоугольник, значит, AB = DO = 4 м; AD = BO = 8 м.

CO = CD – OD = 8м – 4 м = 4м. ΔBOC — прямоугольный, по теореме Пифагора получим:

BC = $\sqrt{BO^2 + CO^2} = \sqrt{10^2 + 4^2} = \sqrt{100 + 16} = \sqrt{116} \approx 10{,}8$ м.

Ответ: длина желоба $\sqrt{116} \approx 10{,}8$ м.

№ 17. Докажите, что если треугольник имеет стороны a, b, c и $a^2 + b^2 = c^2$, то у него угол, противолежащий стороне c, прямой.

Задача доказана в учебнике на стр. 86 п. 63.

№ 18. Чему равен угол треугольника со сторонами 5, 12, 13, противолежащий стороне 13?

Стороны треугольника 5, 12, 13.

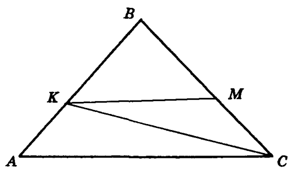
Треугольник со сторонами 5, 12, 13 — прямоугольный, так как $5^2 + 12^2 = 13^2$ (см. задачу № 17).

Значит сторона, равная 13, является гипотенузой, так как она больше катетов и противолежащий ей угол равен 90°.

№ 19. На стороне AB треугольника ABC взята точка X. Докажите, что отрезок CX меньше по крайней мере одной из сторон AC или BC.

Задача доказана в учебнике на стр. 87 п. 65.

№ 20. Докажите, что расстояние между любыми двумя точками на сторонах треугольника не больше большей из его сторон.



Пусть в ΔABC AC — большая сторона, $K \in AB$, $M \in BC$.

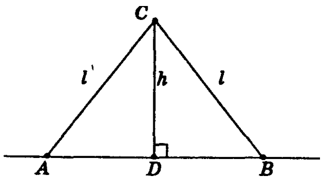
Рассмотрим Δ BKC. Согласно результату задачи № 19, можно утверждать, что KM < KB или $KM < KC$.

Если $KM<KB$, то KB<AB, а значит и KM<AB, но так как AC — большая сторона, то AB < AC, значит и KM < AC.

Если $KM < KC$, то согласно задаче № 19 для ΔABC можно утверждать, что KC < BC или KC < AC, но так как AC — большая сторона, то KC < AC, а значит, и $KM < AC$. Так что $KM < AC$ в любом случае.

Что и требовалось доказать.

№ 21. Даны прямая и точка C на расстоянии h от этой прямой. Докажите, что из точки C можно провести две и только две наклонные длины l, если $I > h$.



Проведем CD⊥AB, CD=h (по условию).

Отложим от точки D на прямой отрезки AD и DB, равные $\sqrt{l^2 - h^2}$. Получим, что

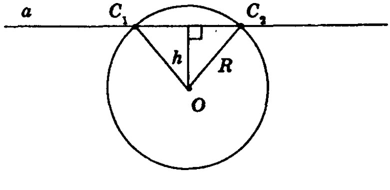
$$AC = \sqrt{\left(\sqrt{l^2 - h^2}\right)^2 + h^2} = \sqrt{l^2 - h^2 + h^2} = \sqrt{l^2} = l$$

Аналогично CB = l (по теореме Пифагора). Третьей наклонной не может быть по свойству наклонных. Что и требовалось доказать.

№ 22*. Докажите, что прямая, отстоящая от центра окружности на расстояние, меньшее радиуса, пересекает окружность в двух точках.

Пусть дана окружность с центром O и радиусом R и прямая a, отстоящая от центра на расстояние $h < R$.

Так как $R > h$, то из точки O можно провести две и только две наклонные длиной R (см. задачу № 21 § 7). Обозначим эти наклонные OC_1 и OC_2. Так как $OC_1 = OC_2 = R$, то точки C_1 и C_2 лежат на окружности с центром O и радиусом R. А значит, прямая a имеет с окружностью две общие точки. В задаче № 14* § 5 было доказано, что окружность и прямая не могут иметь более двух общих точек.

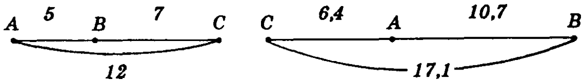


Значит, если расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса, то прямая пересекает окружность в двух и только двух различных точках. Что и требовалось доказать.

№ 23. Докажите, что любая хорда окружности не больше диаметра и равна диаметру только тогда, когда сама является диаметром.

Задача решена в учебнике на стр. 88 п. 66.

№ 24. Докажите, что точки А, *B*, *C* лежат на одной прямой, если: 1) AB = 5 м, BC = 7 м. AC = 12 м; AB = 10,7, BC = 17.1, AC = 6,4.



AB + BC=12=AC AC+AB=6,4+10,7=17,1=BC

Так как расстояние между двумя из этих точек равно сумме расстояний от них до третьей точки, значит, эти точки лежат на одной прямой. Что и требовалось доказать.

№ 25. Докажите, что любая сторона треугольника больше разности двух других его сторон.

Пусть стороны треугольника a, b, c.

В любом треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон (неравенство треугольника).

$a + b > c$, тогда, $a > c - b$,

$a + c > b$, тогда, $c > b - a$,

$b + c > a$, тогда, $b > a - c$.

Так что любая сторона больше разности двух его сторон. Что и требовалось доказать.

№ 26. Может ли у параллелограмма со сторонами 4 см и 7 см одна из диагоналей быть равной 2 см?

Диагональ разбивает параллелограмм на два треугольника со сторонами 2 см, 4 см, 7 см, но неравенство треугольника не выполняется, так как 7 см < 2 см + 4 см — неверно, значит диагональ не может быть равной 2 см.
Ответ: не может.

№ 27. В треугольнике одна сторона равна 1,9 м, а другая — 0,7 м. Найдите третью сторону, зная, что ее длина равна целому числу метров.

В треугольнике каждая сторона, меньше суммы двух других сторон, но больше их разности. Пусть x — третья сторона треугольника, a = 1,9 м, b = 0,7 м – две другие стороны. Тогда

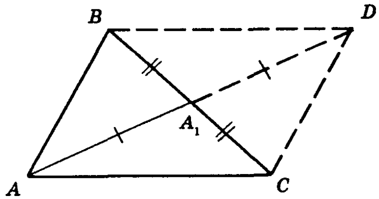
$a - b < x < a + b$, так что

$1{,}9 - 0{,}7 < x < 1.9 + 0{,}7$; $1{,}2 < x < 2{,}6$.

Так как x — целое число, то x = 2.

Ответ: 2 м.

№ 28*. Докажите, что медиана треугольника ABC, проведенная из вершины A, меньше полусуммы сторон AB и AC.



Пусть в ΔABC медиана AA_1. Нужно доказать, что

$$AA_1 < \frac{AB + AC}{2}$$

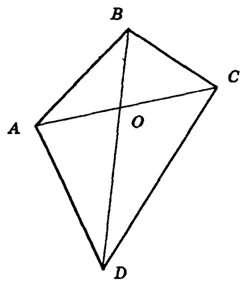
Продолжим медиану AA_1 за A_1 и на продолжении отложим $A_1D = = AA_1$. Тогда полученный четырехугольник ABDC будет параллелограммом, так как его диагонали AD и BC в точке пересечения делятся пополам, значит, BD = AC. К тому же $AD = 2AA_1$.

В ΔABD сторона меньше суммы двух других сторон, то есть $AD < AB + BD$, $2AA_1 < AB + AC$.

$$AA_1 < \frac{AB + AC}{2}.$$

Что и требовалось доказать.

№ 29*. Известно, что диагонали четырехугольника пересекаются. Докажите, что сумма их длин меньше периметра, но больше полупериметра четырехугольника.



Пусть диагонали AC и BD четырехугольника ABCD пересекаются в точке O. Нужно доказать, что AC + BD больше полупериметра четырехугольника ABCD, но меньше периметра. Применяя неравенство треугольника для Δ AOB, Δ BOC, Δ COD, Δ AOD получим:

$$+\begin{array}{l} AO + OB > AB. \\ BO + OC > BC, \\ OC + OD > DC, \\ AO + OD > AD, \end{array}$$

Сложив почленно неравенства, получим:

$2OB + 2OC + 2OD + 2AO > AB + BC + CD + AD;$

$2((BO + OD) + (AO + OC)) > P_{ABCD}.$

$2(BD + AC) > P_{ABCD}$, $BD + AC > \frac{1}{2}P_{ABCD}$.

Рассмотрев неравенство треугольника для Δ ABC, Δ ADC, Δ DAB, Δ DCB, получим:

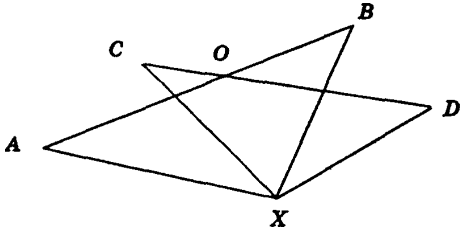
$$+\begin{array}{l} AC < AB + BC, \\ AC < AD + DC, \\ BD < AB + AD, \\ \underline{BD < BC + CD.} \end{array}$$

$2AC + 2BD < 2AB + 2BC + 2CD + 2AD$, $AC + BD < P_{ABCD}$.

$\frac{1}{2}P_{ABCD} < AC + BD < P_{ABCD}$.

Что и требовалось доказать.

№ 30. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O. Докажите, что сумма расстояний от любой точки плоскости до точек A, *B*. C и D не меньше, чем OA + *OB* + OC + OD.



Используя неравенство треугольника для Δ ABX и Δ CDX получим:

$AX + BX \geq AB$, AB = AO + OB,

$CX + DX \geq CD$, CD = CO + OD, то есть

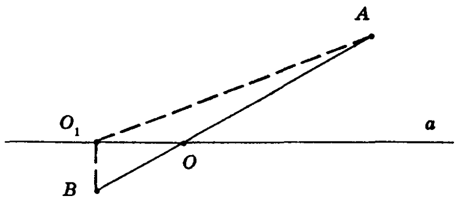
$AX + BX + CX + DX \geq AB$ + CD,

$AX + BX + CX + DX \geq AO$ + OB + CO + OD.

Что и требовалось доказать.

№ 31*. На прямолинейном шоссе требуется указать место автобусной остановки так, чтобы сумма расстояний от нее до населенных пунктов A и B была наименьшей. Рассмотрите два случая: 1) населенные пункты расположены по разные стороны от шоссе; 2) населенные пункты расположены по одну сторону от шоссе.

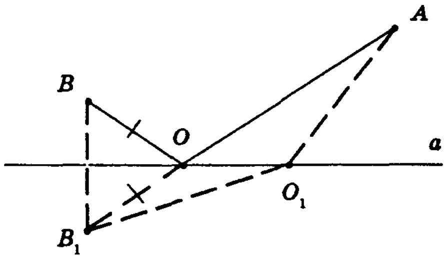
1)



Обозначим шоссе *a*.

Если *A* и *B* лежат по разные стороны от *a*, то остановка *O* должна быть в точке пересечения отрезка AB с *a*. Если O_1 не лежит на *AB*, то по неравенству треугольника в ΔAO_1B сумма двух сторон треугольника больше третьей стороны; то есть $BO_1 + AO_1 > AB$, $BO_1 + AO_1 > BO + AO$, значит, $BO + AO = AB$ — наименьшая сумма расстояний от остановки *O* до населенных пунктов *A* и *B*. И точка O – искомая.

2)



Построим точку B_1, симметричную B относительно прямой a. Пусть точка O — точка пересечения AB_1 и a. Тогда сумма расстояний от O до A и B_1 будет наименьшей. Так как $OB = OB_1$ то и сумма расстояний от O до A и B тоже будет наименьшей и $AO + OB = AB_1$.

№ 32. Могут ли стороны треугольника быть пропорциональными числам 1, 2, 3?

Пусть x, $2x$, $3x$, — стороны треугольника, а x некоторый коэффициент. Воспользуемся неравенством треугольника: $x + 2x > 3x$. Но это неверно. Значит такого треугольника не существует.

Ответ: не могут.

№ 33. Докажите, что в треугольнике каждая сторона меньше половины периметра.

Пусть a, b, c — стороны треугольника. По неравенству треугольника:

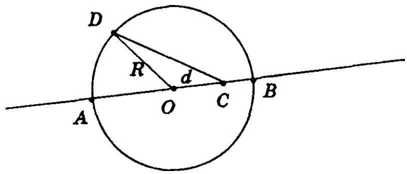
$c<a + b$, $c + c<a + b + c$, $2c<a + b + c$.

$$c < \frac{a+b+c}{2}$$

$$c < \frac{P}{2}$$

Что и требовалось доказать.

№ 34. Внутри окружности радиуса R взята точка на расстоянии d от центра. Найдите наибольшее и наименьшее расстояния от этой точки до точек окружности.



Пусть D — произвольная точка на окружности.

По неравенству треугольника: $OD \leq OC + CD$, $R \leq d + CD$, $CD \geq R - d$.

Здесь равенство достигается только при совпадении точек D *и* B.

$CD \leq OD + OC$,

$CD \leq R + d$

Здесь равенство достигается только при совпадении точек D и А. Значит, наименьшее расстояние CD равно $R - d$, а наибольшее $R + d$.

Ответ: $R + d$; $R - d$.

№ 35. Вне окружности радиуса R взята точка на расстоянии d от центра. Найдите наибольшее и наименьшее расстояния от этой точки до точек окружности.

Задача решается аналогично предыдущей.

Ответ: $R + d$; $R - d$.

№ 36. Могут ли пересекаться окружности, центры которых находятся на расстоянии 20 см, а радиусы 8 см и 11 см? Объясните ответ.

Пусть O_1, и O_2 — центры окружностей. Если окружности пересекаются в некоторой точке D, то должно быть:

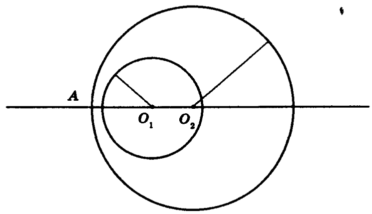
O_1,D + O_2D $\geq O_1O_2$(по неравенству треугольника), то есть

$R_1 + R_2 \geq d$,

$8 + 11 \geq 20$ — неверное неравенство, а значит, окружности не могут пересекаться.

Ответ: не могут.

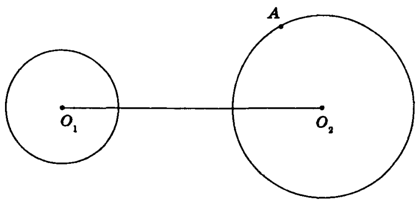
№ 37. Могут ли пересекаться окружности, центры которых находятся на расстоянии 5 см, а радиусы 6 см и 12 см? Объясните ответ.



Допустим, что данные окружности пересекаются в точке A. Следовательно O_1A = R_1 = 6 см, O_2A = R_2 = 12 см, O_1O_2 = 5 см. Согласно неравенству треугольника $AO_2 \leq AO_1 + O_1O_2$, то есть $12 \leq 6 + 5$, что неверно. Значит окружности не пересекаются.
Ответ: не могут.

№ 38*. Докажите, что в задаче 36 окружности находятся одна вне другой, а в задаче 37 окружность радиуса 6 см находится внутри окружности радиуса 12 см.

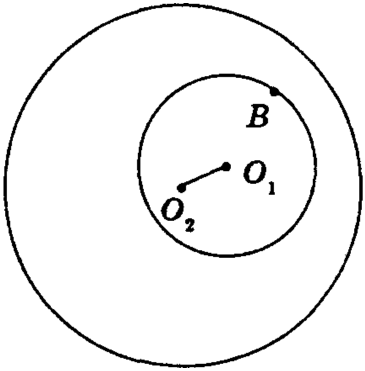
1) Надо доказать, что если расстояние между центрами окружности 20 см, а радиусы 8 см и 11 см, то окружности находятся одна вне другой.



Примем O_1, O_2— центры окружностей, а R_1, R_2 — их радиусы; O_1O_2 = 20 см, R_1 = 8 см, R_2 = 11 см.

Допустим, что эти окружности имеют общую внутреннюю точку А, следовательно $O_1A \leq R_1$, $O_2A \leq R_2$. Так как для любых трех точек расстояние между любыми двумя из них не больше суммы расстояний от них до третьей точки, то $O_2O_1 \leq O_1A + O_2A$, $O_1O_2 \leq R_1 + R_2$ так как $O_1A \leq R_1$, $O_2A. \leq R_2$ Получим $20 \leq 8 + 11$, $20 \leq 19$, что неверно, а значит, окружности не имеют общих внутренних точек и лежат одна вне другой.

2) Надо доказать, что если $O_1O_2 = 5$ см, а $R_1 = 6$ см, $R_2 = 12$ см, то окружность с центром O_1 и радиусом R_1, находится внутри второй окружности с центром O_2 и радиусом R_2.



Первая окружность находится внутри второй, если все точки первой окружности являются внутренними точками второй окружности.

Предположим, что существует точка B на первой окружности, которая лежит вне второй окружности.

Следовательно $BO_1 = R_1$; $BO_2 > R_2$

$BO_1 = 6$ см; $BO_2 > 12$ см.

По неравенству треугольника для точек B, O_1, O_2 получим:

$BO_2 \leq BO_1 + O_1O_2$;

$BO_2 \leq 6 + 5$;

$BO_2 \leq 11$ см.

Получили противоречие ($BO_2 > 12$; $BO_2 \leq 11$). Значит, все точки первой окружности являются внутренними точками второй окружности, то есть первая окружность лежит внутри второй.

№ 39. Могут ли пересекаться окружности с радиусами R_1 и R_2 и расстоянием между центрами d, если $R_1 + R_2 < d$?

Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей. Если окружности пересекаются в некоторой точке D, то по неравенству треугольника:

$O_1D + O_2D \geq O_1O_2$,, то есть $R_1 + R_2 \geq d$. Но по условию задачи $R_1 + R_2 < d$. Так что окружности пересекаться не могут.

Ответ: не могут.

№ 40*. Даны три положительных числа *a*, *b*, *c*, удовлетворяющие условиям $a \le b \le c < a + b$. Докажите последовательно утверждения:

1) $0 < \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} < a$,

2) существует прямоугольный треугольник BCD, у которого гипотенуза BC = a, а катет BD = $\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}$;

3) треугольник ABC, у которого BC = a, AB = c, а расстояние BD равно $\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}$, имеет сторону AC = b.

1) Докажем, что для трех положительных чисел a, b, c, таких что $0 < a \le b \le c < a +$ b, выполняется неравенство:

$$0 < \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} < a,$$

$$\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} = \frac{(c^2 - b^2) + a^2}{2c} = \frac{(c - b)(c + b) + a^2}{2c}$$

По условию c ≥ b, а значит (c - b) ≥ 0, а так как a, b, c положительные числа, то $\frac{(c - b)(c + b) + a^2}{2c} > 0$, то есть

$$\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} > 0$$

Рассмотрим разность $\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} - a =$

$$= \frac{c^2 + a^2 - b^2 - 2ac}{2c} = \frac{(c^2 + a^2 - 2ac) - b^2}{ac} =$$

$$= \frac{(c - a)^2 - b^2}{2c} = \frac{(c - a - b)(c - a + b)}{2c}$$

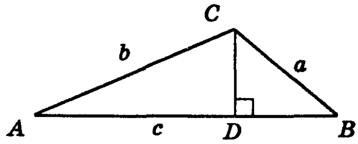
По условию c < a + b, следовательно $c - a - b < 0$, $c \ge$ a, следовательно c – a ≥ 0,а c – a + b > 0, так как *b* – положительное число

так что $\frac{(c - a - b)(c - a + b)}{2c} < 0$.

Чем доказано неравенство $0 < \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} < a$.

2) Докажем, что существует прямоугольный ΔBCD, у которого гипотенуза BC = a, катет

BD = $\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2c}$



Мы доказали, что a, $\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2c}$ положительное число, причем $\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2c}<a$. Можно построить отрезок BC = a и отрезок BD = $\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2c}$, причем BD < BC, так как

BD = $\dfrac{1}{2}(\dfrac{a^2}{c}+c-\dfrac{b^2}{c})$, а отрезки $x=\dfrac{a\cdot a}{c}$; $y=\dfrac{b\cdot b}{c}$ можно построить способом построения четвертого пропорционального отрезка. Следовательно, можно построить прямоугольный ΔBDC (по катету и гипотенузе) с прямым углом D, катетом BD и гипотенузой BC.

3) Докажем, что ΔABC, в котором BC = a, AB = c, а расстояние BD = $\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2c}$, имеет сторону AC = b.

Рассмотрим прямоугольный ΔBDC, в котором BD = $=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2c}$ и BC = a.

По теореме Пифагора отрезок CD = $\sqrt{a^2-\left(\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2c}\right)^2}$ — катет в Δ BDC.

AD=AB-BD= $c-\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2c}$

Δ ACD – тоже прямоугольный, так что

$$AC^2=AD^2+CD^2=\left(c-\frac{c^2+a^2-b^2}{2c}\right)^2+a^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2c}\right)^2=$$
$$=c^2-\left(c^2+a^2-b^2\right)+a^2=b^2.$$

Так что AC=b

Что и требовалось доказать.

№ 41. Даны три положительных числа *a*, *b*, *c*. Докажите, что если каждое из этих чисел меньше суммы двух других, то существует треугольник со сторонами *a*. *b*, *c*.

Пусть числа a, b, *c* расположены в порядке их возрастания, то есть a ≤ b ≤ *c*. Так как каждое из чисел меньше суммы двух других, по условию то c < a + b. Значит a, b, *c* удовлетворяют условиям задачи № 40, и существует треугольник со сторонами a, b, c.

Что и требовалось доказать.

№ 42. Можно ли построить треугольник со сторонами:
1) a = 1 см, b = 2 см, *c* = 3 см;
2) a = 2 см, b = 3 см, *c* = 4 см;
3) a = 3 см, b = 7 см, *c* = 11 см;
4) a = 4 см, b = 5 см, c = 9 см?

Если большая сторона меньше суммы двух других сторон, то треугольник построить можно.

1) a = 1 см; b = 2 см; c = 3 см,

3 < 1 + 2 — неверно, значит треугольник построить нельзя.

2) a = 2 см; b = 3 см; c = 4 см,

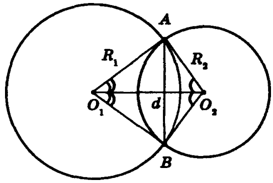
4 < 2 + 3 — верно, значит треугольник можно построить.

3) a = 3 см; b = 7 см; c = 11 см, 11 < 7 + 3 — неверно, значит треугольник построить нельзя.

4) a = 4 см; b = 5 см; c = 9 см, 9 < 5 + 4 — неверно, значит треугольник построить нельзя.

Ответ: 1) нет; 2) да; 3) нет; 4) нет.

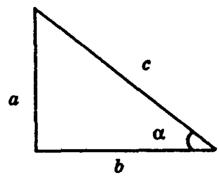
№ 43*. Даны две окружности с радиусами R_1, R_2 и расстоянием между центрами d. Докажите, что если каждое из чисел R_1, R_2 и d меньше суммы двух других сторон, то окружности пересекаются в двух точках.



Так как $d < R_1 + R_2$; $R_1 < d + R_2$; $R_2 < d + R_1$, то можно построить треугольник со сторонами, длина которых R_1, R_2, d. Обозначим этот треугольник O_1O_2A, где $O_1O_2 = d$, $O_1A = R_1$; $O_2A = R_2$. По одну сторону от прямой O_1O_2 расположен $\Delta\ O_1AO_2$. Следовательно, по другую сторону от O_1O_2 можно отложить угол O_1O_2B, равный углу O_1O_2A, и угол O_2O_1B, равный углу O_2O_1A. Получится $\Delta O_1O_2B = \Delta O_1O_2A$ по стороне и двум прилежащим к ней углам. Значит, $O_1B = O_1A = R_1$ и $O_2B = O_2A = R_2$. Значит, точки A и B принадлежат обеим окружностям, а так как две окружности не могут иметь более двух общих точек, то окружности пересекаются в двух и только двух построенных нами точках A и B.

Что и требовалось доказать.

№ 44. У прямоугольного треугольника один катет равен 8 см, а синус противолежащего ему угла равен 0,8. Найдите гипотенузу и второй катет.

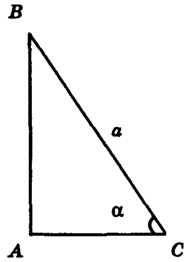


$a = 8$ см, $\sin a = 0{,}8$. $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, тогда $c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{8\text{см}}{0{,}8} = 10$ см;

$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6$ см.

Ответ: 10 см; 6 см.

№ 45. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна a, а один из острых углов α. Найдите второй острый угол и катеты.



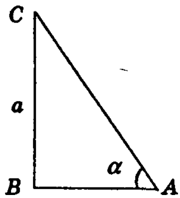
Так как $\angle B+\alpha=90^{o}$, то $\angle B = 90° - \alpha$.

Далее, $\sin\alpha = \dfrac{AB}{BC}$; значит $\cos\alpha = \dfrac{AC}{BC}$, так что

$AC=BC\cos\alpha=a\sin\alpha$

Ответ: $90° – \alpha$; $a\sin\alpha$; $a\cos\alpha$.

№ 46. В прямоугольном треугольнике катет равен *a*, а противолежащий ему угол α. Найдите второй острый угол, противолежащий ему катет и гипотенузу.



$\angle C = 90° - \alpha$, так как $\angle C+\alpha=90^{o}$

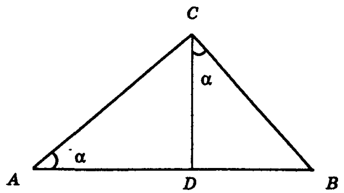
$\sin\alpha = \dfrac{BC}{AC}$, поэтому $AC = \dfrac{BC}{\sin\alpha} = \dfrac{a}{\sin\alpha}$

$\cos\alpha = \dfrac{AB}{AC}$, так что

$$AB = AC\cos\alpha = \frac{a}{\sin}\cdot\cos\alpha = \frac{a\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{a}{tg\alpha}.$$

Ответ: $90° - \alpha$; $\dfrac{a}{tg\alpha}$; $\dfrac{a}{\sin\alpha}$

№ 47. В прямоугольном треугольнике даны гипотенуза с и острый угол α. Найдите катеты, их проекции на гипотенузу и высоту, опущенную на гипотенузу.



$\cos\alpha = \dfrac{AC}{AB}$, AC = AB cosα = c cosα.

$\sin\alpha = \dfrac{BC}{AB}$, BC = AB sinα = c · sinα. Далее, ∠DCB=90°–

– ∠B=∠α=∠A.

Так что BD = BC sinα = $c\sin\alpha\cdot\sin\alpha = c\sin^2\alpha$.

AD = AC cosα = $c\cos\alpha\cdot\cos\alpha = c\cos^2\alpha$.

CD = AC sinα= c sinα cosα.

№ 48. 1) Найдите sin22°; sin22°36’; sin22°38’; sin 22°41’; cos68°; cos68°18'; cos68°23’.
2) Найдите угол x, если sinx = 0,2850; sinx = 0,2844; cosx = 0,2710.

1) sin 22° ≈ 0.3746; cos 68° ≈ 0,3746;
sin 22°36' ≈ 0,3843; cos 68°18' ≈ 0,3697;
sin 22°38' ≈ 0,3848; cos 68°23' ≈ 0,3684.
sin 22°41’ ≈ 0,3856;

2) sinx = 0,2850 при x = 16°34';	sinx = 0,2844 при x = 16°31’;	cosx = 0,2710 при x = 74°17'.

№ 49. Найдите значения синуса и косинуса углов: 1) 16°; 2) 24°36’; 3) 70°32'; 4) 88°49'.

1) sin 16° = 0,2756;
cos 16° = 0.9613.
2) sin 24°36’ = 0,4163;
cos 24°36' = 0,9092.
3) sin 70°32' = 0,9428;
cos 70°32' = 0,3333.
4) sin 88°49’ = 0,9998;
cos 88°49' = 0,0206.

№ 50. Найдите величину острого угла x, если: 1) sinx = 0,0175; 2) sinx = 0,5015;3) cosx = 0,6814; 4) cosx = 0,0670.

1) sin x = 0,0175 при x = 1°.

2) sin x = 0,5015 при x = 30°6·.

3) cos x = 0,6814 при x = 47°3’.

4) cos x = 0,0670 при *x* = 86°9'.

№ 51. Найдите значение тангенса угла: 1) 10°; 2) 40°40’; 3) 50°30'; 4) 70°15'.

1) *tg* 10° = 0.1763; 2) tg 40°40' = 0,8591;

3) tg 50°30' = 1,213; 4) tg 70°15' = 2.785.

№ 52. Найдите острый угол *x*, если: 1) tgx = 0,3227; 2) tgx = 0,7846; 3) tgx = 6.152; 4) tgx = 9,254.

1) tg x = 0.3227; 2) tg x = 0,7846;
x = 17°53’. x = 38°7’·.
3) tg x = 6,152; 4) tg x = 9,254;
x = 80°46'. x = 83°50'.

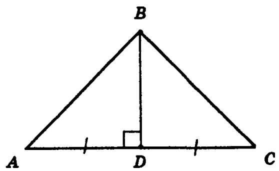
№ 53. Высота равнобедренного треугольника равна 12,4 м, а основание 40,6 м. Найдите углы треугольника и боковую сторону.

AB = BC (так как треугольник равнобедренный).

BD является высотой, а значит, и медианой, так что

AD = $\frac{1}{2}$ 40,6 м = 20.3 м.

AB=$\sqrt{AD^2+BD^2} = \sqrt{20{,}3^2+12{,}4^2} \approx$ 23,78 м (по теореме Пифагора.



$tg\angle A = \frac{BD}{AD} = \frac{12{,}4}{20.3} \approx 0{,}6108$, значит $\angle A$ = 31°25’.

$\angle A$ = ∠C = 31°25' (углы при основании равнобедренного треугольника). ∠B = 180° – 2 · 31°25'= 117°10’.
Ответ: 23,78 м; 31°25'; 31°25'; 117°10’.

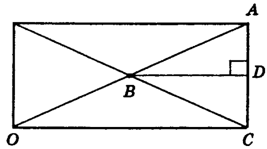
№ 54. Отношение катетов прямоугольного треугольника равно 19: 28. Найдите его углы.

$\operatorname{tg} \angle A = \frac{19}{28} \approx 0{,}6786$, так что $\angle A = 34°10'$. Далее,

$\angle B = 90° - \angle A = 90° - 34°10' = 55°50'$.

Ответ: 90°; 34°10'; 55°50'.

№ 55. Стороны прямоугольника равны 12,4 и 26. Найдите угол между диагоналями.



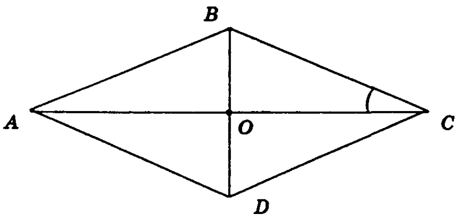
$AD = \frac{1}{2} AC = \frac{12{,}4}{2} = 6{,}2$; $BD = \frac{1}{2}\ OC = \frac{26}{2} = 13$;

$\operatorname{tg} \angle ABD = \frac{AD}{BD} = \frac{6{,}2}{13} \approx 0{,}4769$;

Так что $\angle ABD = 25°30'$; $\angle ABC = 2\angle ABD = 51°$.

Ответ: 51°.

№ 56. Диагонали ромба равны 4,73 и 2,94. Найдите его углы.



$BO = OD = \frac{1}{2} BD = \frac{2{,}94}{2} = 1{,}47$;

$AO = OC = \frac{1}{2} AC = \frac{4{,}73}{2} = 2{,}365$;

$\operatorname{tg} \angle BCO = \frac{BO}{OC}\ 1{,}47 : 2{,}365 \approx 0{,}6216$, так что $\angle BCO = 31°52'$;

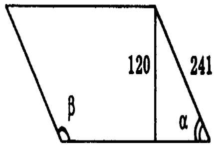
$\angle BCD = 2\ \angle BCO = 31°52' \cdot 2 = 63°44'$;

$\angle A = \angle C = 63°44'$;

$\angle B = \angle D = 180° - \angle A = 180° - 63°44' = 116°6'$.

Ответ: 63°44'; 116°16'.

№ 57. Сторона ромба 241 м, высота 120 м. Найдите углы.

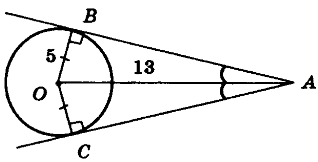


$\sin\alpha = \frac{120}{241} \approx 0{,}4979$, значит $\alpha = 29°52'$;

$\beta = 180^{\circ} - \alpha = 180° - 29°52' = 150°8'$.

Ответ: 29°52' и 150°8'.

№ 58. Радиус окружности равен 5 м. Из точки, отстоящей от центра на 13 м, проведены касательные к окружности. Найдите длины касательных и угол между ними.



ΔABO — прямоугольный, так что

$AB = \sqrt{AO^2 - OB^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169-25} = \sqrt{144} = 12$ м.

$\angle A = 2\ \angle BAO$.

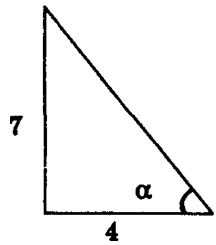
$\sin \angle BAO = \frac{BO}{AO}\frac{5}{13} \approx 0{,}3846$, так что

$\angle BAO = 22°37$, а значит

$\angle A = 2 \cdot 22°37' = 45°14'$.

Ответ: 12 м; 45°14'.

№ 59. Тень от вертикально стоящего шеста, высота которого 7 м, составляет 4 м. Выразите в градусах высоту солнца над горизонтом.

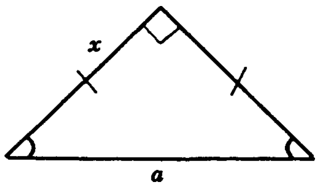


$\text{tg}\ \alpha = \frac{7}{4} \approx 1{,}75$, так что

$\alpha = 60°16'$.

Ответ: 60°16'.

№ 60. Основание равнобедренного прямоугольного треугольника равно a. Найдите боковую сторону.



Углы при основании равнобедренного прямоугольного треугольника равны 45°. Пусть боковая сторона равна x, тогда:

$\sin 45° = \frac{x}{a}$; $x = a \sin 45° = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

№ 61. Найдите неизвестные стороны и острые углы прямоугольного треугольника по следующим данным:

1) по двум катетам:

а) a = 3, b = 4;

б) a = 9, b = 40;

в) a = 20, b = 21;

г) a = 11, b = 60;

2) по гипотенузе и катету:

а) c = 13, a =·5;

б) c = 25, a = 7;

в) a = 17, a = 8;

г) c = 85, a = 84;

3) по гипотенузе и острому углу:
а) с =·2, α = 20°;
б) c = 4, α = 50°20';
в) с = 8, α = 70°36’;
г) с = 16, α = 76°21’;
4) по катету и противолежащему углу:
а) а = 3, α = 30°27’;
б) a = 5, α = 40°48’;
в) а = 7, α = 60°85';
г) а = 9, α = 68°'.

1) По двум катетам:
а) a = 3; b = 4;

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{a}{b} = \frac{3}{4} = 0{,}75, \ \alpha = 36°52' \ \ \beta = 53°8'$$

2) По гипотенузе и катету:
а) с = 13; а = 5.

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12.$$

$$\sin \alpha = \frac{5}{13} \approx 0{,}3836, \ \alpha = 22°37' \ \ \beta = 69°23'.$$

3) По гипотенузе и острому углу:
а) c = 2; α = 20°.

$$\sin 20° = \frac{a}{c}; \ a = c \sin 20° = 2 \cdot 0{,}3420 = = 0{,}684 \approx 0{,}68.$$

$$\cos 20° = \frac{b}{c}; \ b = c \cos 20° = 2 \cdot 0{,}9397 = 1{,}879 \approx 1{,}88.$$

β = 90° – 20° = 70°.

4) По катету и противолежащему углу:
а) a = 3; α = 30°27'; β = 90° - 30°27' = 59°33''.

$$\sin\alpha = \sin 30°27' = \frac{a}{c};$$

$$c = \frac{a}{\sin 30°27'} = \frac{3}{0{,}5068} \approx 5{,}92.$$

$$\text{tg } 30°27' = \frac{a}{b};$$

$$b = \frac{a}{tg 30°27'} = \frac{3}{0{,}5879} \approx 5{,}1.$$

Задания б), в), г) выполняются аналогично.

№ 62. Упростите выражения:

1) $1 - \sin^2\alpha$;
2) $(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha)$;
3) $1 + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$;
4) $\sin\alpha - \sin\alpha\cos^2\alpha$;
5) $\sin^4 a + \cos^2 a + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;
6) $tg^2\alpha - \sin^2\alpha\, tg^2\alpha$;
7) $\cos^2\alpha + tg^2\alpha\cos^2\alpha$;
8) $tg^2\alpha(2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 1)$;
9) $\dfrac{1 - tg^2\alpha + tg^4\alpha}{\cos^2\alpha}$.

1) $1 - \sin^2\alpha = (\sin^2 a + \cos^2\alpha) - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$.

2) $(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha) = 1 - \cos^2\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$.

3) $1 + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 + 1 = 2$.

4) $\sin\alpha - \sin\alpha\cos^2\alpha = \sin\alpha(1 - \cos^2\alpha) = \sin\alpha\cdot\sin^2\alpha = \sin^3 a$.

5) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 = 1^2 = 1$.

6) $tg^2\alpha - \sin^2\alpha\, tg^2\alpha = tg^2\alpha(1 - \sin^2\alpha) = tg^2\alpha\cdot\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$.

7) $\cos^2\alpha + tg^2\alpha\cos^2\alpha = \cos^2\alpha(1 + tg^2\alpha) = \cos^2\alpha\cdot\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1$

8) $tg^2\alpha(2\cos^2 a + \sin^2\alpha - 1) = tg^2\alpha(\cos^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 1) =$

$= tg^2\alpha\cdot\cos^2\alpha = \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$.

9) $\dfrac{1 - tg^2\alpha + tg^4\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}(1 - tg^2\alpha + tg^4\alpha) = (1 + tg^2\alpha)(1 - tg^2\alpha + tg^4\alpha) = = 1 + tg^6\alpha$.

(Пользуемся формулой $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$.)

№ 63. Вычислите значения $\sin\alpha$ и $tg\alpha$, если:

1) $\cos\alpha = \dfrac{5}{13}$; 2) $\cos\alpha = \dfrac{15}{17}$; 3) $\cos\alpha = 0{,}6$.

Задача решена в учебнике на стр. 91 п. 68.

№ 64. Найдите cosα и tgα, если. 1) sinα = $\frac{3}{5}$; 2) sinα = $\frac{40}{41}$; 3) sinα = 0,8.

1) sinα = $\frac{3}{5}$

$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1.$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$$

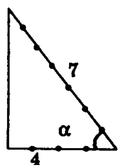
$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{3\cdot 5}{5\cdot 4} = \frac{3}{4}.$$

Задания 2) и 3) решаются аналогично заданию 1).

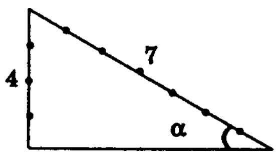
№ 65. Постройте угол α, если известно, что: 1) cosα = $\frac{4}{7}$; 2) sinα = $\frac{4}{7}$; 3) sinα = 0,5; 4) tgα = $\frac{3}{5}$; 5) tgα = 0,7.

Задача решается путем построения прямоугольного треугольника по катету и гипотенузе.

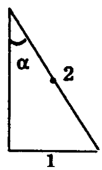
1) cosα = $\frac{4}{7}$;



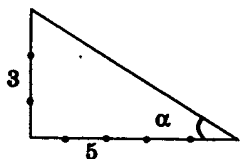
2) sinα = $\frac{4}{7}$;



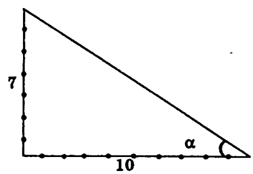
3) sinα = 0,5;



4) tgα = $\frac{3}{5}$;



5) tgα = 0,7



№ 66. В прямоугольном треугольнике с гипотенузой *a* и углом 60° найдите катет, противолежащий этому углу.

$$\sin 60^o = \frac{b}{a}, \text{ так что } b = a\sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

№ 67. Найдите радиус r окружности, вписанной в равносторонний треугольник со стороной a, и радиус R окружности, описанной около него.

У равностороннего треугольника центр вписанной окружности совпадает с центром описанной, так как биссектрисы лежат на серединных перпендикулярах к сторонам треугольника.

Так что радиус вписанной окружности $r = \frac{a}{2}$. tg30° = $\frac{a}{2\sqrt{3}}$.

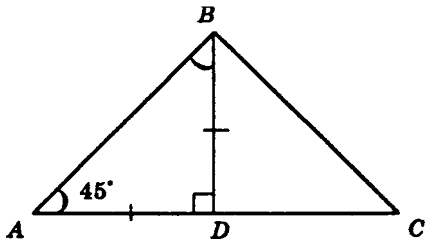
$\cos 30^o = \frac{a}{2R}$, поэтому

Радиус описанной окружности

$$R = \frac{a}{2} : \cos 30° = \frac{a}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\frac{a}{2\sqrt{3}}$; $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

№ 68. В треугольнике один из углов при основании равен 45°, а высота делит основание на части 20 см в 21 см. Найдите большую боковую сторону[1].



Рассмотрим ΔABD.

$\angle$A = 45° (по условию).

$\angle$D = 90° (так как BD $\perp$ AC), значит $\angle$ABD = 45° и

[1] Иногда в произвольном треугольнике, необязательно равнобедренном, сторона, проведенная горизонтально, называется основанием, а две другие — боковыми сторонами, как в данной задаче.

ΔABD — равнобедренный, поэтому AD = BD = 20, а DC = 21.

Далее

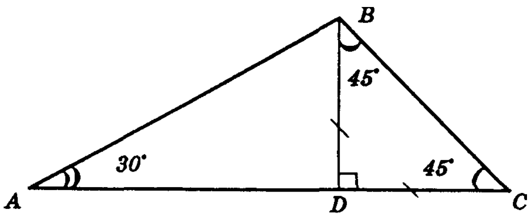
AB = $\sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{20^2 + 20^2} = \sqrt{400 + 400} = \sqrt{2 \cdot 400} = 20\sqrt{2}$,

BC = $\sqrt{DC^2 + BD^2} = \sqrt{20^2 + 21^2} = \sqrt{400 + 441} = 29$.

Большая боковая сторона 29 см. Если AD = 21, а DC = 20, то AB = $21\sqrt{2}$, BC = 29, значит большая боковая сторона равна $21\sqrt{2}$ см $\approx$ 29,7 см.

Ответ: 29 см или $21\sqrt{2}$ см $\approx$ 29,7 см.

№ 69. У треугольника одна из сторон равна 1 м, а прилежащие к ней углы равны 30° и 45°. Найдите другие стороны треугольника.



Проведем BD⊥AC

ΔBDC — равнобедренный, (так как $\angle C = \angle DBC = 45^o$) BD = DC. Пусть BD = x м.

AC = 1 м; AD = 1 – x.

$$tg30° = \frac{BD}{AD} = \frac{x}{1-x},$$

$$x\left(1 + tg30^o\right) = tg30^o, x = \frac{tg30^o}{1 + tg30^o} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{1+\sqrt{3}}.$$

Так что $BD = \frac{1}{1+\sqrt{3}} = CD$.

$$\sin 45^\circ = \frac{BD}{BC}$$

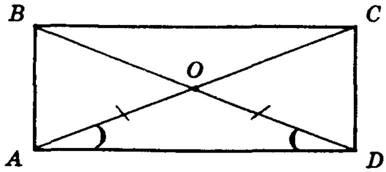
$$BC = \frac{BD}{\sin 45^\circ} = \frac{1}{1+\sqrt{3}} \div \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} \approx 0{,}517 \text{ м.}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{BD}{AB},$$

$$AB = \frac{BD}{\sin 30^\circ} = \frac{1}{1+\sqrt{3}} \div \frac{1}{2} = \frac{2}{1+\sqrt{3}} \approx 0{,}732 \text{ м.}$$

Ответ: $\approx 0{,}517$ м; $\approx 0{,}732$ м.

№ 70. Диагональ прямоугольника в два раза больше одной из его сторон. Найдите углы между диагоналями.



Диагонали прямоугольника равны и точкой пересечения делятся пополам. Пусть CD x, тогда AC = 2x, $\angle CAD = 30^\circ$ (в прямоугольном треугольнике катет, противолежащий углу 30°, равен половине гипотенузы).

ΔAOD — равнобедренный, значит и $\angle ODA = 30^\circ$. Тогда

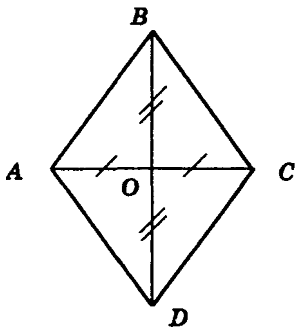
$\angle AOD = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ$.

$\angle AOD$ и $\angle DOC$ — смежные, поэтому

$\angle COD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Ответ: 60° и 120°.

№ 71. Диагонали ромба равны a и $a\sqrt{3}$. Найдите углы ромба.



Диагонали ромба перпендикулярны друг другу, точкой пересечения делятся пополам и являются биссектрисами углов этого ромба. Используя эти свойства получим:

AO = $\frac{a}{2}$; BO = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

tg∠BAO = $\frac{BO}{AO} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \div \frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{a} = \sqrt{3}$, значит

∠BAO = 60°.

∠A = 2∠BAO = 2 · 60° = 120°;

∠*A* = ∠ C = 120°.

∠A и ∠B — углы ромба, прилежащие к одной стороне, значит

∠ A+∠ B=180°, то есть

∠ B = 180° – ∠A = 180° – 120° = 60°.

∠D = ∠ B = 60°.

∠ C = ∠ A = 120.

Ответ: 60°, 60°, 120°, 120°.

№ 72. Какой из углов больше — α или β, если: 1)sinα = $\frac{1}{3}$; sinβ = $\frac{1}{4}$; 2) sinα = $\frac{2}{3}$; sinβ = $\frac{3}{4}$; 3) cosα = $\frac{3}{7}$; cosβ = $\frac{2}{5}$; 4) cosα = 0,75, cosβ = 0,74; 5) tgα = 2,1, tgβ = 2,5; 6)tgα = $\frac{8}{3}$, tgβ = $\frac{5}{2}$?

При решении задачи используем теорему 7.5.

1) sina = $\frac{1}{3}$; sinβ = $\frac{1}{4}$; sinα > sinβ. Тогда, α > β.

2) sinα = $\frac{2}{3}$; sinβ = $\frac{3}{4}$;

sinα < sinβ, тогда, α < β.

3) cosα = $\frac{3}{7}$; cosβ = $\frac{2}{5}$;

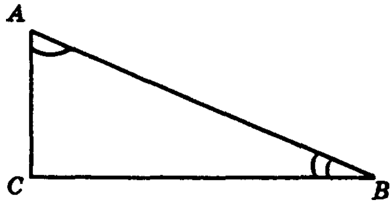
cosα > cosβ, тогда, α < β.

4) cosα = 0,75; cosβ = 0,74; cosα > cosβ. Тогда, α < β.

5) tgα = 2,1; tgβ = 2,5; tgα < tgβ. Тогда, α < β.

б) $tg\alpha = \frac{8}{3}$, $tg\beta = \frac{5}{2}$; $tg\alpha > tg\beta$. Тогда, $\alpha > \beta$.

№ 73. У прямоугольного треугольника ABC угол A больше угла B. Какой из катетов больше — AC или BC?



$\angle A > \angle B$, тогда, согласно теореме 7.5 $\sin\angle A > \sin\angle B$.

Но $BC = AB \sin\angle A$, а

$AC = AB \sin\angle B$. Так что

$BC > AC$, так как $AB = AB$, $\sin\angle A > \sin\angle B$.

Ответ: BC.

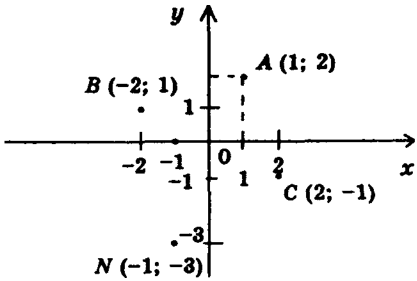
№ 74. У прямоугольного треугольника ABC катет BC больше катета AC. Какой угол больше — A или B?

Угол A больше. Решение задачи решается аналогично решению № 73.

Ответ: $\angle A$.

§ 8. Декартовы координаты на плоскости

№ 1. Проведите оси координат, выберите единицу длины на осях, постройте точки с координатами: (1; 2), (-2; 1), (-1; -3), (2; -1).



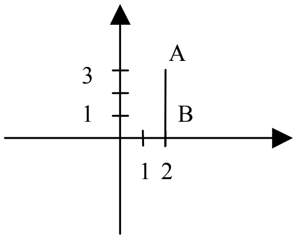
№ 3. На прямой, параллельной оси *x*, взяты две точки. У одной из них ордината у = 2. Чему равна ордината другой точки?

У всех точек на прямой, параллельной оси х, ординаты точек равны, значит ордината другой точки тоже равна 2.
Ответ: 2.

№ 4. На прямой, перпендикулярной оси х, взяты две точки. У одной из них абсцисса х = 3. Чему равна абсцисса другой точки?

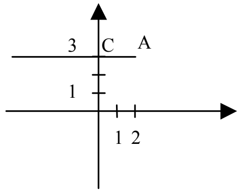
Прямая, перпендикулярна оси х, а значит параллельна оси *у*, поэтому абсцисса другой точки тоже равна 3.
Ответ: 3.

№ 5. Из точки А (2; 3) опущен перпендикуляр на ось х. Найдите координаты основания перпендикуляра.



Ответ: (2; 0).

№ 6. Через точку А (2; 3) проведена прямая, параллельная оси *x*. Найдите координаты точки пересечения ее с осью *у*.



Ответ: (0; 3).

№ 7. Найдите геометрическое место точек плоскости *xy*, для которых абсцисса x = 3.

Геометрическим местом точек плоскости *xy*, для которых абсцисса x = 3, является прямая, перпендикулярная оси *x*, параллельная оси *y* и проходящая через точку (3;0), то есть отстоющая от оси *y* на 3 ед. вправо.

№ 8. Найдите геометрическое место точек плоскости *xy*, для которых |x| = 3.

Геометрическое место точек, для которых |x| = 3, состоит из двух прямых, параллельных оси *y*, *отстоящих от* нее на 3 ед.

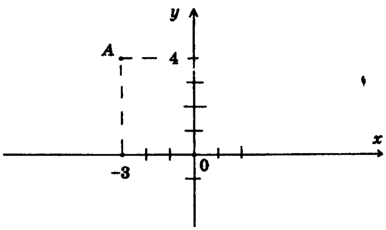
№ 9. Даны точки A (-3; 2) и B (4; 1). Докажите, что отрезок AB пересекает ось *y*, во не пересекает ось *x*.

Задача решена в учебнике на стр. 101 п. 71.

№ 10. Какую из полуосей оси *y* (положительную или отрицательную) пересекает отрезок AB в предыдущей задаче?

У точек A и B ординаты положительные, значит обе точки A и B лежат в верхней полуплоскости. А значит отрезок AB пересекает положительную полуось оси *y*.

№ 11. Найдите расстояние от точки (-3; 4) до: 1) оси *x*; 2) оси *y*.



Расстояние от точки (-3;4) до оси *x* равно 4, а до оси *y* 3.
Ответ: 4; 3.

№ 12. Найдите координаты середины отрезка АВ, если: 1) А (1; -2), В (5; 6); 2) А (-3; 4), В (1; 2); 3) А (5; 7), В (-3; -5).

1)А (1; -2); В (5; 6). Пусть О — середина отрезка АВ. Тогда О имеет координаты:

$x_o = \frac{1+5}{2} = 3$, $y_o = \frac{-2+6}{2} = 2$. О (3; 2).

2) А (-3; 4); В (1; 2);

$x_o = \frac{-3+1}{2} = -1$; $y_o = \frac{4+2}{2} = 3$. О (-1; 3).

3) А (5; 7); В (-3; -5);

$x_o = \frac{5-3}{2} = 1$; $y_o = \frac{7-5}{2} = 1$ О (1; 1).

Ответ: 1) (3; 2); 2) (-1; 3); 3) (1; I).

№ 13. Точка С — середина отрезка *АВ*. Найдите координаты второго конца отрезка АВ, если: 1) А (0; 1), С (-1; 2); 2) А (-1; 3), С (1; -1); 3) А (0; 0), С (-2; 2).

1)А(0; 1); С(-1; 2). Пусть В($x; y$) – второй конец, тогда

$\frac{0+x}{2} = -1$; $\frac{1+y}{2} = 2$, откуда

$x = -2$; $y = 3$ значит $B(-2; 3)$

А (-1; 3); С (1; -1); В (x; y) – второй конец отрезка.

$\frac{-1+x}{2} = 1$; $\frac{3+y}{2} = 1$; откуда

$x = 3$; $y = -5$,$B(3; -5)$, значит,

А (0; 0); С (-2; 2); В (x; y) – второй конец отрезка.

$\frac{0+x}{2} = -2$; $\frac{0+y}{2} = 2$, откуда

$x = -4$; $y = 4$, значит, $B(-4; 4)$.

Ответ: 1) (-2; 3); 2) (3; -5); 3) (-4; 4).

№ 14. Докажите, что четырехугольник ABCD с вершинами в точках А (-1; -2), В (2; -5), С (1; -2), D (-2; 1) является параллелограммом. Найдите точку пересечения его диагоналей.

По свойству диагоналей четырехугольника ABCD — параллелограмм, если координаты середин отрезков АС и BD, совпадают. Обозначим середину АС — O_1, а BD — O_2.

A(-1;-2); C(1;-2); O$_1$(x_1;y_1)

$x_1 = \dfrac{-1+1}{2} = 0$; $y_1 = \dfrac{-2-2}{2} = -2$; O$_1$ (0; -2)

B (2, -5); D (-2. 1); O$_2$ *(x_2; y_2).*

$x_1 = \dfrac{2-2}{2} = 0$; $y_2 = \dfrac{-5+1}{2} = -2$ O$_2$ (0; -2)

Координаты середин совпали, значит, четырехугольник ABCD — параллелограмм. Точка пересечения диагоналей (0; -2).
Ответ: (0; -2).

№ 15. Даны три вершины параллелограмма ABCD: A (1; 0), B (2; 3), C (3; 2). Найдите координаты четвертой вершины D и точки пересечения диагоналей.

Задача решена на стр. 102 п. 72.

№ 16. Найдите середины сторон треугольника с вершинами в точках O (0; 0), A (0; 2), B (-4; 0).

Пусть (x_1; y_1) — середина *OA*; (x_2; y_2) — середина *AB*; (x_3; y_3) — середина *OB*.

$x_1 = \dfrac{0+0}{2} = 0, y_1 = \dfrac{0+2}{2} = 1;$ (0; 1);

$x_2 = \dfrac{0-4}{2} = -2, y_2 = \dfrac{2+0}{2} = 1$ (-2; 1);

$x_3 = \dfrac{0-4}{2} = -2, y_3 = \dfrac{0+0}{2} = 0;$ (-2; 0)

Ответ: (0; 1); (-2; 1); (-2; 0).

№ 17. Даны три точки A (4; -2), B (1; 2), C (-2; 6). Найдите расстояния между этими точками, взятыми попарно.

Расстояние между точками A(x_1;y_1) и B(x_2;y_2) вычисляется по формуле:

$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$; в нашем случае

$AB = \sqrt{(4-1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$AC = \sqrt{(4+2)^2 + (-2-6)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10;$

$BC = \sqrt{(1+2)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

Ответ: AB = 5; AC = 10; BC = 5.

№ 18. Докажите, что точки A, B, C в задаче 17 лежат на одной прямой. Какая из них лежит между двумя другими?

AC = AB + BC,

10 = 5 + 5.

Так как сумма расстояний от точки B до точек A и C равна расстоянию между этими точками, то точки A, B, и C лежат на одной прямой. Причем B лежит между A и C.

Ответ: *B*.

№ 19. Найдите на оси *x* точку, равноудаленную от точек (1; 2) и (2; 3).

Задача решена в учебнике на стр. 103 п. 73.

№ 20. Найдите точку, равноудаленную от осей координат и от точки (3; 6).

Поскольку точка равноудалена от осей координат, то она лежит на биссектрисе 1-го и 3-го координатных углов. Тогда ее координаты A (x; x). То есть она удалена от координатных осей на одинаковок расстояние.

Значит, AD = AC = x. D (0; x), C (x; 0).

Далее,

AO=$\sqrt{(3-x)^2-(6-x)^2}=\sqrt{9-6x+x^2+36-12x+x^2}=$

$=\sqrt{2x^2-18x+45}$. Поскольку AO=AC=AD, то

$\sqrt{x^2}=\sqrt{2x^2-18x+45}$;

$x^2 = 2x^2 - 18x + 45$;

$2x^2 - x^2 - 18x + 45 = 0$;

$x^2 - 18x + 45 = 0$.

$x_1 = 15$; $x_2 = 3$.

Ответ: (3; 3) или (15; 15).

№ 21*. Докажите, что четырехугольник ABCD с вершинами в точках A (4; 1), B (0; 4), C (-3; 0), D (1; -3) является квадратом.

Докажем, что ABCD — квадрат.

Вычислим длины сторон четырехугольника ABCD.

AB = $\sqrt{(4-0)^2+(1-4)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$,

$$BC = \sqrt{(-3-0)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5,$$

$$CD = \sqrt{(1+3)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5,$$

$$AD = \sqrt{(1-4)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

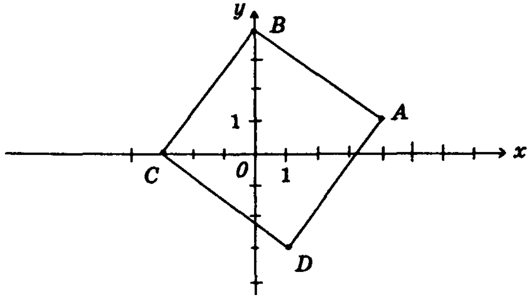
AB = BC = CD = AD = 5, значит, ABCD — ромб.

Вычислим диагонали ромба AC и BD.

$$AC = \sqrt{(-3-4)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$BD = \sqrt{(1-0)^2 + (-3-4)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

AC = BD.



Если диагонали параллелограмма (ромба) равны, то этот параллелограмм является прямоугольником. В свою очередь ромб, являющийся прямоугольником, — это квадрат, значит, *ABCD* — квадрат.

Что и требовалось доказать.

№ 22. Докажите, что четыре точки (1; 0), (-1; 0), (0; 1), (0; -1) являются вершинами квадрата.

Пусть A (-1; 0), B (0; 1), C (1; 0), D (0; -1) — вершины четырехугольника.

1) $AC = \sqrt{(-1-1)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{4} = 2$

$BD = \sqrt{(0-0)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{4} = 2$, так что AC = BD

2) $AB = \sqrt{(-1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$,

$BC = \sqrt{(0-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$

CD = $\sqrt{(1-0)^2+(0+1)^2} = \sqrt{2}$,

DA = $\sqrt{(0+1)^2+(-1=0)^2} = \sqrt{2}$, так что AB=BC=CD=DA

Стороны и диагонали ABCD равны, значит, ABCD — квадрат.

Что и требовалось доказать.

№ 23. Какие из точек (1; 2), (3; 4), (-4; 3), (0; 5), (6; -1) лежат на окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 25$?

Подставим координаты всех точек в уравнение окружности:
1) (1; 2). $1^2 + 2^2 = 25$ - неверно.
2) (3; 4), $3^2 + 4^2 = 25$ - верно.
3) (0; 5), $0^2 + 5^2 = 25$ - верно.
4) (5; -1). $5^2 + (-1)^2 = 25$ - неверно.
5) (-4; 3). $(-4)^2 + 3^2 = 25$ - верно.

Значит точки (3; 4), (0; 5), (-4; 3) лежат на данной окружности.

№ 24. Найдите на окружности, заданной уравнением

$x^2 + y^2 = 169$, точки:

1) с абсциссой 5;

2) с ординатой -12.

Пусть точка (5; y) лежит на окружности, тогда $5^2 + y^2 = 169$ и
$y = \pm\sqrt{169-25} = \pm\sqrt{144} = \pm 12$. Получим две точки
(5; 12) и (5;-12).
2) Пусть точка (x; -12) лежит на окружности, тогда
$x^2 + (-12)^2 = 169$ и $x = \pm\sqrt{169-144} = \pm\sqrt{25} = \pm 5$,
получим две точки (5;-12) и (-5;-12)
Ответ: 1) (5; 12); (5;-12); 2) (5; -12); (-5; -12).

№ 25. Даны точки A (2; 0) и B (-2; 6). Составьте уравнение окружности, диаметром которой является отрезок AB.

Найдем координаты центра окружности и радиус AB — диаметр. O — центр окружности. A (2; 0); B (-2; 6).

$x = \frac{2-2}{2} = 0$; $y = \frac{0+6}{2} = 3$, O(0; 3)

$R = AO = \sqrt{(2-0)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$, R = $\sqrt{13}$.

Значит, уравнение окружности примет вид

$(x - 0)^2 + (y - 3)^2 = (\sqrt{13})^2$, то есть $x^2 + (y-3)^2 = 13$.

Ответ: $x^2 + (y - 3)^2 = 13$.

№ 26. Даны точки А (-1; -1) и С (-4; 3). Составьте уравнение окружности с центром в точке С, проходящей через точку А.

Найдем радиус окружности R=AC

$R^2 = (-1 + 4)^2 + (-1 - 3)^2 = 25$, то есть R=5.

К тому же С (-4; 3) — центр окружности, значит, ее уравнение:

$(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$.

Ответ: $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$.

№ 27. Найдите центр окружности на оси x, если известно, что окружность проходит через точку (1; 4) и радиус окружности равен 5.

R = 5, O (a; 0) — центр окружности, A (1; 4) лежит на окружности.

$(1-a)^2 + (4-0)^2 = 5^2$ – уравнение окружности. Подставим в него координаты точки А, получим

$1-2a + a^2 + 16 - 25 = 0$.

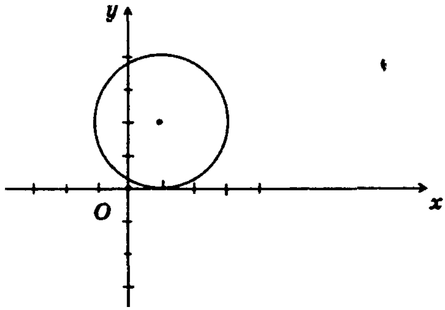
$a^2 - 2a - 8 = 0$.

$a_1 = -2$; $a_2 = 4$, значит,

О (-2; 0) или О (4; 0).

Ответ: (-2; 0) или (4; 0).

№ 28*. Составьте уравнение окружности с центром в точке (1;2), касающейся оси *x*.



Заменим уравнение окружности с центром (1; 2), $(x - I)^2 + (y - 2)^2 = R^2$, где R — радиус окружности. Уравнение оси x: $y = 0$. Окружность и ось x касаются, значит, система уравнений $\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=R^2\\ y=0\end{cases}$ имеет единственное решение.

Решим систему.

1) $y = 0$.

$(x - 1)^2 + (0 - 2)^2 = R^2$,

$x^2 - 2x + 1 + 4 - R^2 = 0$,

$x^2 - 2x + (5 - R^2) = 0$.

Система будет иметь единственное решение (a; 0), если данное уравнение будет иметь один корень x = a, то есть если D = 0 или $\frac{D}{4}=0$.

Это значит:

$\frac{D}{4} = 1 - (5 - R^2) = R^2 - 4 = 0$, то есть R=2, так как R>0. А значит

$(x-1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ — уравнение искомой окружности.

Ответ: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

№ 29. Составьте уравнение окружности с центром (-3; 4), проходящей через начало координат.

O (-3; 4) — центр окружности, A (0; 0) лежит на окружности, поэтому $R^2 = (0 + 3)^2 + (0-4)^2 = 9 + 16 = 25$ и

$(x + 3)^2 + (y-4)^2 = 25$ – уравнение искомой окружности.

Ответ: $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$.

№ 30*. Какая геометрическая фигура задана уравнением $x^2 + y^2 +$ $+ ax + by + c = 0$, $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c > 0$?

Преобразуем уравнение $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$,

$x^2 + 2x \cdot \frac{a}{2} + y^2 + 2y \cdot \frac{b}{2} = -c$.

Прибавим к обеим частям $\left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}\right)$:

$$x^2 + 2x \cdot \frac{a}{2} + \frac{a^2}{4} + y^2 + 2y \cdot \frac{b}{2} + \frac{b^2}{4} = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$$

Так как $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c > 0$, то это уравнение окружности с центром в точке $O\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$ и радиусом $R = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}$. Значит, данное уравнение задает окружность.

Ответ: окружность.

№ 31. Найдите координаты точек пересечения двух окружностей: $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^{2\,-}\,2x + y - 2 = 0$.

Координаты точек пересечения двух окружностей $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^{2\,-}\,2x + y - 2 = 0$ являются решением системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ \underbrace{x^2 + y^2}_{1} - 2x + y - 2 = 0 \cdot \end{cases}$$

$1 - 2x + y - 2 = 0$,

$-2x + y - 1 = 0$,

$y = 1 + 2x$, подставляем в первое уравнение

$x^2 + (1 + 2x)^2 = 1$,

$x^2 + 1 + 4x + 4x^2 - 1 = 0$,

$5x^2 + 4x = 0$,

$x(5x + 4) = 0$, $x_1=0$, $x_2 = -\frac{4}{5}$. Получим

$\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 1. \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -\dfrac{4}{5}, \\ y_2 = -\dfrac{3}{5}. \end{cases}$ - решения системы.

Точки пересечения (0; 1) и $\left(-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right)$.

Ответ: (0; 1); $\left(-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right)$.

№ 32. Найдите координаты точек пересечения окружности $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 7 = 0$ с осью x.

Точка пересечения окружности $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 7 = 0$ с осью x имеет координаты (x; 0). Данная точка также удовлетворяет уравнению $x^2 - 8x + 7 = 0$.

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64-28}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2};\ x_1 = 7;\ x_2 = 1.$$

Значит, точки пересечения (7; 0) и (1; 0).

Ответ: (7; 0) и (1; 0).

№ 33. Докажите, что окружность $x^2 + y^2 + 2ax + 1 = 0$, $|a| > 1$ не пересекается с осью y.

Преобразуем уравнение $x^2 + y^2 + 2ax + 1 = 0$ к виду:

$x^2 + y^2 + 2ax + 1 + a^2 - a^2 = 0$

$x^2 + 2ax + a^2 + y^2 + 1 - a^2 = 0.$

$(x + a)^2 + y^2 + 1 - a^2 = 0.$

Никакая точка (0; y) не удовлетворяет такому уравнению, так как $(0 + a)^2 + y^2 + 1 - a^2 = y^2 + 1 \neq 0$. Значит, окружность не пересекается с осью y.

Что и требовалось доказать.

№ 34. Докажите, что окружность $x^2 + y^2 + 2ax = 0$ касается оси y, $a \neq 0$.

Найдем точки пересечения (0; y) оси y с окружностью:

$0^2 + y^2 + 2a \cdot 0 = 0,$

$y^2 = 0$, $y = 0$. Получим, что единственная точка пересечения (0; 0). Окружность пересекает ось y в единственной точке (0; 0), а значит, касается оси y.

Что и требовалось доказать.

№ 35. Составьте уравнение прямой, которая проходит через точки A (-1; 1), B (1; 0).

Задача решена в учебнике на стр. 105 п. 75.

№ 36. Составьте уравнение прямой AB, если: 1) A (2; 3), B (3; 2); 2) A (4; -1). B (-6; 2); 3) A (5; -3), B (-1; -2).

Прямая задается уравнением ax + by + c = 0. Если точки A и B лежат на прямой, то значит, их координаты удовлетворяют этому уравнению. Подставляя координаты точек A и B в уравнение прямой, получим: 2a + 3b + c = 0 и 3a + 2b + c = 0. Из этих уравнений можно выразить два коэффициента, например, a и b через c.

$$\begin{cases} 2a+3b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \end{cases}\left|\begin{array}{l} -2 \\ 3. \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} -4a-6b-2c=0, \\ 9a+6b+3c=0. \end{cases}$$

5a + c = 0,

$a=-\frac{1}{5}c$ Подставим в систему:

$2\left(-\frac{1}{5}c\right)+3b+c=0$,

$b=-\frac{1}{5}c$

Подставив в уравнение прямой значения a и b, получим: $-\frac{1}{5}cx-\frac{1}{5}cy+c=0$; $-\frac{1}{5}x-\frac{1}{5}y+1=0$ — получается сокращением предыдущего уравнения на *c*.

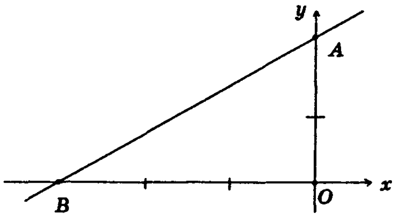
-x – y + 5 = 0; x + y – 5 = 0.

Искомое уравнение прямой x + y – 5 = 0.

задания 2) и 3) выполняются аналогично.

Ответ: 1) x + y – 5 = 0; 2) 3x + 10y – 2 = 0; 3) x + 6y + 13 = 0.

№ 37. Составьте уравнения прямых, содержащих стороны треугольника OAB в задаче 16.



Введем систему координат такую, что
O (0; 0), A (0; 2), B (-4; 0).

1) Сторона АО лежит на оси *y*, тогда, уравнение прямой, содержащей сторону АО, x = 0.
2) Подставим координаты точек A и B в общее уравнение $ax + by + c = 0$

2) 0·a + 2b + c = 0, 2b = – c, b = $-\frac{1}{2}$c.

–4a+C = 0;·b+c=0, – 4 a= – c, a=$\frac{1}{4}$ c. Далее уравнение примет вид:

$\frac{c}{4}x - \frac{c}{2}y + c = 0$, то есть

$\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y + 1 = 0$,

x – 2y + 4 = 0.

Уравнение прямой, содержащей сторону AB, x – 2y + 4 = 0.

3) Уравнение прямой, содержащей сторону BO, y = 0, так как BO лежит на оси *x*.

Ответ: x = 0; y = 0; x – 2y + 4 = 0.

№ 38. Чему равны координаты a и b в уравнении прямой $ax + by = 1$, если известно, что она проходит через точки (1; 2) и (2; 1)?

Подставим координаты точек в уравнение прямой:
a + 2b = 1 и 2a + b = l.

$$\begin{cases} a + 2b = 1 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \Bigg| -2$$

$$\begin{cases} -2a - 4b = -2 \\ 2a + b = 1, \end{cases}$$

$-3b = -1$,

$b = \dfrac{1}{3}$

$2a = 1 - b$,

$$a = \frac{1-b}{2} = \frac{1-\frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

Ответ: $a = b = \dfrac{1}{3}$.

№ 39. Найдите точки пересечения с осями координат прямой, заданной уравнением: 1) x + 2y + 3 = 0; 2) 3x + 4y = 12; 3) 3x-2y + 6 = 0; 4) 4x-2y-10 = 0.

1) Пусть точка пересечения это (x; 0). Тогда она удовлетворяет уравнению прямой, то есть x + 2· 0 + 3=0, x = -3.

Значит, точка пересечения (-3; 0).

Точка пересечения с осью y (0;y) удовлетворяет уравнению прямой:
0 + 2y + 3 = 0, y = -1,5.

Значит, точка пересечения (0; -1,5).

Получаем, что точки пересечения с осями координат (-3; 0) и (0; -1,5).

Задачи 2), 3) и 4) решаются аналогично.

Ответ: 1) (-3; 0) и (0; -1,5); 2) (4; 0) и (0; 3); 3) (–2; 0) и (0; 3); 4) (2,5; 0) и (0; –5).

№ 40. Найдите точку пересечения прямых, заданных уравнениями:

1) x + 2y + 3 = 0, 4x + 5y + 6 = 0;
2) $3x - y - 2 = 0$, 2x + y-8 = 0;
3) 4x + 5y + 8 = 0, 4x – 2y – 6 = 0.

Координаты точек пересечения прямых являются решениями системы уравнений, задающих эти прямые:

$$1)\ \begin{cases} x + 2y + 3 = 0 & \Big|\cdot(-4) \\ 4x + 5y + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x-8y-12=0 \\ 4x+5y+6=0 \end{cases}$$ (складываем)

-3y – 6 = 0,

y = – 2, x=-2y – 3 = 4 – 3=1.

(1; -2).

2) $\begin{cases} 3x-y-2=0 \\ 2x+y-8=0 \end{cases}$ (складываем)

5x – 10=0, 5x=10

x = 2,

y = -2x + 8 = -2·2 + 8 = 4.

(2; 4).

3) $\begin{cases} 4x+5y+8=0 \mid \cdot(-1) \\ 4x-2y-6=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} -4x-5y-8=0 \\ 4x-2y-6=0 \end{cases}$$ (складываем)

-7y – 14=0 –7y=14,

y = -2,

4x = 2y + 6 = – 4 + 6 = 2,

x = 0,5.

(0.5; -2).

Ответ: 1) (1; –2); 2) (2; 4); 3) (0,5; –2).

№ 41*. Докажите, что три прямые x + 2y = 3, $2x - y = 1$ и $3x + y = 4$ пересекаются в одной точке.

Найдем точку пересечения прямых x + 2y = 3 и 2x – y = 1. Координаты точки пересечения этих прямых — это решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x+2y=3, \\ 2x-y=1. \end{cases}$$

1) x = 3 – 2y подставляем во 2-е уравнение.

2) 2·(3 – 2y) – y = 1; 6 – 4y – y = 1,

5y = 5, y = 1.

3) x = 3 – 2·1, x = 1.

точка пересечения прямых x + 2y = 3 и 2x – y = 1 это (1;1).

Подставив в уравнение 3x + y = 4 вместо x и y координаты точки (1; 1), получим:

$3 \cdot 1 + 1 = 4$ — верное равенство.

Значит, прямая 3x + y = 4 проходит через точку (1; 1). А значит, все три прямые пересекаются в точке (1; 1). Так как никакие две различные прямые не могут иметь более одной общей точки, то (1; 1) — единая общая точка.

Что и требовалось доказать.

№ 42*. Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника с вершинами (1; 0), (2; 3), (3; 2).

Пусть в ΔABC A (1; 0); B (2; 3); *C* (3; 2), AA_1, BB_1,. CC_1 — медианы.

$B_1\left(\frac{1+3}{2};\frac{0+2}{2}\right)$; B_1 (2; 1).

$C_1\left(\frac{1+2}{2};\frac{0+3}{2}\right)$, $C_1\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$

Получаем уравнение прямой BB_1: x = 2.

и уравнение прямой CC_1: x – 3y + 3 = 0.

Координаты O (x_o, y_o) — точки пересечения медиан ΔABC это решение системы $\begin{cases} x_o = 2 \\ x_o - 3y_o + 3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_o = 2 \\ 2 - 3y_o + 3 = 0, \end{cases}$

$x_o = 2$

$y_o = \frac{5}{3}$.

Ответ: $\left(2;1\frac{2}{3}\right)$.

№ 43. Докажите, что прямые, заданные уравнениями $y = kx + l_1$, $y = kx + l_2$ при $l_1 \neq l_2$ параллельны.

Задача решена в учебнике на стр. 106 п. 76.

№ 44. Среди прямых, заданных уравнениями, укажите пары параллельных прямых: 1) x + y = 1; 2) y – x = 1; 3) x – y = 2; 4) y = 4; 5) y = 3; 6) 2x + 2y + 3 = 0.

1) $y = -x + 1$, $k = -1$; 4) $y = 4$, $k = 0$;

2) $y = x + 1$, $k = 1$; 5) $y = 3$, $k = 0$;

3) $y = x - 2$, $k = 1$; 6) $y=-x-1{,}5$, $k=-1$

$y = -x – 1{,}5$, $k = -1$.

Параллельные прямые 1) и 6); 2) и 3); 4) и 5), так как коэффициенты k у них равны.

Ответ: 1) и 6); 2) и 3); 4) и 5).

№ 45. Составьте уравнение прямой, которая параллельна оси y и проходит через точку (2; -8).

Задача решена в учебнике на стр. 107 п. 77.

№ 46. Составьте уравнение прямой, параллельной оси x и проходящей через точку (2; 3).

Так как прямая параллельна оси x, то она задается уравнением вида y = c .

Так как точка (2; -3) лежит на прямой, то ее координаты удовлетворяют этому уравнению -3 = c . То есть c=-3 и уравнение прямой y = 3.

Ответ: y = 3.

№ 47. Составьте уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку (2; 3).

Пусть ax + by + c= 0 – уравнение прямой. Прямая проходит через начало координат, поэтому c = 0.

Так что ax + by = 0, так как прямая проходит через (2; 3),

то 2a + 3b = 0, то есть a = -1,5b. Уравнение примет вид

-1,5bx + by =0, то есть 3x-2y = 0.

Ответ: 3x-2y = 0.

№ 48. Найдите угловые коэффициенты прямых из задачи 39.

Угловые коэффициенты прямых ax + by +c =0 находятся по формуле $k = -\frac{a}{b}$. 1) k = $-\frac{1}{2}$; 2) k = $-\frac{3}{4}$; 3) k = $\frac{3}{2}$; 4) k = 2

Ответ: 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $-\frac{3}{4}$; 3) $\frac{3}{2}$; 4) 2.

№ 49. Найдите острые углы, которые образует заданная прямая с осью x: 1) $2y = 2x + 3$; 2) $x\sqrt{3} - y = 2$; 3) $x + y\sqrt{3} + 1$-0.

1) $2y = 2x + 3$, 2) $x\sqrt{3} - y = 2$, 3) $x + y\sqrt{3} + 1 = 0$,

$y = x\sqrt{3} - 2$, $y\sqrt{3} = -x - 1$,

$y = x + 1{,}5$, $k = \sqrt{3}$, $y = -\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$,

$k = 1$, $tg\alpha = \sqrt{3}$, $k = -\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$tg\alpha = 1$. $\alpha = 60°$. $tg\beta = \frac{-\sqrt{3}}{3}$,

$\alpha = 45°$. $\beta = 150°$, $\alpha = 180° - \beta = 30°$.

Ответ: 1) 45°; 2) 60°; 3) 30°.

№ 50. Найдите точки пересечения окружности $x^2 + y^2 = 1$ с прямой: 1) $y = 2x + 1$; 2) $y = x + 1$; 3) $y = 3x + 1$; 4) $y = kx + 1$.

Задача решена в учебнике на стр. 109 п. 80.

№ 51*. При каких значениях c прямая $x + y + c = 0$ и окружность $x^2 + y^2 = 1$: 1) пересекаются; 2) не пересекаются; 3) касаются?

Координаты точек пересечения являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y + c = 0. \end{cases}$$

Окружность и прямая пересекаются, если система имеет решения.

1) $y = -x - c$.

2) $x^2 + (-x-c)^2 = 1$,

$x^2 + x^2 + 2xc + c^2 - 1 = 0$,

$2x^2 + 2cx + (c^2 - 1) = 0$. (2)

Система будет иметь решения, если квадратное уравнение имеет корни, то есть, если $\frac{D}{4} = c^2 - 2(c^2 - 1) = 2 - c^2$ будет неотрицательным, $2 - c^2 \geq 0$, $c^2 \leq 2$, $|c| \leq \sqrt{2}$, $-\sqrt{2} \leq c \leq \sqrt{2}$. То есть при $-\sqrt{2} < c < \sqrt{2}$ уравнение (2) имеет два корня, а значит, система имеет два решения, окружность и прямая пересекаются в двух различных точках; при $c=-\sqrt{2}$ или $c=\sqrt{2}$, $\frac{D}{4}$ = 0 уравнение (2) имеет один корень, система имеет одно решение, значит, окружность и прямая касаются.

А при $c<-\sqrt{2}$ или $c>\sqrt{2}$, $\frac{D}{4}$<0, система не имеет решений, так как уравнение (2) не имеет решений, значит, окружность и прямая не пересекаются.

Ответ: 1) пересекаются, если $-\sqrt{2}<c<\sqrt{2}$;

2) не пересекаются, если $c<-\sqrt{2}$ или $c>\sqrt{2}$;

3) касаются, если $c=-\sqrt{2}$ или $c=\sqrt{2}$.

№ 52. Найдите синус, косинус и тангенс углов: 1) 120°; 2) 135°; 3) 150°.

1) α = 120°,

$\sin\alpha$ = sin (180°-60°) = sin 60° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\cos\alpha$ = cos (180°-60°) = -cos 60°= $-\frac{1}{2}$;

$\mathrm{tg}\alpha$ = tg (180°-60°) = -tg 60° = $-\sqrt{3}$.

2) α = 135°,

$\sin\alpha$ = sin (180°-45°) = sin 45° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\cos\alpha$ = cos (180°-45°) = -cos 45° = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\mathrm{tg}\alpha$ = tg (180°-45°) = -*tg* 45° = -1.

3) α = 150°,

$\sin\alpha$ = sin (180°-30°) = sin 30° = $\frac{1}{2}$;

$\cos\alpha$ = cos (180°-30°) = -cos 30° = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\mathrm{tg}\alpha$ = tg (180°-30°) = -tg 30° = $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

№ 53. Найдите: 1) $\sin 160°$; 2) $\cos 140°$ 3) $\mathrm{tg}\ 130°$.

1) $\sin 160° = \sin(180°-20°) = \sin 20° \approx 0{,}3420$.
2) $\cos 140° = \cos(180°-40°) = -\cos 40° \approx -0{,}7660$.
3) $\mathrm{tg}\ 130° = \mathrm{tg}(180°-50°) = -\mathrm{tg}\ 50° \approx -1{,}1918$.

№ 54. Найдите синус, косинус и тангенс углов: 1) 40°; 2) 14°36'; 3) 70°20'; 4)30°16'; 5) 130°; 6) 150°30'; 7) 150°33'; 8) 170°28'.

Синус, косинус и тангенс острых углов находим с помощью таблиц Брадиса. 1), 2), 3) и 4).

5) $\alpha = 130°$.
$\sin\alpha = \sin(180°-50°) = \sin 50° = 0{,}7660$.
Значения $\cos\alpha$ и $\mathrm{tg}\ \alpha$ находятся аналогично.
6) $\alpha = 150°30'$.
$\sin 150°30' = \sin(180°-29°30') = \sin 29°30' = 0{,}4924$.
Задания 7) и 8) выполняются аналогично.

№ 55. Найдите углы, для которых: 1) $\sin a = 0{,}2$; 2) $\cos\alpha = -0{,}7$; 3) $\mathrm{tg}\ \alpha = -0{,}4$.

1) $\sin\alpha = 0{,}2$, $\alpha = 11°32'$
или
$\alpha = 168°28'$.
2) $\cos\alpha = -0{,}7$,
$\cos(180°-\alpha) =$
$= -\cos\alpha = 0{,}7$
$180°-\alpha = 45°34'$
$\alpha = 180°-45°34'$,
$\alpha = 134°26'$.
3) $\mathrm{tg}\ \alpha = -0{,}4$.
$\mathrm{tg}(180°-\alpha) = -\mathrm{tg}\alpha = 0{,}4$
$180°-\alpha = 21°48'$,
$\alpha = 180°-21°48'$
$\alpha = 158°12'$

№ 56. Найдите $\sin\alpha$ и $\mathrm{tg}\ \alpha$, если: 1) $\cos\alpha = \frac{1}{3}$; 2) $\cos\alpha = -0{,}5$; 3) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1) $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, тогда

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = \frac{2\sqrt{2}\cdot 3}{3\cdot 1} = 2\sqrt{2}$$

2) cos a = -0,5,

$$\sin\alpha = \sqrt{1-(-0{,}5)^2} = \sqrt{1-0{,}25} = \sqrt{0{,}75} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = -\frac{\sqrt{3}\cdot 2}{2\cdot 1} = -\sqrt{3}$$

Задания 3) и 4) выполняются аналогично.

№ 57. Найдите cosα и tg α, если: 1) sinα = 0,6, 0 < α <90°; 2) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, 90<α<180°; 3) $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 0< α <180°.

1) sin α = 0,6, 0° < α<90°. Тогда

$$\cos\alpha = \sqrt{1-0{,}6^2} = \sqrt{1-0{,}36} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8;\ tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}6}{0{,}8} = \frac{3}{4}.$$

2) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, 90°< α <180°. Тогда

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3};$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{1\cdot 3}{3\cdot 2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

3) $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 0°< α <180°, тогда

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \pm\sqrt{1-\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \pm\frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot 1} = \pm 1.$$

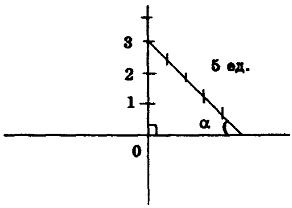
№ 58. Известно, что $tg\alpha = -\frac{5}{12}$. Найдите sinα и cosα.

$$1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha};\ \cos^2\alpha=\frac{1}{1+tg^2\alpha},\ \cos^2\alpha=\frac{1}{1+\frac{25}{144}},$$

$$\cos^2\alpha=\frac{144}{169};\cos\alpha=\pm\frac{12}{13},$$

$$\sin\alpha=tg\alpha\cdot\cos\alpha=\pm\frac{5\cdot 12}{12\cdot 13}=\pm\frac{5}{13}.$$

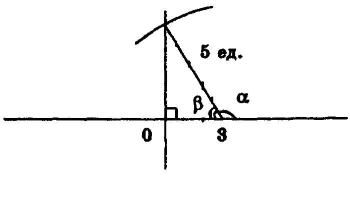
№ 59. Постройте угол α, если известно, что sinα = $\frac{3}{5}$.



Строим прямоугольный треугольник с катетом 3 и гипотенузой 5. Угол напротив катета 3 — искомый, так как sinα = $\frac{3}{5}$.

№ 60. Постройте угол α, если известно, что cosα = $-\frac{3}{5}$.

Строим прямоугольный треугольник с катетом 3 и гипотенузой 5. Угол, смежный с углом β -треугольника – искомый.



Так как cos (180°-β) = -cos β = $-\frac{3}{5}$ = cos α.

№ 61*. Докажите, что если cosα = cosβ, то α = β.

По определению $\cos\alpha = \frac{x_1}{R}$, где R — радиус окружности с центром (0; 0), а $A(x_1; y_1)$ – точка пересечения одной из сторон угла α с этой окружностью, если другая сторона совпадает с положительной полуосью x, и угол α отложен в верхнюю полуплоскость, где $y>0$.

Аналогично $\cos\beta = \frac{x_2}{R}$, а $B(x_2; y_2)$ – соответствующая точка.

Поскольку $\cos\alpha = \cos\beta$, то

$\frac{x_1}{R} = \frac{x_2}{R}$, значит, $x_1 = x_2$.

Так как точки A и B принадлежат окружности с центром (0; 0) и радиуса R, то

$x_1^2 + y_1^2 = R^2$.

$x_2^2 + y_2^2 = R^2$.

А так как $x_1 = x_2$ то $y_1^2 = y_2^2$. Поскольку y_1, y_2— положительные числа, то $y_1 = y_2$, значит, A $(x_1; y_1)$ и B $(x_2; y_2)$ совпадают.

А значит, $\alpha = \beta$.

Что и требовалось доказать.

№ 62*. Докажите, что если $\sin\alpha = \sin\beta$, то либо $\alpha = \beta$, либо $\alpha = 180° - \beta$.

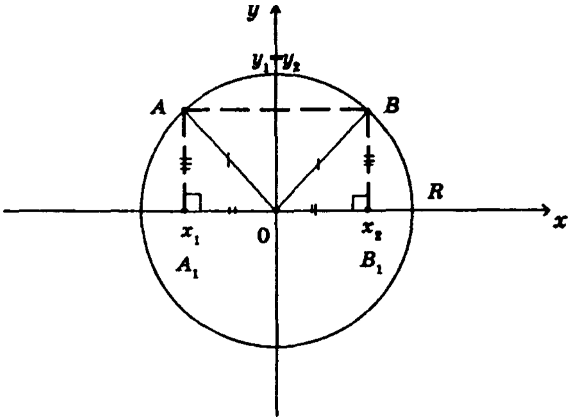
Пусть A $(x_1; y_1)$. B $(x_2; y_2)$ — точки пересечения окружности с центром (0; 0) радиуса R со стороной угла α и β соответственно, отложенных от положительной полуоси x в верхнюю полуплоскость, где $y>0$.

По определению $\sin\alpha = \frac{y_1}{R}$; $\sin\beta = \frac{y_2}{R}$. Поскольку точки A и B лежат на окружности с центром (0; 0) радиуса R, то $x_1^2 + y_1^2 = R^2$ и

$x_2^2 + y_2^2 = R^2$, но $y_1 = y_2$, так как $\sin\alpha = \sin\beta$.

Так как $y_1 = y_2$, то $x_1^2 = x_2^2$, $|x_1| = |x_2|$. Значит, либо $x_1 = x_2$, либо $x_1 = -x_2$.

Если $x_1 = x_2$, то A и B совпадают и $\alpha = \beta$; если $x_1 = -x_2$, то опустим перпендикуляры AA_1 и BB_1 из A и B на ось x. Тогда $OA_1=OB_1$, $OA=OB$ и $AA_1=BB_1$.



Поэтому $\Delta OA_1A = \Delta OB_1B$ (по трем сторонам), значит, $\angle B_1OB = \angle A_1OA = \beta$, $\angle B_1OA = \alpha$ является смежным с углом A_1OA, значит, $\alpha+\beta = 180°$. То есть

$\beta = 180-\alpha$.

Что и требовалось доказать.

§ 9. Движение

№ 1. Докажите, что при движении параллелограмм переходит в параллелограмм.

Диагонали параллелограмма пересекаются в точке, которая делит каждую из них пополам. Но при движении параллелограмм перейдет в четырехугольник, у которого диагонали в точке пересечения делятся пополам. А значит этот четырехугольник — параллелограмм.

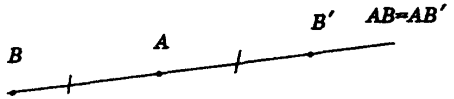
Что и требовалось доказать.

№ 2. В какую фигуру переходит при движении квадрат? Объясните ответ.

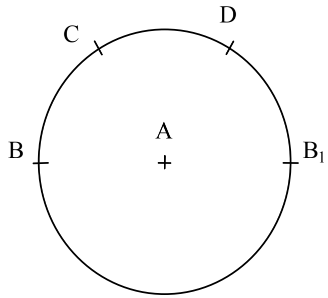
Поскольку движение — это преобразование одной фигуры в другую, сохраняющее расстояния между точками и сохраняющее углы между полупрямыми, то квадрат перейдет в фигуру, стороны которой будут равны и углы прямые, а значит, эта фигура – квадрат. То есть квадрат перейдет в квадрат.

№ 3. Даны точки A и B. Постройте точку B', симметричную точке B относительно точки A.

На продолжении прямой BA откладываем отрезок AB′=AB.



№ 4. Решите предыдущую задачу, пользуясь только циркулем.



$AB = CB = CD = DB_1$.

№ 63. Вычислите значения sinα и tgα, если:

1) $\cos\alpha = \dfrac{5}{13}$; 2) $\cos\alpha = \dfrac{15}{17}$; 3) $\cos\alpha = 0{,}6$.

Задача решена в учебнике на стр. 91 п. 68.

№ 64. Найдите cosα и tgα, если. 1) $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$; 2) $\sin\alpha = \dfrac{40}{41}$; 3) $\sin\alpha = 0{,}8$.

1) $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$

$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$.

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$$

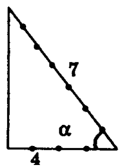
$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{3\cdot 5}{5\cdot 4} = \frac{3}{4}.$$

Задания 2) и 3) решаются аналогично заданию 1).

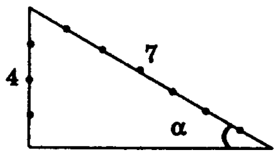
№ 65. Постройте угол α, если известно, что: 1) $\cos\alpha = \frac{4}{7}$; 2) $\sin\alpha = \frac{4}{7}$; 3) $\sin\alpha = 0{,}5$; 4) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{5}$; 5) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}7$.

Задача решается путем построения прямоугольного треугольника по катету и гипотенузе.

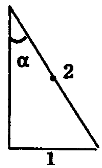
1) $\cos\alpha = \frac{4}{7}$;



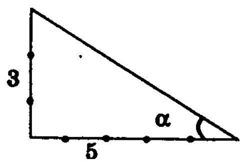
2) $\sin\alpha = \frac{4}{7}$;



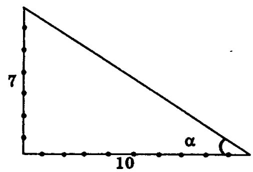
3) $\sin\alpha = 0{,}5$;



4) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{5}$;



5) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}7$



№ 66. В прямоугольном треугольнике с гипотенузой a и углом 60° найдите катет, противолежащий этому углу.

$\sin 60^o = \frac{b}{a}$, так что $b = a\sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

№ 67. Найдите радиус r окружности, вписанной в равносторонний треугольник со стороной a, и радиус R окружности, описанной около него.

У равностороннего треугольника центр вписанной окружности совпадает с центром описанной, так как биссектрисы лежат на серединных перпендикулярах к сторонам треугольника.

Так что радиус вписанной окружности $r = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg}30° = \frac{a}{2\sqrt{3}}$.

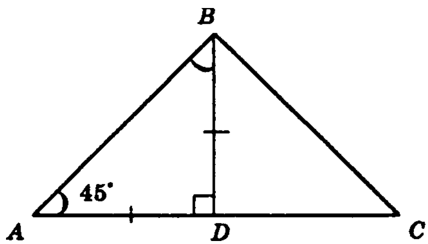
$\cos 30^o = \dfrac{a}{2R}$, поэтому

Радиус описанной окружности

$$R = \frac{a}{2} : \cos 30° = \frac{a}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\dfrac{a}{2\sqrt{3}}$; $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

№ 68. В треугольнике один из углов при основании равен 45°, а высота делит основание на части 20 см в 21 см. Найдите большую боковую сторону[2].



Рассмотрим ΔABD.

$\angle A = 45°$ (по условию).

$\angle D = 90°$ (так как $BD \perp AC$), значит $\angle ABD = 45°$ и

ΔABD — равнобедренный, поэтому AD = BD = 20, а DC = 21.

Далее

$$AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{20^2 + 20^2} = \sqrt{400 + 400} = \sqrt{2 \cdot 400} = 20\sqrt{2},$$

$$BC = \sqrt{DC^2 + BD^2} = \sqrt{20^2 + 21^2} = \sqrt{400 + 441} = 29.$$

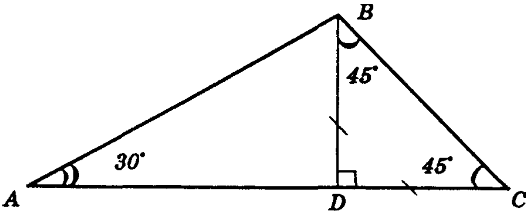
Большая боковая сторона 29 см. Если AD = 21, а DC = 20, то $AB = 21\sqrt{2}$, BC = 29, значит большая боковая сторона равна $21\sqrt{2}$ см $\approx$ 29,7 см.

Ответ: 29 см или $21\sqrt{2}$ см $\approx$ 29,7 см.

---

[2] Иногда в произвольном треугольнике, необязательно равнобедренном, сторона, проведенная горизонтально, называется основанием, а две другие — боковыми сторонами, как в данной задаче.

№ 69. У треугольника одна из сторон равна 1 м, а прилежащие к ней углы равны 30° и 45°. Найдите другие стороны треугольника.



Проведем BD⊥AC

ΔBDC — равнобедренный, (так как ∠C=∠DBC=45°) BD = DC. Пусть BD = x м.

AC = 1 м; AD = 1 – x.

$$tg30° = \frac{BD}{AD} = \frac{x}{1-x},$$

$$x\left(1+tg30^o\right) = tg30^o, x = \frac{tg30^o}{1+tg30^o} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{1+\sqrt{3}}.$$

Так что $BD = \frac{1}{1+\sqrt{3}} = CD$.

$$\sin 45° = \frac{BD}{BC}$$

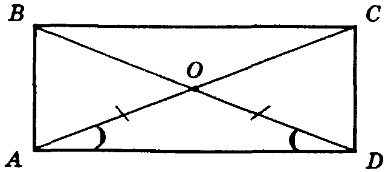
$$BC = \frac{BD}{\sin 45°} = \frac{1}{1+\sqrt{3}} \div \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} \approx 0{,}517 \text{ м}.$$

$$\sin 30° = \frac{BD}{AB},$$

$$AB = \frac{BD}{\sin 30°} = \frac{1}{1+\sqrt{3}} \div \frac{1}{2} = \frac{2}{1+\sqrt{3}} \approx 0{,}732 \text{ м}.$$

Ответ: ≈ 0,517 м; ≈ 0,732 м.

№ 70. Диагональ прямоугольника в два раза больше одной из его сторон. Найдите углы между диагоналями.



Диагонали прямоугольника равны и точкой пересечения делятся пополам. Пусть CD x, тогда AC = 2x, $\angle$CAD = 30° (в прямоугольном треугольнике катет, противолежащий углу 30°, равен половине гипотенузы).

ΔAOD — равнобедренный, значит и $\angle$ODA = 30°. Тогда

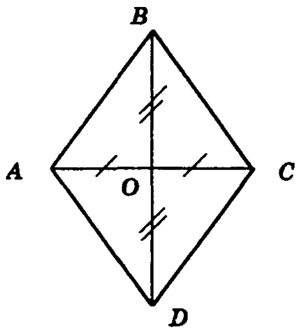
$\angle AOD = 180° - 2 \cdot 30° = 120°$.

$\angle$AOD и $\angle$DOC — смежные, поэтому

$\angle COD = 180° - 120° = 60°$.

Ответ: 60° и 120°.

№ 71. Диагонали ромба равны a и $a\sqrt{3}$. Найдите углы ромба.



Диагонали ромба перпендикулярны друг другу, точкой пересечения делятся пополам и являются биссектрисами углов этого ромба. Используя эти свойства получим:

$AO = \frac{a}{2}$; $BO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\text{tg}\angle BAO = \frac{BO}{AO} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \div \frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{a} = \sqrt{3}$, значит

$\angle BAO = 60°$.

$\angle A = 2\angle BAO = 2 \cdot 60° = 120°$;

$\angle A = \angle C = 120°$.

$\angle A$ и $\angle B$ — углы ромба, прилежащие к одной стороне, значит

$\angle A + \angle B = 180°$, то есть

$\angle B = 180° - \angle A = 180° - 120° = 60°$.

$\angle D = \angle B = 60°$.

$\angle C = \angle A = 120$.

Ответ: 60°, 60°, 120°, 120°.

№ 72. Какой из углов больше — α или β, если: 1)$\sin\alpha = \frac{1}{3}$; $\sin\beta = \frac{1}{4}$; 2) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$; $\sin\beta = \frac{3}{4}$; 3) $\cos\alpha = \frac{3}{7}$; $\cos\beta = \frac{2}{5}$; 4) $\cos\alpha = 0{,}75$, $\cos\beta = 0{,}74$; 5) $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}1$, $\operatorname{tg}\beta = 2{,}5$; 6)$\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{3}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{5}{2}$?

При решении задачи используем теорему 7.5.

1) $\sin a = \frac{1}{3}$; $\sin\beta = \frac{1}{4}$; $\sin\alpha > \sin\beta$. Тогда, $\alpha > \beta$.

2) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$; $\sin\beta = \frac{3}{4}$;

$\sin\alpha < \sin\beta$, тогда, $\alpha < \beta$.

3) $\cos\alpha = \frac{3}{7}$; $\cos\beta = \frac{2}{5}$;

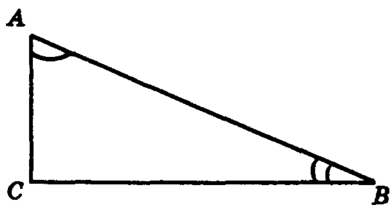
$\cos\alpha > \cos\beta$, тогда, $\alpha < \beta$.

4) $\cos\alpha = 0{,}75$; $\cos\beta = 0{,}74$; $\cos\alpha > \cos\beta$. Тогда, $\alpha < \beta$.

5) $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}1$; $\operatorname{tg}\beta = 2{,}5$; $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\beta$. Тогда, $\alpha < \beta$.

6) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{3}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{5}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha > \operatorname{tg}\beta$. Тогда, $\alpha > \beta$.

№ 73. У прямоугольного треугольника ABC угол A больше угла B. Какой из катетов больше — AC или BC?



$\angle A > \angle B$, тогда, согласно теореме 7.5 $\sin\angle A > \sin\angle B$.

Но $BC = AB \sin\angle A$, а

$AC = AB \sin\angle B$. Так что

$BC > AC$, так как $AB = AB$, $\sin\angle A > \sin\angle B$.

Ответ: BC.

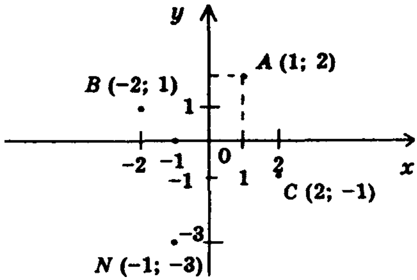
№ 74. У прямоугольного треугольника ABC катет BC больше катета AC. Какой угол больше — A или B?

Угол A больше. Решение задачи решается аналогично решению № 73.

Ответ: $\angle A$.

§ *8.* Декартовы координаты на плоскости

№ 1. Проведите оси координат, выберите единицу длины на осях, постройте точки с координатами: (1; 2), (-2; 1), (-1; -3), (2; -1).



№ 3. На прямой, параллельной оси *x*, взяты две точки. У одной из них ордината y = 2. Чему равна ордината другой точки?

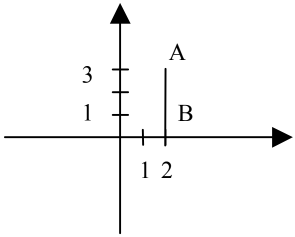
У всех точек на прямой, параллельной оси x, ординаты точек равны, значит ордината другой точки тоже равна 2.

Ответ: 2.

№ 4. На прямой, перпендикулярной оси x, взяты две точки. У одной из них абсцисса x = 3. Чему равна абсцисса другой точки?

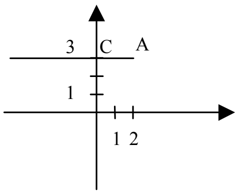
Прямая, перпендикулярна оси x, а значит параллельна оси *y*, поэтому абсцисса другой точки тоже равна 3.
Ответ: 3.

№ 5. Из точки A (2; 3) опущен перпендикуляр на ось x. Найдите координаты основания перпендикуляра.



Ответ: (2; 0).

№ 6. Через точку A (2; 3) проведена прямая, параллельная оси *x*. Найдите координаты точки пересечения ее с осью *y*.



Ответ: (0; 3).

№ 7. Найдите геометрическое место точек плоскости *xy*, для которых абсцисса x = 3.

Геометрическим местом точек плоскости *xy*, для которых абсцисса x = 3, является прямая, перпендикулярная оси *x*, параллельная оси *y* и проходящая через точку (3;0), то есть отстоющая от оси *y* на 3 ед. вправо.

№ 8. Найдите геометрическое место точек плоскости *xy*, для которых |x| = 3.

Геометрическое место точек, для которых |x| = 3, состоит из двух прямых, параллельных оси *y*, *отстоящих от* нее на 3 ед.

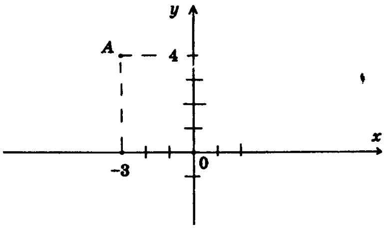
№ 9. Даны точки A (-3; 2) и B (4; 1). Докажите, что отрезок AB пересекает ось *y*, во не пересекает ось *x*.

Задача решена в учебнике на стр. 101 п. 71.

№ 10. Какую из полуосей оси *y* (положительную или отрицательную) пересекает отрезок AB в предыдущей задаче?

У точек A и B ординаты положительные, значит обе точки A и B лежат в верхней полуплоскости. А значит отрезок AB пересекает положительную полуось оси *y*.

№ 11. Найдите расстояние от точки (-3; 4) до: 1) оси *x*; 2) оси *y*.



Расстояние от точки (-3;4) до оси *x* равно 4, а до оси *y* 3.
Ответ: 4; 3.

№ 12. Найдите координаты середины отрезка AB, если: 1) A (1; -2), B (5; 6); 2) A (-3; 4), B (1; 2); 3) A (5; 7), B (-3; -5).

1)A (1; -2); B (5; 6). Пусть O — середина отрезка AB. Тогда O имеет координаты:

$x_o = \dfrac{1+5}{2} = 3$, $y_o = \dfrac{-2+6}{2} = 2$. O (3; 2).

2) A (-3; 4); B (1; 2);

$x_o = \dfrac{-3+1}{2} = -1$; $y_o = \dfrac{4+2}{2} = 3$. O (-1; 3).

3) A (5; 7); B (-3; -5);

$x_o = \dfrac{5-3}{2} = 1$; $y_o = \dfrac{7-5}{2} = 1$ O (1; 1).

Ответ: 1) (3; 2); 2) (-1; 3); 3) (1; I).

№ 13. Точка C — середина отрезка *AB*. Найдите координаты второго конца отрезка AB, если: 1) A (0; 1), C (-1; 2); 2) A (-1; 3), C (1; -1); 3) A (0; 0), C (-2; 2).

1)A(0; 1); C(-1; 2). Пусть B(*x; y*) – второй конец, тогда

$\dfrac{0+x}{2} = -1$; $\dfrac{1+y}{2} = 2$, откуда

$x = -2$; $y = 3$ значит $B(-2; 3)$

A (-1; 3); C (1; -1); B (x; y) – второй конец отрезка.

$\frac{-1+x}{2} = 1$; $\frac{3+y}{2} = 1$; откуда

$x = 3$; $y = -5$, $B(3; -5)$, значит,

A (0; 0); C (-2; 2); B (x; y) – второй конец отрезка.

$\frac{0+x}{2} = -2$; $\frac{0+y}{2} = 2$, откуда

$x = -4$; $y = 4$, значит, $B(-4; 4)$.

Ответ: 1) (-2; 3); 2) (3; -5); 3) (-4; 4).

№ 14. Докажите, что четырехугольник ABCD с вершинами в точках A (-1; -2), B (2; -5), C (1; -2), D (-2; 1) является параллелограммом. Найдите точку пересечения его диагоналей.

По свойству диагоналей четырехугольника ABCD — параллелограмм, если координаты середин отрезков AC и BD, совпадают. Обозначим середину AC — O_1, а BD — O_2.

A(-1;-2); C(1;-2); $O_1(x_1;y_1)$

$x_1 = \frac{-1+1}{2} = 0$; $y_1 = \frac{-2-2}{2} = -2$; O_1 (0; -2)

B (2, -5); D (-2. 1); O_2 $(x_2;\ y_2)$.

$x_1 = \frac{2-2}{2} = 0$; $y_2 = \frac{-5+1}{2} = -2$ O_2 (0; -2)

Координаты середин совпали, значит, четырехугольник ABCD — параллелограмм. Точка пересечения диагоналей (0; -2).

Ответ: (0; -2).

№ 15. Даны три вершины параллелограмма ABCD: A (1; 0), B (2; 3), C (3; 2). Найдите координаты четвертой вершины D и точки пересечения диагоналей.

Задача решена на стр. 102 п. 72.

№ 16. Найдите середины сторон треугольника с вершинами в точках O (0; 0), A (0; 2), B (-4; 0).

Пусть $(x_1; y_1)$ — середина OA; $(x_2; y_2)$ — середина AB; $(x_3; y_3)$ — середина OB.

$x_1 = \frac{0+0}{2} = 0$, $y_1 = \frac{0+2}{2} = 1$; (0; 1);

$x_2 = \dfrac{0-4}{2} = -2,\ y_2 = \dfrac{2+0}{2} = 1$ (-2; 1);

$x_3 = \dfrac{0-4}{2} = -2,\ y_3 = \dfrac{0+0}{2} = 0$; (-2; 0)

Ответ: (0; 1); (-2; 1); (-2; 0).

№ 17. Даны три точки A (4; -2), B (1; 2), C (-2; 6). Найдите расстояния между этими точками, взятыми попарно.

Расстояние между точками A($x_1;y_1$) и B($x_2;y_2$) вычисляется по формуле:

$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$; в нашем случае

$AB = \sqrt{(4-1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$AC = \sqrt{(4+2)^2 + (-2-6)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10;$

$BC = \sqrt{(1+2)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

Ответ: AB = 5; AC = 10; BC = 5.

№ 18. Докажите, что точки A, B, C в задаче 17 лежат на одной прямой. Какая из них лежит между двумя другими?

AC = AB + BC,

10 = 5 + 5.

Так как сумма расстояний от точки B до точек A и C равна расстоянию между этими точками, то точки A, B, и C лежат на одной прямой. Причем B лежит между A и C.

Ответ: *B*.

№ 19. Найдите на оси x точку, равноудаленную от точек (1; 2) и (2; 3).

Задача решена в учебнике на стр. 103 п. 73.

№ 20. Найдите точку, равноудаленную от осей координат и от точки (3; 6).

Поскольку точка равноудалена от осей координат, то она лежит на биссектрисе 1-го и 3-го координатных углов. Тогда ее координаты A (x; x). То есть она удалена от координатных осей на одинаковок расстояние.

Значит, AD = AC = x. D (0; x), C (x; 0).

Далее,

$$AO=\sqrt{(3-x)^2-(6-x)^2}=\sqrt{9-6x+x^2+36-12x+x^2}=$$

$$=\sqrt{2x^2-18x+45}$$. Поскольку AO=AC=AD, то

$$\sqrt{x^2}=\sqrt{2x^2-18x+45};$$

$x^2 = 2x^2 - 18x + 45;$

$2x^2 – x^2 – 18x + 45 = 0;$

$x^2 – 18x + 45 = 0.$

$x_1 = 15; x_2 = 3.$

Ответ: (3; 3) или (15; 15).

№ 21*. Докажите, что четырехугольник ABCD с вершинами в точках A (4; 1), B (0; 4), C (-3; 0), D (1; -3) является квадратом.

Докажем, что ABCD — квадрат.

Вычислим длины сторон четырехугольника ABCD.

$$AB = \sqrt{(4-0)^2+(1-4)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5,$$

$$BC = \sqrt{(-3-0)^2+(0-4)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5,$$

$$CD = \sqrt{(1+3)^2+(3-0)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5,$$

$$AD = \sqrt{(1-4)^2+(-3-1)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5.$$

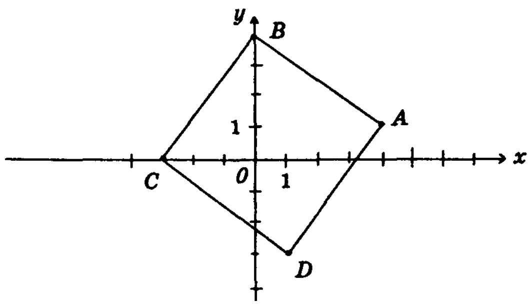
AB = BC = CD = AD = 5, значит, ABCD — ромб.

Вычислим диагонали ромба AC и BD.

$$AC = \sqrt{(-3-4)^2+(0-1)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$

$$BD = \sqrt{(1-0)^2+(-3-4)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}.$$

AC = BD.



Если диагонали параллелограмма (ромба) равны, то этот параллелограмм является прямоугольником. В свою очередь ромб, являющийся прямоугольником, — это квадрат, значит, *ABCD* — квадрат.

Что и требовалось доказать.

№ 22. Докажите, что четыре точки (1; 0), (-1; 0), (0; 1), (0; -1) являются вершинами квадрата.

Пусть A (-1; 0), B (0; 1), C (1; 0), D (0; -1) — вершины четырехугольника.

1) AC = $\sqrt{(-1-1)^2+(0-0)^2} = \sqrt{4} = 2$

BD = $\sqrt{(0-0)^2+(1+1)^2} = \sqrt{4} = 2$, так что AC = BD

2) AB = $\sqrt{(-1-0)^2+(0-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$,

BC = $\sqrt{(0-1)^2+(1-0)^2} = \sqrt{2}$

CD = $\sqrt{(1-0)^2+(0+1)^2} = \sqrt{2}$,

DA = $\sqrt{(0+1)^2+(-1=0)^2} = \sqrt{2}$, так что AB=BC=CD=DA

Стороны и диагонали ABCD равны, значит, ABCD — квадрат.

Что и требовалось доказать.

№ 23. Какие из точек (1; 2), (3; 4), (-4; 3), (0; 5), (6; -1) лежат на окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 25$?

Подставим координаты всех точек в уравнение окружности:

1) (1; 2). $1^2 + 2^2 = 25$ - неверно.
2) (3; 4), $3^2 + 4^2 = 25$ - верно.
3) (0; 5), $0^2 + 5^2 = 25$ - верно.
4) (5; -1). $5^2 + (-1)^2 = 25$ - неверно.
5) (-4; 3). $(-4)^2 + 3^2 = 25$ - верно.

Значит точки (3; 4), (0; 5), (-4; 3) лежат на данной окружности.

№ 24. Найдите на окружности, заданной уравнением

$x^2 + y^2 = 169$, точки:

1) с абсциссой 5;

2) с ординатой -12.

Пусть точка (5; y) лежит на окружности, тогда $5^2 + y^2 = 169$ и $y = \pm\sqrt{169-25} = \pm\sqrt{144} = \pm 12$. Получим две точки (5; 12) и (5;-12).

2) Пусть точка (x; -12) лежит на окружности, тогда $x^2 + (-12)^2 = 169$ и $x = \pm\sqrt{169-144} = \pm\sqrt{25} = \pm 5$,

получим две точки (5;-12) и (-5;-12)

Ответ: 1) (5; 12); (5;-12); 2) (5; -12); (-5; -12).

№ 25. Даны точки A (2; 0) и B (-2; 6). Составьте уравнение окружности, диаметром которой является отрезок AB.

Найдем координаты центра окружности и радиус AB — диаметр. O — центр окружности. A (2; 0); B (-2; 6).

$x = \frac{2-2}{2} = 0$; $y = \frac{0+6}{2} = 3$, O(0; 3)

$R = AO = \sqrt{(2-0)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$, $R = \sqrt{13}$.

Значит, уравнение окружности примет вид

$(x-0)^2 + (y-3)^2 = (\sqrt{13})^2$, то есть $x^2 + (y-3)^2 = 13$.

Ответ: $x^2 + (y-3)^2 = 13$.

№ 26. Даны точки A (-1; -1) и C (-4; 3). Составьте уравнение окружности с центром в точке C, проходящей через точку A.

Найдем радиус окружности R=AC

$R^2 = (-1+4)^2 + (-1-3)^2 = 25$, то есть R=5.

К тому же C (-4; 3) — центр окружности, значит, ее уравнение:

$(x+4)^2 + (y-3)^2 = 25$.

Ответ: $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 25$.

№ 27. Найдите центр окружности на оси x, если известно, что окружность проходит через точку (1; 4) и радиус окружности равен 5.

R = 5, O (a; 0) — центр окружности, A (1; 4) лежит на окружности.

$(1-a)^2 + (4-0)^2 = 5^2$ – уравнение окружности. Подставим в него координаты точки A, получим

$1-2a + a^2 + 16 - 25 = 0$.

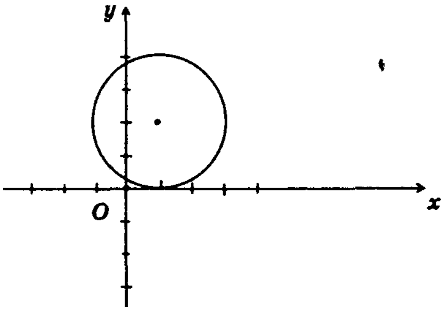
$a^2 - 2a - 8 = 0.$

$a_1 = -2$; $a_2 = 4$, значит,

O (-2; 0) или O (4; 0).

Ответ: (-2; 0) или (4; 0).

№ 28*. Составьте уравнение окружности с центром в точке (1;2), касающейся оси x.



Заменим уравнение окружности с центром (1; 2), $(x - I)^2 + (y - 2)^2 = R^2$, где R — радиус окружности. Уравнение оси x: $y = 0$. Окружность и ось x касаются, значит, система уравнений $\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=R^2\\ y=0\end{cases}$ имеет единственное решение.

Решим систему.

1) $y = 0$.

$(x - 1)^2 + (0 - 2)^2 = R^2,$

$x^2 - 2x + 1 + 4 - R^2 = 0,$

$x^2 - 2x + (5 - R^2) = 0.$

Система будет иметь единственное решение (a; 0), если данное уравнение будет иметь один корень x = a, то есть если D = 0 или $\frac{D}{4}$ =0.

Это значит:

$\frac{D}{4} = 1 - (5 - R^2) = R^2 - 4 = 0$, то есть R=2, так как R>0. А значит

$(x-1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ — уравнение искомой окружности.

Ответ: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

№ 29. Составьте уравнение окружности с центром (-3; 4), проходящей через начало координат.

О (-3; 4) — центр окружности, А (0; 0) лежит на окружности, поэтому $R^2 = (0 + 3)^2 + (0-4)^2 = 9 + 16 = 25$ и

$(x + 3)^2 + (y-4)^2 = 25$ – уравнение искомой окружности.

Ответ: $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$.

№ 30*. Какая геометрическая фигура задана уравнением $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c > 0$?

Преобразуем уравнение $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$,

$$x^2 + 2x \cdot \frac{a}{2} + y^2 + 2y \cdot \frac{b}{2} = -c.$$

Прибавим к обеим частям $\left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}\right)$:

$$x^2 + 2x \cdot \frac{a}{2} + \frac{a^2}{4} + y^2 + 2y \cdot \frac{b}{2} + \frac{b^2}{4} = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$$

Так как $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c > 0$, то это уравнение окружности с центром в точке $O\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$ и радиусом $R = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}$. Значит, данное уравнение задает окружность.

Ответ: окружность.

№ 31. Найдите координаты точек пересечения двух окружностей: $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^{2} - 2x + y - 2 = 0$.

Координаты точек пересечения двух окружностей $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^{2} - 2x + y - 2 = 0$ являются решением системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ \underbrace{x^2 + y^2}_{1} - 2x + y - 2 = 0 \cdot \end{cases}$$

$1 - 2x + y - 2 = 0$,

$-2x + y - 1 = 0$,

$y = 1 + 2x$, подставляем в первое уравнение

$x^2 + (1 + 2x)^2 = 1$,

$x^2 + 1 + 4x + 4x^2 – 1 = 0$,

$5x^2 + 4x = 0$,

$x(5x + 4) = 0$, $x_1=0$, $x_2 = -\frac{4}{5}$. Получим

$\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 1. \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -\frac{4}{5}, \\ y_2 = -\frac{3}{5}. \end{cases}$ - решения системы.

Точки пересечения (0; 1) и $\left(-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right)$.

Ответ: (0; 1); $\left(-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right)$.

№ 32. Найдите координаты точек пересечения окружности $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 7 = 0$ с осью *x*.

Точка пересечения окружности $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 7 = 0$ с осью x имеет координаты (x; 0). Данная точка также удовлетворяет уравнению $x^2 - 8x + 7 = 0$.

$x = \frac{8 \pm \sqrt{64-28}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2}$; $x_1 = 7$; $x_2 = 1$.

Значит, точки пересечения (7; 0) и (1; 0).

Ответ: (7; 0) и (1; 0).

№ 33. Докажите, что окружность $x^2 + y^2 + 2ax + 1 = 0$, $| a | > 1$ не пересекается с осью *y*.

Преобразуем уравнение $x^2 + y^2 + 2ax + 1 = 0$ к виду:

$x^2 + y^2 + 2ax + 1 + a^2 - a^2 = 0$

$x^2 + 2ax + a^2 + y^2 + 1 – a^2 = 0$.

$(x + a)^2 + y^2 + 1 – a^2 = 0$.

Никакая точка (0; *y*) не удовлетворяет такому уравнению, так как $(0 + a)^2 + y^2 + 1 – a^2 = y^2 + 1 \neq 0$. Значит, окружность не пересекается с осью *y*.

Что и требовалось доказать.

№ 34. Докажите, что окружность $x^2 + y^2 + 2ax = 0$ касается оси *y*, $a \neq 0$.

Найдем точки пересечения (0; *y*) оси *y* с окружностью:

$0^2 + y^2 + 2a \cdot 0 = 0$,

$y^2 = 0$, $y = 0$. Получим, что единственная точка пересечения (0; 0). Окружность пересекает ось *y* в единственной точке (0; 0), а значит, касается оси *y*.

Что и требовалось доказать.

№ 35. Составьте уравнение прямой, которая проходит через точки A (-1; 1), B (1; 0).

Задача решена в учебнике на стр. 105 п. 75.

№ 36. Составьте уравнение прямой AB, если: 1) A (2; 3), B (3; 2); 2) A (4; -1). B (-6; 2); 3) A (5; -3), B (-1; -2).

Прямая задается уравнением ax + by + c = 0. Если точки A и B лежат на прямой, то значит, их координаты удовлетворяют этому уравнению. Подставляя координаты точек A и B в уравнение прямой, получим: 2a + 3b + c = 0 и 3a + 2b + c = 0. Из этих уравнений можно выразить два коэффициента, например, a и b через c.

$$\begin{cases} 2a + 3b + c = 0 \,\big|\, -2 \\ 3a + 2b + c = 0 \,\big|\, 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4a - 6b - 2c = 0, \\ 9a + 6b + 3c = 0. \end{cases}$$

5a + c = 0,

$a = -\frac{1}{5}c$ Подставим в систему:

$2\left(-\frac{1}{5}c\right) + 3b + c = 0$,

$b = -\frac{1}{5}c$

Подставив в уравнение прямой значения a и b, получим: $-\frac{1}{5}cx - \frac{1}{5}cy + c = 0$; $-\frac{1}{5}x - \frac{1}{5}y + 1 = 0$ — получается сокращением предыдущего уравнения на *c*.

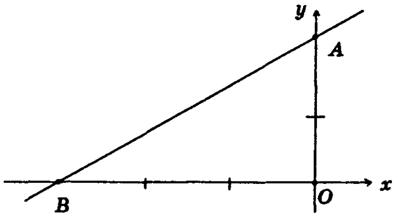
-x – y + 5 = 0; x + y – 5 = 0.

Искомое уравнение прямой x + y – 5 = 0.

задания 2) и 3) выполняются аналогично.

Ответ: 1) x + y – 5 = 0; 2) 3x + 10y – 2 = 0; 3) x + 6y + 13 = 0.

№ 37. Составьте уравнения прямых, содержащих стороны треугольника ОАВ в задаче 16.



Введем систему координат такую, что
O (0; 0), A (0; 2), B (-4; 0).

3) Сторона AO лежит на оси *y*, тогда, уравнение прямой, содержащей сторону AO, x = 0.
4) Подставим координаты точек A и B в общее уравнение $ax + by + c = 0$

2) 0·a + 2b + c = 0, 2b = – c, b = $-\frac{1}{2}$c.

–4a+C = 0;·b+c=0, – 4 a= – c, a=$\frac{1}{4}$ c. Далее уравнение примет вид:

$\frac{c}{4}x - \frac{c}{2}y + c = 0$, то есть

$\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y + 1 = 0$,

x – 2y + 4 = 0.

Уравнение прямой, содержащей сторону AB, x – 2y + 4 = 0.

3) Уравнение прямой, содержащей сторону BO, y = 0, так как BO лежит на оси *x*.

Ответ: x = 0; y = 0; x – 2y + 4 = 0.

№ 38. Чему равны координаты a и b в уравнении прямой $ax + by = 1$, если известно, что она проходит через точки (1; 2) и (2; 1)?

Подставим координаты точек в уравнение прямой:
a + 2b = 1 и 2a + b = 1.

$$\begin{cases} a + 2b = 1 \\ 2a + b = 1 \end{cases}\Bigg| -2$$

$$\begin{cases} -2a-4b=-2 \\ 2a+b=1, \end{cases}$$

-3b = -1,

$$b=\frac{1}{3}$$

2a = 1 – b,

$$a=\frac{1-b}{2}=\frac{1-\frac{1}{3}}{2}=\frac{1}{3}$$

Ответ: $a=b=\frac{1}{3}$.

№ 39. Найдите точки пересечения с осями координат прямой, заданной уравнением: 1) x + 2y + 3 = 0; 2) 3x + 4y = 12; 3) 3x-2y + 6 = 0; 4) 4x-2y-10 = 0.

1) Пусть точка пересечения это (x; 0). Тогда она удовлетворяет уравнению прямой, то есть x + 2· 0 + 3=0, x = -3.

Значит, точка пересечения (-3; 0).

Точка пересечения с осью y (0;y) удовлетворяет уравнению прямой:

0 + 2y + 3 = 0, y = -1,5.

Значит, точка пересечения (0; -1,5).

Получаем, что точки пересечения с осями координат (-3; 0) и (0; -1,5).

Задачи 2), 3) и 4) решаются аналогично.

Ответ: 1) (-3; 0) и (0; -1,5); 2) (4; 0) и (0; 3); 3) (–2; 0) и (0; 3); 4) (2,5; 0) и (0; –5).

№ 40. Найдите точку пересечения прямых, заданных уравнениями:

1) x + 2y + 3 = 0, 4x + 5y + 6 = 0;

2) $3x-y-2=0$, 2x + y-8 = 0;

3) 4x + 5y + 8 = 0, 4x – 2y – 6 = 0.

Координаты точек пересечения прямых являются решениями системы уравнений, задающих эти прямые:

1) $\begin{cases} x + 2y + 3 = 0 & \Big| \cdot (-4) \\ 4x + 5y + 6 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} -4x - 8y - 12 = 0 \\ 4x + 5y + 6 = 0 \end{cases}$ (складываем)

-3y – 6 = 0,

y = – 2, x=-2y – 3 = 4 – 3=1.

(1; -2).

2) $\begin{cases} 3x - y - 2 = 0 \\ 2x + y - 8 = 0 \end{cases}$ (складываем)

5x – 10=0, 5x=10

x = 2,

y = -2x + 8 = -2·2 + 8 = 4.

(2; 4).

3) $\begin{cases} 4x + 5y + 8 = 0 \Big| \cdot (-1) \\ 4x - 2y - 6 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} -4x - 5y - 8 = 0 \\ 4x - 2y - 6 = 0 \end{cases}$ (складываем)

-7y – 14=0 –7y=14,

y = -2,

4x = 2y + 6 = – 4 + 6 = 2,

x = 0,5.

(0.5; -2).

Ответ: 1) (1; –2); 2) (2; 4); 3) (0,5; –2).

№ 41*. Докажите, что три прямые x + 2y = 3, $2x - y = 1$ и $3x + y = 4$ пересекаются в одной точке.

Найдем точку пересечения прямых x + 2y = 3 и 2x – y = 1. Координаты точки пересечения этих прямых — это решение системы уравнений:

$\begin{cases} x + 2y = 3, \\ 2x - y = 1. \end{cases}$

1) x = 3 – 2y подставляем во 2-е уравнение.

2) 2·(3 – 2y) – y = 1; 6 – 4y – y = 1,

5y = 5, y = 1.

3) x = 3 – 2·1, x = 1.

точка пересечения прямых x + 2y = 3 и 2x – y = 1 это (1;1).

Подставив в уравнение 3x + y = 4 вместо x и y координаты точки (1; 1), получим:

3·1 + 1 = 4 — верное равенство.

Значит, прямая 3x + y = 4 проходит через точку (1; 1). А значит, все три прямые пересекаются в точке (1; 1). Так как никакие две различные прямые не могут иметь более одной общей точки, то (1; 1) — единая общая точка.

Что и требовалось доказать.

№ 42*. Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника с вершинами (1; 0), (2; 3), (3; 2).

Пусть в ΔABC A (1; 0); B (2; 3); *C* (3; 2), AA_1, BB_1,. CC_1 — медианы.

$B_1\left(\frac{1+3}{2};\frac{0+2}{2}\right)$; B_1 (2; 1).

$C_1\left(\frac{1+2}{2};\frac{0+3}{2}\right)$, $C_1\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$

Получаем уравнение прямой BB_1: x = 2.

и уравнение прямой CC_1: x – 3y + 3 = 0.

Координаты O (x_o, y_o) — точки пересечения медиан ΔABC это решение системы $\begin{cases} x_o = 2 \\ x_o - 3y_o + 3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_o = 2 \\ 2 - 3y_o + 3 = 0, \end{cases}$

$x_o = 2$

$y_o = \frac{5}{3}$.

Ответ: $\left(2;1\frac{2}{3}\right)$.

№ 43. Докажите, что прямые, заданные уравнениями $y = kx + l_1$, $y = kx + l_2$ при $l_1 \neq l_2$ параллельны.

Задача решена в учебнике на стр. 106 п. 76.

№ 44. Среди прямых, заданных уравнениями, укажите пары параллельных прямых: 1) x + y = 1; 2) y – x = 1; 3) x – y = 2; 4) y = 4; 5) y = 3; 6) 2x + 2y + 3 = 0.

1) $y = -x + 1$, $k = -1$; 4) $y = 4$, $k = 0$;
2) $y = x + 1$, $k = 1$; 5) $y = 3$, $k = 0$;
3) $y = x - 2$, $k = 1$; 6) $y=-x-1{,}5$, $k=-1$
$y = -x – 1{,}5$, $k = -1$.

Параллельные прямые 1) и 6); 2) и 3); 4) и 5), так как коэффициенты k у них равны.
Ответ: 1) и 6); 2) и 3); 4) и 5).

№ 45. Составьте уравнение прямой, которая параллельна оси y и проходит через точку (2; -8).

Задача решена в учебнике на стр. 107 п. 77.

№ 46. Составьте уравнение прямой, параллельной оси x и проходящей через точку (2; 3).

Так как прямая параллельна оси x, то она задается уравнением вида y = c .

Так как точка (2; -3) лежит на прямой, то ее координаты удовлетворяют этому уравнению -3 = c . То есть c=-3 и уравнение прямой y = 3.
Ответ: y = 3.

№ 47. Составьте уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку (2; 3).

Пусть ax + by + c= 0 – уравнение прямой. Прямая проходит через начало координат, поэтому c = 0.

Так что ax + by = 0, так как прямая проходит через (2; 3),
то 2a + 3b = 0, то есть a = -1,5b. Уравнение примет вид
-1,5bx + by =0, то есть 3x-2y = 0.
Ответ: 3x-2y = 0.

№ 48. Найдите угловые коэффициенты прямых из задачи 39.

Угловые коэффициенты прямых ax + by +c =0 находятся по формуле $k = -\frac{a}{b}$. 1) k = $-\frac{1}{2}$; 2) k = $-\frac{3}{4}$; 3) k = $\frac{3}{2}$; 4) k = 2

Ответ: 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $-\frac{3}{4}$; 3) $\frac{3}{2}$; 4) 2.

№ 49. Найдите острые углы, которые образует заданная прямая с осью x: 1) $2y = 2x + 3$; 2) $x\sqrt{3} - y = 2$; 3) $x + y\sqrt{3} + 1$-0.

1) $2y = 2x + 3$, 2) $x\sqrt{3} - y = 2$, 3) $x + y\sqrt{3} + 1 = 0$,

$y = x\sqrt{3} - 2$, $y\sqrt{3} = -x - 1$,

$y = x + 1{,}5$, $k = \sqrt{3}$, $y = -\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$,

$k = 1$, $tg\alpha = \sqrt{3}$, $k = -\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$tg\alpha = 1$. $\alpha = 60°$. $tg\beta = \frac{-\sqrt{3}}{3}$,

$\alpha = 45°$. $\beta = 150°$, $\alpha = 180° - \beta = 30°$.

Ответ: 1) 45°; 2) 60°; 3) 30°.

№ 50. Найдите точки пересечения окружности $x^2 + y^2 = 1$ с прямой: 1) $y = 2x + 1$; 2) $y = x + 1$; 3) $y = 3x + 1$; 4) $y = kx + 1$.

Задача решена в учебнике на стр. 109 п. 80.

№ 51*. При каких значениях с прямая $x + y + c = 0$ и окружность $x^2 + y^2 = 1$: 1) пересекаются; 2) не пересекаются; 3) касаются?

Координаты точек пересечения являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y + c = 0. \end{cases}$$

Окружность и прямая пересекаются, если система имеет решения.

1) $y = -x - c$.

2) $x^2 + (-x-c)^2 = 1$,

$x^2 + x^2 + 2xc + c^2 - 1 = 0$,

$2x^2 + 2cx + (c^2 - 1) = 0$. (2)

Система будет иметь решения, если квадратное уравнение имеет корни, то есть, если $\frac{D}{4} = c^2 - 2(c^2 - 1) = 2 - c^2$ будет неотрицательным, $2-c^2 \geq 0$, $c^2 \leq 2$, $|c| \leq \sqrt{2}$, $-\sqrt{2} \leq c \leq \sqrt{2}$. То есть при $-\sqrt{2} < c < \sqrt{2}$ уравнение (2) имеет два корня, а значит, система имеет два решения, окружность и прямая пересекаются в двух различных точках; при $c = -\sqrt{2}$ или $c = \sqrt{2}$, $\frac{D}{4} = 0$ уравнение (2) имеет один корень, система имеет одно решение, значит, окружность и прямая касаются.

А при $c < -\sqrt{2}$ или $c > \sqrt{2}$, $\frac{D}{4}<0$, система не имеет решений, так как уравнение (2) не имеет решений, значит, окружность и прямая не пересекаются.

Ответ: 1) пересекаются, если $-\sqrt{2} < c < \sqrt{2}$;

2) не пересекаются, если $c < -\sqrt{2}$ или $c > \sqrt{2}$;

3) касаются, если $c = -\sqrt{2}$ или $c = \sqrt{2}$.

№ 52. Найдите синус, косинус и тангенс углов: 1) 120°; 2) 135°; 3) 150°.

1) $\alpha = 120°$,

$\sin\alpha = \sin(180°-60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\cos\alpha = \cos(180°-60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$;

$\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}(180°-60°) = -\mathrm{tg}\, 60° = -\sqrt{3}$.

2) $\alpha = 135°$,

$\sin\alpha = \sin(180°-45°) = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\cos\alpha = \cos(180°-45°) = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}(180°-45°) = -tg\, 45° = -1$.

3) $\alpha = 150°$,

$\sin\alpha = \sin(180°-30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$;

$\cos\alpha = \cos(180°-30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$tg\alpha = tg\ (180°-30°) = -tg\ 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

№ 53. Найдите: 1) sin 160°; 2) cos 140° 3) tg 130°.

1) sin 160° = sin (180°-20°) = sin 20°≈0,3420.

2) cos 140° = cos (180°-40°) = -cos 40°≈ -0,7660.

3) tg 130° = tg (180°-50°) = -tg 50°≈ -1,1918.

№ 54. Найдите синус, косинус и тангенс углов: 1) 40°; 2) 14°36'; 3) 70°20'; 4)30°16'; 5) 130°; 6) 150°30'; 7) 150°33'; 8) 170°28'.

Синус, косинус и тангенс острых углов находим с помощью таблиц Брадиса. 1), 2), 3) и 4).

5) α = 130°.

sin*α* = sin (180°-50°) = sin 50° = 0,7660.

Значения cos α и tg α находятся аналогично.

6) α = 150°30'.

sin 150°30' = sin (180°-29°30') = sin 29°30' = 0,4924.

Задания 7) и 8) выполняются аналогично.

№ 55. Найдите углы, для которых: 1) sin *a* = 0,2; 2) cos α = -0,7; 3) tg α = -0,4.

1) sin α = 0,2, α = 11°32'

или

α = 168°28'.

2) cos α = -0,7,

cos (180°-α) =

= -cos α =0,7

180°-α = 45°34′

α = 180°-45°34',

α = 134°26'.

3) tg α = -0,4.

tg (180°-α) = -tgα =0,4

180°-α = 21°48',

α = 180°-21°48'

α = 158°12'

№ 56. Найдите sin α и tg α, если: 1) $\cos\alpha = \frac{1}{3}$; 2) cosα = –0,5; 3) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1) $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, тогда

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = \frac{2\sqrt{2}\cdot 3}{3\cdot 1} = 2\sqrt{2}$$

2) cos a = -0,5,

$$\sin\alpha = \sqrt{1-(-0{,}5)^2} = \sqrt{1-0{,}25} = \sqrt{0{,}75} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = -\frac{\sqrt{3}\cdot 2}{2\cdot 1} = -\sqrt{3}$$

Задания 3) и 4) выполняются аналогично.

№ 57. Найдите cosα и tg α, если: 1) sinα = 0,6, 0 < α <90°; 2) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, 90<α<180°; 3) $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 0< α <180°.

1) sin α = 0,6, 0° < α<90°. Тогда

$\cos\alpha = \sqrt{1-0{,}6^2} = \sqrt{1-0{,}36} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$; $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}6}{0{,}8} = \frac{3}{4}$.

2) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, 90°< α <180°. Тогда

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3};$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{1\cdot 3}{3\cdot 2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

3) $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 0°< α <180°, тогда

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \pm\sqrt{1-\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \pm\frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot 1} = \pm 1.$$

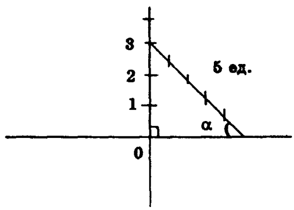
№ 58. Известно, что $tg\alpha = -\frac{5}{12}$. Найдите sinα и cosα.

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha};\ \cos^2\alpha = \frac{1}{1+tg^2\alpha},\ \cos^2\alpha = \frac{1}{1+\frac{25}{144}},$$

$$\cos^2\alpha = \frac{144}{169}; \cos\alpha = \pm\frac{12}{13},$$

$$\sin\alpha = tg\alpha\cdot\cos\alpha = \pm\frac{5\cdot 12}{12\cdot 13} = \pm\frac{5}{13}.$$

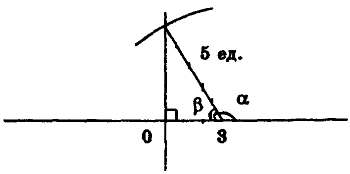
№ 59. Постройте угол α, если известно, что $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.



Строим прямоугольный треугольник с катетом 3 и гипотенузой 5. Угол напротив катета 3 — искомый, так как $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

№ 60. Постройте угол α, если известно, что $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$.

Строим прямоугольный треугольник с катетом 3 и гипотенузой 5. Угол, смежный с углом β -треугольника – искомый.



Так как cos (180°-β) = -cos β = $-\frac{3}{5}$ = cos α.

№ 61*. Докажите, что если cosα = cosβ, то α = β.

По определению cosα = $\frac{x_1}{R}$, где R — радиус окружности с центром (0; 0), а A(x_1; y_1) – точка пересечения одной из сторон угла α с этой окружностью, если другая сторона совпадает с положительной полуосью x, и угол α отложен в верхнюю полуплоскость, где $y>0$.

Аналогично cosβ = $\frac{x_2}{R}$, а B(x_2; y_2) – соответствующая точка.

Поскольку cosα = cosβ, то

$\frac{x_1}{R} = \frac{x_2}{R}$, значит, $x_1 = x_2$.

Так как точки A и B принадлежат окружности с центром (0; 0) и радиуса R, то

$x_1^2 + y_1^2 = R^2$.

$x_2^2 + y_2^2 = R^2$.

А так как $x_1 = x_2$ то $y_1^2 = y_2^2$. Поскольку y_1, y_2— положительные числа, то $y_1 = y_2$, значит, A (x_1; y_1) и B (x_2; y_2) совпадают.

А значит, α = β.

Что и требовалось доказать.

№ 62*. Докажите, что если sinα = sinβ, то либо α = β, либо α = 180° – β.

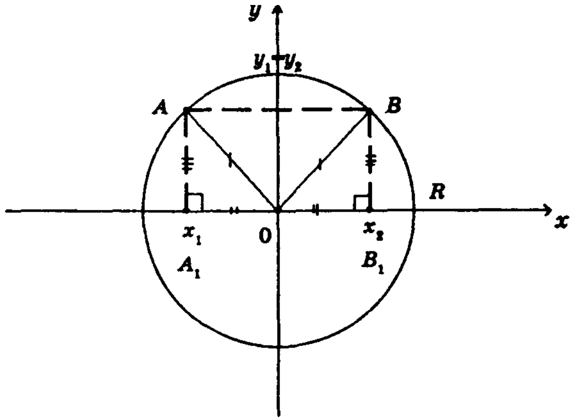
Пусть A (x_1; y_1). B (x_2; y_2) — точки пересечения окружности с центром (0; 0) радиуса R со стороной угла α и β соответственно, отложенных от положительной полуоси x в верхнюю полуплоскость, где $y>0$.

По определению sinα = $\frac{y_1}{R}$; sinβ = $\frac{y_2}{R}$. Поскольку точки A и B лежат на окружности с центром (0; 0) радиуса R, то $x_1^2 + y_1^2 = R^2$ и

$x_2^2 + y_2^2 = R^2$, но $y_1 = y_2$, так как sin α = sin β.

Так как $y_1 = y_2$, то $x_1^2 = x_2^2$, $|x_1| = |x_2|$. Значит, либо $x_1 = x_2$, либо $x_1 = -x_2$.

Если $x_1 = x_2$, то A и B совпадают и $\alpha = \beta$; если $x_1 = -x_2$, то опустим перпендикуляры AA_1 и BB_1 из A и B на ось x. Тогда $OA_1=OB_1$, $OA=OB$ и $AA_1=BB_1$.



Поэтому $\Delta OA_1A = \Delta OB_1B$ (по трем сторонам), значит, $\angle B_1OB = \angle A_1OA = \beta$, $\angle B_1OA = \alpha$ является смежным с углом A_1OA, значит, $\alpha+\beta = 180°$. То есть

$\beta = 180-\alpha$.

Что и требовалось доказать.

§ 9. Движение

№ 1. Докажите, что при движении параллелограмм переходит в параллелограмм.

Диагонали параллелограмма пересекаются в точке, которая делит каждую из них пополам. Но при движении параллелограмм перейдет в четырехугольник, у которого диагонали в точке пересечения делятся пополам. А значит этот четырехугольник — параллелограмм.

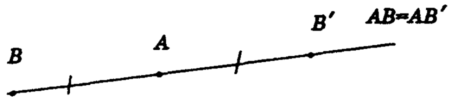
Что и требовалось доказать.

№ 2. В какую фигуру переходит при движении квадрат? Объясните ответ.

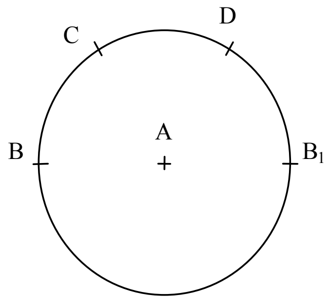
Поскольку движение — это преобразование одной фигуры в другую, сохраняющее расстояния между точками и сохраняющее углы между полупрямыми, то квадрат перейдет в фигуру, стороны которой будут равны и углы прямые, а значит, эта фигура – квадрат. То есть квадрат перейдет в квадрат.

№ 3. Даны точки A и B. Постройте точку B', симметричную точке B относительно точки A.

На продолжении прямой BA откладываем отрезок AB′=AB.



№ 4. Решите предыдущую задачу, пользуясь только циркулем.



$AB = CB = CD = DB_1$.